3 1761 07550552 9

Toronto University Library

Presented by

The University of Bonn, Germany.

through the Committee formed in

The Old Country

to aid in replacing the loss caused by

The disastrous Fire of February the 14th 1890

System

der

Geometrie des Raumes

in neuer analytischer Behandlungsweise,

insbesondere

die Theorie der Flächen zweiter Ordnung und Classe

enthaltend.

Von

Dr. Julius Plücker,

ord. Professor zu Bonn.

Mit einer Tafel.

Düsseldorf, 1846.

Schaub'sche Buchhandlung,
W. H. Scheller.

QA
571
P58

14889
12/8/9.

Düsseldorf, Wolf'sche Buchdruckerei
Hermann Voss.

Vorrede.

Es lag ursprünglich nicht in meiner Absicht, auch auf die drei Dimensionen des Raumes, meine Untersuchungen auszudehnen. Diejenigen Ideen, welche, im Anfange meiner akademischen Laufbahn, zuerst mir die Feder in die Hand gaben und mich damals schon eine Umgestaltung der analytisch geometrischen Methode durchblicken liessen, finden ihre unmittelbare Anwendung auch in dem weiteren Gebiete der räumlichen Geometrie, so dass hier der Weg durch meine frühern Arbeiten schon vorgezeichnet ist. Aber die Ausführung wirkt zurück auf den Gedanken, der sie hervorgerufen hat, vervollständigend, läuternd, verallgemeinernd; sie gibt ihm erst seine Bedeutung. In dieser Beziehung durfte auch die vorliegende Arbeit nicht fehlen. Wenn sie, selbst in denjenigen Theilen, die von Geometern ersten Ranges wiederholt mit Vorliebe behandelt worden sind, noch eine reiche Ausbeute neuer Resultate gegeben hat,

so lege ich darauf nur in so fern Gewicht, als die Methode es ist, die, wohinaus wir sie verfolgen mögen, nothwendig Neues aufdecken muss. Und diese Methode — in solchem Glauben lege ich die Feder nach mehr als zwanzig Jahren nieder, um sie für diese Art von Forschung nicht mehr zu ergreifen — wird der Wissenschaft bleibend angehören.

Bonn, im Juli 1846.

Der Verfasser.

Uebersicht des Inhalts.

Einleitende Betrachtungen.

§. 1. **Coordinaten-Bestimmung des Punctes und der Ebene. Collineation. Reciprocität.** . . . . . Seite 1.

Coordinaten eines Punctes und einer Ebene. Befreundete Punct- und Plan-Coordinaten. Allgemeine Punct-Coordinaten. Allgemeine Plan-Coordinaten. 1—7. Collineation. Ihr analytischer Ausdruck in den beiden Systemen. 8—11. Reciprocität. Doppelte Weise, dieselbe analytisch auszudrücken. Reciproke Lage. 12—15.

§. 2. **Darstellung der Flächen in der doppelten Coordinaten Bestimmung. Uebergang von einer Darstellung zur andern. Analytische Theorie des Contactes. Curven doppelter Krümmung, Abwickelungs-Flächen. Gleichzeitige Beschreibung beider durch eine gerade Linie. Erste und zweite Krümmung. Conische Krümmung** . . . . . Seite 15.

Darstellung der Flächen in Punct-Coordinaten. Homogene Gleichungen zwischen vier linearen Functionen. Kegelflächen. Durchschnitts-Curve zweier Flächen. Durchschnittspuncte dreier Flächen. 16—18. Darstellung der Flächen in Plan-Coordinaten. Ebene Curven. Abwickelungs-Flächen. Gemeinschaftliche Tangential-Ebenen. 19—21. Allgemeine Theorie des Contactes erster Ordnung in der doppelten Coordinaten-Bestimmung als geometrische Deutung des Satzes über homogene Functionen. 22—24. Flächen zweiter Ordnung und Classe als Directricen der Reciprocität. 25, 26. Darstellung derselben Fläche in befreundeten Punct- und Plan-Coordinaten. Beziehungen zwischen den partiellen Differential-Coefficienten in beiden Systemen. Partielle Differential-Gleichungen der Flächen in beiden Systemen. Besondere Auflösungen derselben. 27—32. Analytische Bestimmung der Abwickelungs-Flächen bei Punct-Coordinaten, und der Curven doppelter Krümmung bei Plan-Coordinaten. 33, 34. Durch die Bewegung einer geraden Linie wird gleichzeitig eine Abwickelungs-Fläche beschrieben und eine Curve doppelter Krümmung umhüllt. 35—38. Maass der ersten, der zweiten, der conischen Krümmung. 39—41.

§. 3. **Das Zählen der Constanten.** . . . . . Seite 36.

Bestimmung der Anzahl $\varphi(n)$ der Constanten, von denen eine Fläche n. Ordnung oder Classe abhängt. 43. Alle Flächen der n. Ordnung, welche durch $(\varphi(n) - 1)$ gegebene Puncte gehen, haben eine gemeinschaftliche Durchschnitts-Curve. Jeder gegebene Punct kann durch eine lineare Bedingung zwischen den Constanten vertreten werden. Fall, dass die sich schneidenden Flächen von verschiedener Ordnung sind. 44—47. Alle Flächen der n. Ordnung, welche sich in $(\varphi(n) - 2)$ gegebenen Puncten schneiden, haben alle Durschnittspuncte gemeinsam. Lineare Bedingungs-Gleichungen statt der gegebenen Puncte. Fall, dass drei Flächen von verschiedener Ordnung sich schneiden. 48—53. Analoges für Flächen der n. Classe in Beziehung auf ihre gemeinschaftlichen Tangential-Ebenen. 54—57.

Discussion der Flächen zweiter Ordnung und der Flächen zweiter Classe.

§. 1. **Discussion der allgemeinen homogenen linearen Function des zweiten Grades zwischen vier veränderlichen Grössen** . . . . . Seite 49.

Transformation der allgemeinen Function in $(\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 + \sigma S^2)$. 1. Bestimmung der Constanten 2—5. Bestimmung zweier Hauptfälle, von denen der eine in zwei sich auflöset. 6. Uebergangsfall, wo die umgeformte Function nur drei Veränderliche enthält. 7. Fälle, wo sie nur zwei, nur eine Veränderliche enthält. 8, 9. Vereinfachung der Bezeichnung 10. Vollständige und symmetrische Bedingungs-Gleichungen für die verschiedenen Fälle. 11—14. Fälle, wo die Umformung illusorisch wird, vermieden durch eine andere Annahme der ursprünglichen Veränderlichen. 15. Neue Unterscheidungen, wenn eine der ursprünglichen vier Veränderlichen auf eine Constante sich reducirt. Fälle, wo hier die umgeformte Function mit einer andern vertauscht werden muss. 16—19. Zweite allgemeine Umformungs-Weise. 20. Ausdehnung auf homogene Functionen von mehr als vier Veränderlichen und einfache Constanten-Bestimmung. 21—22.

§. 2. **Aufzählung der Flächen der zweiten Ordnung** . . . . . Seite 73

Allgemeine Eintheilung. Imaginäre, geradlinige, nicht geradlinige Flächen. Kegelfläche und Punct. System von zwei Ebenen, die reell oder imaginär sind oder zusammenfallen. 23—25. Imaginäre Fläche, einschaliges Hyperboloid, Ellipsoid, zweischaliges Hyperboloid. Hyperbolisches und elliptisches Paraboloid. Kegelfläche und Punct. Hyperbolischer, elliptischer und imaginärer Cylinder. Parabolischer Cylinder. Zwei reelle Ebenen und eine gerade Linie (zwei imaginäre Ebenen). Zwei parallele, reelle oder imaginäre, Ebenen. Zwei zusammenfallende Ebenen. 26—29.

§. 3. **Aufzählung der Flächen der zweiten Classe** . . . . . Seite 79

Allgemeine Eintheilung. 30—32. Imaginäre Fläche. Einschaliges Hyperboloid. Ellipsoid. Zweischaliges Hyperboloid. Imaginäre Curve zweiter Classe. Ellipse. Hyperbel. Zwei reelle Puncte und eine gerade Linie (zwei imaginäre Puncte). Zwei zusammenfallende Puncte. Elliptisches und hyperbolisches Paraboloid. Parabel. System von zwei Puncten, von welchen einer nach gegebener Richtung unendlich weit liegt. Reelle und imaginäre Curve in unendlicher Entfernung. Zwei Puncte, die nach zwei reellen oder imaginären oder zusammenfallenden Richtungen unendlich weit liegen. 33—36.

§. 4. **Discussion der Gleichungs-Form** $\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 + \sigma S^2 = 0$ **in der zwiefachen Coordinaten-Bestimmung** . . . . . Seite 87.

Pol-Tetraeder. Seine Lage in Beziehung auf die Fläche in den verschiedenen Fällen. Bedeutung der sechs überzähligen Constanten. 37—44. Mittelpunct. Zugeordnete Durchmesser und zugeordnete Durchmesser-Ebenen. 45—47. Particuläre Fälle. 48—54. Reciprocität. 55.

§. 5. **Discussion der Gleichungs-Form** $tu = \mu vw$ **in der zwiefachen Coordinaten-Bestimmung** . . . . . Seite 99.

Beziehung der vier linearen Functionen zur Fläche. Bedeutung der Constanten μ. 56—63. Doppelte Erzeugung der Fläche durch eine gerade Linie, die drei gegebene schneidet, und Bestimmung ihres Mittelpunctes. 64—66. Construction der Fläche, wenn ein aufgeschriebenes räumliches Viereck und ein Punct oder eine Tangential-Ebene, oder wenn zwei Linien derselben Erzeugung und überdiess zusammen drei Puncte oder gerade Linien gegeben sind. 67—70. Eine gerade Linie der einen

Erzeugung wird von vier geraden Linien der andern harmonisch geschnitten. 71. Wenn zwei Puncte auf zwei gegebenen geraden Linien, oder zwei durch diese Linien gehenden Ebenen sich linear entsprechen, so beschreibt die Linie, welche jene Puncte verbindet, oder die Durchschnitts-Linie dieser beiden Ebenen eine Fläche zweiter Ordnung. 72—74. Particularisation. Hyperbolisches Paraboloid. Ein solches durch die Seiten eines räumlichen Vierecks zu legen oder durch zwei gerade Linien und und zwei Puncte oder Tangential-Ebenen. 75—81. Fälle, wo ein oder mehrere Winkelpuncte des aufgeschriebenen Vierecks unendlich weit liegen. Mechanische Beschreibung eines Hyperboloids durch gerade Linien, die ursprünglich in derselben Ebene liegen und durch denselben Punct gehen. Umformung eines Hyperboloids in ein anderes und in eine Curve zweiter Classe. Entsprechendes. 82—84. Fall des Paraboloids bei Plan-Coordinaten. 85, 86. Aufgeschriebene Sechsecke. Sätze von *Pascal* und *Brianchon*, ihre Erweiterung und ihr Zusammenhang. Einfache Symbol Beweise. 87-93.

§. 6. **Vollständige Bestimmung der Flächen zweiter Ordnung. Richtung und Grösse ihrer Axen. Identische und ähnliche Flächen** . . . . Seite 135.

Darstellung der Flächen in rechtwinkligen Parallel-Coordinaten. Ihr Mittelpunct. 94—96. Die verschiedenen untergeordneten Fälle lassen sich, statt durch Bedingungs-Gleichungen, durch identische Gleichungen characterisiren. 97—102. Bestimmung der drei Axen-Richtungen bei Flächen mit einem Mittelpuncte. 103—105. Fall des Paraboloids. Bestimmung der Coordinaten seines Scheitels aus der allgemeinen Gleichung. 106—108. Bestimmung der Axe des Cylinders, der Durchschnitts-Linie zweier Ebenen, der Scheitel-Linie eines parabolischen Cylinders. 109, 110. Entwicklung der Gleichung, deren Wurzeln die drei Halb-Axen-Quadrate der Fläche sind. 111. Bestimmung der verschiedenen Arten von Flächen durch diese Gleichung. 112. Reduction der Gleichung für zwei Dimensionen. 113. Geometrische Deutung der Coefficienten der Gleichung, die unabhängig sind von der Lage der Fläche gegen die Coordinaten-Axen. 114—116. Sätze über zugeordnete Durchmesser. 117—122. Umformung der Gleichung der 111. Nummer in diejenige, welche für den Fall der beiden Paraboloide die Parameter der beiden Hauptschnitte gibt. Discussion der verschiedenen Fälle. Parabolischer Cylinder. 123—125. Directe Bestimmung der Winkel, die die gleichen zugeordneten Durchmesser oder die Asymptoten der drei Curven in den Hauptschnitten einschliessen. Bestimmung ähnlicher Flächen. 126—128. Fall der beiden Paraboloide. 129.

§. 7. **Rotations-Flächen. Kreisschnitte der Flächen zweiter Ordnung. Kreispuncte** . . . . . Seite 175

Bestimmung der Rotations-Flächen durch die Bedingung, dass nur eine der drei Axen eine bestimmte Richtung behält. Gleichungen der Rotations-Axe. Besondere Fälle. 130—134. Bestimmung der Länge der Rotations-Axe und des Radius des Aequators. Brennpuncte. Focal-Kreis. Verlängertes und abgeplattetes Sphäroid. Die beiden Rotations-Hyperboloide. Parameter des Rotations-Paraboloids 135—137. Zweite und dritte Bestimmung der Rotations-Flächen, als solche, die eine veränderliche Kugel umhüllen, deren Mittelpunct auf einer geraden Linie fortrückt und als solche, die zwei gleiche Axen haben. 138—140. Bestimmung der Kreisschnitt-Ebenen überhaupt für die verschiedenen Flächen. Kreispuncte. 141—145.

§. 8. **Vollständige Bestimmung der Flächen zweiter Classe. Richtung und Grösse ihrer Axen** . . . . . Seite 191.

Darstellung der Fläche durch die allgemeine homogene Gleichung in t, u, v, w. Bestimmung des Mittelpunctes. Bestimmung des Scheitels und der Axe des Paraboloids. Ausartung der Fläche in

eine Curve zweiter Classe und Bestimmung ihrer Ebene. System von zwei Puncten. Parabel und Bestimmung ihres Scheitels. Verlegung des Anfangspunctes. 146—151. Bestimmung der Richtung und Grösse der Axen. Bedingung, dass die Fläche eine Rotations-Fläche ist. Alles wie bei rechtwinkligen Punct-Coordinaten, so lange der Anfangspunct der Coordinaten in dem Mittelpuncte der Fläche liegt. 152—154. Bedingung, dass die Fläche eine Rotationsfläche sei, bei beliebiger Lage des Mittelpunctes. 155. Allgemeine Gleichung zur Bestimmung der drei Halb-Axen-Quadrate. Unterscheidung der verschiedenen Fälle von Flächen an diese Gleichung geknüpft. Directe Ableitung derjenigen Gleichung, welche die beiden halben Parameter eines Paraboloids zu ihren Wurzeln hat. 156—159. Geometrische Deutung der Coefficienten der allgemeinen Gleichung bei der willkührlichen Annahme der Coordinaten-Axen. Betrachtung des letzten Gliedes. 160—164.

§. 9. **Bestimmung der Axen in dem Systeme der Punct- und Plan-Coordinaten bei schiefwinkligen Coordinaten-Axen. Discussion besonderer Formen** Seite 211.

Fall, dass drei zugeordnete Durchmesser die Coordinaten-Axen sind. 165. Allgemeiner Weg für die Entwickelung 166. Aufstellung der Gleichung dritten Grades, die bei Plan-Coordinaten in dem Falle schiefwinkliger Axen die drei Halb-Axen-Quadrate zu Wurzeln hat. Verification und Discussion der Coefficienten dieser Gleichung. 167—170. Das Entsprechende bei Punct-Coordinaten und schiefwinkligen Axen. 171—173. Bestimmung der Parameter der Hauptschnitte eines Paraboloids. 174. Gleiche zugeordnete Durchmesser und von ihnen gebildete Winkel. 175—176. Gleichung der Flächen, bezogen auf drei Seiten oder auf drei Tangential-Ebenen ihres Asymptoten-Kegels. Zugeordnete Asymptoten-Längen. Ein- und umgeschriebene Asymptoten-Pyramide. 177—181.

§. 10. **Rotations-Flächen zweiter Classe. Rotations-Kegel, die einer Fläche zweiter Classe umschrieben sind** . . . . . Seite 242.

Zweite Bestimmungsweise, dass eine Fläche eine Rotations-Fläche sei. Besondere Fälle. 182—186. Gleichungs-Form, wenn der Anfangspunct in einem Brennpuncte liegt. 182. Einer Fläche umschriebene Rotations-Kegel. Ort ihrer Mittelpuncte. Die drei Focal-Curven für die verschiedenen Flächen. Focal-Curve einer Curve zweiter Classe. Focalpuncte, Brennpuncte derselben. Winkel-Beziehungen. 187—193. Rotations-Kegel mit grösster Oeffnung. 194. Irgend zwei Puncte einer Focal-Curve sind die beiden Brennpuncte einer umschriebenen Rotationsfläche. Zwei umschriebene Rotations-Kegel sind zugleich einer Kugel umschrieben. 195—199. Fall, dass die Fläche in eine Curve übergeht. Für alle Puncte einer Curve ist die Summe oder Differenz der Abstände von irgend zwei Focalpuncten constant. *Quetelet*scher Satz. Sätze über Winkel-Beziehungen und ihre einfachste Ableitung. Umdrehungsflächen durch eine Curve zweiter Classe gelegt. 200—206. Discussion des Falles der Paraboloide und der Parabel. 207—209.

§. 11. **Rotations-Kegel, die den Flächen zweiter Ordnung umschrieben sind. Focalpunct und Directrix** . . . . . Seite 275.

Unmittelbare analytische Bestimmung der umschriebenen Rotations-Kegel bei der Annahme von Punct-Coordinaten. Die drei Focal-Curven. Focalpunct und zugehörige Directrix. 210—212. Specielle Discussion. 213—216. Bildliche Darstellung. 217. Discussinn der Gleichung: $R^2 = \rho^2$ ST. 218—221. Discussion der Gleichung: $R = \delta D$. 222—227. Focalpunct und zugehörige Directrix einer Curve. 228. Besonderes 229, 230. Fall der Rotations-Flächen. 231. Fall der Kegelflächen. Focal-Linien und ihre Analogie mit den Brennpuncten. 232—233.

Einleitende Betrachtungen.

§. 1.

Coordinaten-Bestimmung des Punctes und der Ebene. Collineation. Reciprocität.

1. Es stellt, wie bekannt, die Gleichung:

$$t'z + u'y + v'x + 1 = 0, \qquad (1)$$

wenn z, y und x die Bedeutung von gewöhnlichen Parallel-Coordinaten haben und wir dieselben als veränderlich betrachten, während t', u' und v' drei Constante bedeuten, eine Ebene dar. Sind diese Constanten gegeben, so ist es die Ebene. Man sieht sogleich, dass die reciproken und mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Werthe derjenigen drei Segmente, welche die gegebene Ebene von den drei Coordinaten-Axen Z, Y und X abschneidet, jene drei gegebenen Constanten sind. Die Bestimmung von diesen Constanten ist hiernach eine lineare, so wie, umgekehrt, auch die Construction der Ebene, wenn die drei Constanten ihrer Gleichung gegeben sind, eine lineare und vollkommen bestimmte ist. Wir nennen diese drei Constanten t', u' und v' die drei Coordinaten der durch die Gleichung (1) dargestellten Ebene und bezeichnen sie überhaupt als Plan-Coordinaten; dem ganz analog, wie wir Coordinaten eines gegebenen Punctes diejenigen besondern (constanten) Werthe von z, y und x nennen, welche diesem Puncte angehören und durch deren Vermittelung wir denselben auf lineare Weise bestimmen können. Mit der Lagen-Aenderung der durch die Gleichung (1) dargestellten Ebene ändern sich die Coordinaten-Werthe derselben. Aus diesem Gesichtspuncte betrachtet, sind dieselben veränderliche Grössen, und als solche wollen wir sie, mit Hinweglassung der Accente, durch t, u und v bezeichnen. Sie sind veränderliche Grössen, welche für alle Ebenen, wie die Punct-Coordinaten z, y und x für alle Puncte, durch Vermittelung der drei Coordinaten-Axen auf gleichförmige Weise construirt werden können.

Die Gleichung (1) wird befriedigt, wenn wir für z, y, x die Coordinaten z', y', x' irgend eines Punctes der dargestellten Ebene einsetzen, wonach:

$$t'z' + u'y' + v'x' + 1 = 0. \qquad (2)$$

Diese Gleichung drückt also eine Relation zwischen den Coordinaten einer Ebene (t', u', v') und den Coordinaten eines Punctes (z', y', x') aus, welche bestehen muss, wenn dieser Punct auf jener Ebene liegen, oder, was dasselbe heisst, wenn jene Ebene durch diesen Punct gehen soll. Betrachten wir einerseits, wie in dem Vorstehenden, t', u', v' als constant und z', y', x' als veränderlich, so erhalten wir die Gleichung (1), von der wir eben sagen, dass sie die Ebene (t', u', v') darstelle, weil die unendlich vielen zusammengehörigen Punct-Coordinaten-Werthe, welche diese Gleichung befriedigen, den verschiedenen Puncten der Ebene entsprechen. Betrachten wir andrerseits z', y', x' als constant und t', u', v' als veränderlich, so erhalten wir die Gleichung:

$$z't + y'u + x'v + 1 = 0, \qquad (3)$$

welche durch unendlich viele Gruppen dreier zusammengehörigen Plan-Coordinaten-Werthe befriedigt wird. Solchen Coordinaten-Werthen entsprechen alle die verschiedenen Ebenen, welche sich durch den Punct (z', y', x') legen lassen. Wir sagen, es werde dieser Punct durch die Gleichung (3) dargestellt.

Die Coordinaten der Ebene sind die drei Constanten ihrer Gleichung (1), die Coordinaten des Punctes die drei Constanten seiner Gleichung (3).

2. Wir sagen, dass überhaupt eine Gleichung zwischen Punct-Coordinaten eine Fläche darstelle, weil alle Gruppen von Coordinaten-Werthen, welche die Gleichung befriedigen, den Puncten der Fläche zugehören, und umgekehrt, die Coordinaten jedes Punctes der Fläche der Gleichung Genüge thun. Wir sagen ebenso, dass überhaupt eine Gleichung zwischen Plan-Coordinaten eine Fläche darstelle, weil alle Gruppen von Coordinaten-Werthen, welche die Gleichung befriedigen, Ebenen entsprechen, welche die Fläche berühren, und umgekehrt, die Coordinaten jeder Tangential-Ebene der Gleichung Genüge thun.

Wenn sich die Gleichungen auf den ersten Grad reduciren, so gehen die dargestellten, im Allgemeinen krummen, Flächen in dem Systeme der Punct-Coordinaten in eine Ebene, in dem Systeme der Plan-Coordinaten in einen Punct über.

3. An die Stelle der Gleichung (1) können wir auch die folgende setzen:

$$z + u'y + v'x + w' = 0, \qquad (4)$$

in welcher ebenfalls drei Constante und zwar nur in der ersten Potenz vorkommen. Diese Gleichung ist, wie jene, in Beziehung auf die drei Veränderlichen z, y, x, denen wir auch hier die Bedeutung gewöhnlicher Punct-Coordinaten beilegen, einerseits, und andrerseits der drei Constanten u', v', w' symmetrisch. Die drei neuen Constanten können wir, was die Bestimmung der durch die Gleichung (4) dargestellten Ebene betrifft, an die Stelle der früheren setzen, und, wie diese in dem Vorstehenden, als die Coordinaten der Ebene betrachten. Durch diese neuen Coordinaten wird bloss die Ebene auf eine andere Weise als früher construirt. Auf bekannte Weise überzeugt man sich nemlich sogleich, dass w' das, mit entgegengesetztem Zeichen genommene, Segment bedeutet, welches die Ebene (4) von der Axe Z abschneidet, und dass u' und v' (unter der Voraussetzung rechtwinkliger Axen) die trigonometrischen Tangenten derjenigen beiden Winkel bedeuten, welche einerseits von der Axe Z und andrerseits von den in den Ebenen ZY und ZX liegenden Projectionen eines auf der Ebene (4) errichteten Perpendikels gebildet werden.

Bezeichnen wir, wie früher, einen gegebenen Punct der Ebene (4) durch z', y', x', so kommt:

$$z' + u'y' + v'x' + w' = 0, \qquad (5)$$

und wenn wir dann ferner u', v', w' als veränderlich betrachten und, dem entsprechend, die Accente fortlassen:

$$w + x'v + y'u + z' = 0, \qquad (6)$$

eine Gleichung, welche, in demselben Sinne als früher, den Punct (z', y', x') darstellt.

4. Dadurch, dass wir den Erörterungen der vorstehenden und der ersten Nummer die uns geläufigere Bestimmung der Coordinaten eines Punctes zu Grunde gelegt haben, erscheint die Bestimmung der Coordinaten einer Ebene als ein hieraus Abgeleitetes. Alles verhält sich aber, in Beziehung auf die zwiefache Coordinaten-Bestimmung, ganz symmetrisch, und es ist kein Grund vorhanden, vorzugsweise eine der beiden Bestimmungen als die erste und ursprüngliche anzusehen. Denn auf gleiche Weise hätten wir auch aus der Bestimmung der Plan-Coordinaten die Bestimmung der gewöhnlichen Punct-Coordinaten ableiten, oder, mit andern Worten, in den genannten beiden

Nummern rückwärts von den Gleichungen (3) und (6) zu den Gleichungen (1) und (4) übergehen können.

Wir wollen uns nun zu einer allgemeinern Coordinaten-Bestimmung, sowol für Puncte als Ebenen, wenden und hierbei, was die Form der Darstellung anbetrifft, den eben ausgesprochenen Gesichtspunct festhalten.

5. An die Stelle der Gleichungen (2) und (5) wollen wir die nachstehende treten lassen:

$$\frac{P}{S}\cdot\frac{p}{s}+\frac{Q}{S}\cdot\frac{q}{s}+\frac{R}{S}\cdot\frac{r}{s}+1=0, \qquad (7)$$

welche wir auch folgendergestalt schreiben können:

$$Pp+Qq+Rr+Ss=0. \qquad (8)$$

Wir bezeichnen hierbei durch p, q, r und s vier gegebene ganze und lineare Functionen von z, y und x, so wie durch P, Q, R und S vier gegebene ganze und lineare Functionen etwa von u, v und w.

In dieser Voraussetzung stellen, wenn wir erstens P, Q, R und S als constant und p, q, r und s als veränderlich betrachten, die vorstehenden Gleichungen, weil sie in Beziehung auf z, y und x vom ersten Grade sind, eine Ebene dar, welche durch die drei constanten Coefficienten:

$$\frac{P}{S}, \frac{Q}{S}, \frac{R}{S}$$

auf einzige Weise vollkommen bestimmt ist. Diese drei constanten Quotienten nennen wir die drei Coordinaten der Ebene. Wir werden auch eben so oft von vier Coordinaten der Ebene sprechen, indem wir für diese

$$P, Q, R, S$$

nehmen. Wenn die Ebene gegeben ist, so erhalten nur die Quotienten je zweier ihrer vier Coordinaten bestimmte Werthe, und nur diese, nicht aber die vier Coordinaten selbst, können wir zur Bestimmung einer Ebene, von Vorne herein, willkührlich annehmen; was auch daraus schon erhellet, dass jede dieser vier Coordinaten, weil sie alle gegebene lineare Functionen von u, v und w sind, auch eine gegebene lineare Function der drei übrigen ist.

Wenn wir zweitens p, q, r und s als constant und P, Q, R und S als veränderlich betrachten, so stellen die vorstehenden Gleichungen, weil sie in Beziehung auf u, v und w vom ersten Grade sind und also auf die Form der Gleichung (6) gebracht werden können, einen Punct dar, welcher durch die drei constanten Coefficienten:

$$\frac{p}{s}, \frac{q}{s}, \frac{r}{s}$$

auf einzige Weise vollkommen bestimmt ist. Diese drei Constanten nennen wir die drei Coordinaten des Punctes. Auch hier werden wir eben so oft von vier Coordinaten sprechen, indem wir für diese

$$p, q, r, s$$

nehmen. Der Punct ist alsdann durch die Quotienten je zweier dieser vier Coordinaten und, umgekehrt, sind diese durch die Lage des Punctes bestimmt.

Es gibt hiernach unendlich viele Systeme von Punct-Coordinaten sowohl als von Plan-Coordinaten; diese ordnen sich, in Folge der Gleichung (7), die wir der Kürze wegen auf folgende Weise schreiben wollen:

$$\Theta\mathfrak{H} + H\eta + Z\zeta + 1 = 0,$$

indem wir $\mathfrak{H}$, η, ζ für die Punct-Coordinaten $\frac{p}{s}$, $\frac{q}{s}$, $\frac{r}{s}$ und Θ, H, Z für die Plan-Coordinaten $\frac{P}{S}$, $\frac{Q}{S}$, $\frac{R}{S}$ einsetzen, als befreundete Coordinaten-Systeme paarweise zusammen. Denn, wenn wir zum Beispiel $\mathfrak{H}$, η, ζ als gegebene lineare Functionen von z, y, x und als veränderlich betrachten, so stellt die letzte Gleichung eine Ebene dar, von deren Coordinaten t, u, v die Grössen Θ, H, Z vollkommen bestimmte Functionen sind. Hiernach sind also in Gemässheit der 1. Nummer z, y, x und t, u, v, ferner in Gemässheit der 3. Nummer $\frac{1}{z}$, $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ und w, v, u die Coordinaten zweier befreundeten Systeme.

Auf eine gleich einfache Weise ordnen sich Systeme von Punct- und Plan-Coordinaten paarweise zusammen, wenn wir der Gleichung (7) die folgende Form geben:

$$\frac{p}{s} + \frac{Q}{P} \cdot \frac{q}{s} + \frac{R}{P} \cdot \frac{r}{s} + \frac{S}{P} = 0,$$

die, wenn wir der Kürze halber ζ, η, $\mathfrak{H}$ für die Punct-Coordinaten $\frac{p}{s}$, $\frac{q}{s}$, $\frac{r}{s}$ und Z, H, Θ für die Plan-Coordinaten $\frac{S}{P}$, $\frac{R}{P}$, $\frac{Q}{P}$ einsetzen, in die folgende übergeht:

$$\zeta + \Theta\eta + H\mathfrak{H} + Z = 0.$$

Durch diese Gleichung sind die beiden Coordinaten-Systeme ζ, η, $\mathfrak{H}$ und Z, H, Θ gegenseitig durch einander bestimmt. Je zwei solcher Systeme nennen wir befreundete zweiter Art. Befreundete Coordinaten-Systeme zweiter Art sind also, in Gemässheit der Gleichung (4), insbesondere auch die Parallel-Coordinaten z, y, x und die Plan-Coordinaten w, v, u der 3. Nummer.

6. Es liegt uns jetzt zunächst noch ob, unsere zwiefache allgemeine Coordinaten-Bestimmung von einem speciellen Systeme von Punct- oder Plan-Coordinaten unabhängig zu machen. Da nemlich lineare Functionen von z, y, x (oder u, v, w) auch lineare Functionen irgend dreier andern Grössen, die selbst schon lineare Functionen von z, y, x (oder u, v, w) sind, bleiben, wobei bloss die Werthe der Constanten sich ändern; so erhält der Ausdruck lineare Function eine Bedeutung, die von der Annahme eines speciellen Coordinaten-Systems nicht mehr abhängig ist.

Es sei erstens, indem wir wiederum von gewöhnlichen Punct-Coordinaten ausgehen,

$$p' = \pi(z' + ay' + bx' + c),$$

wobei wir p', z', y' und x' auf einen gegebenen Punct beziehen. Betrachten wir diese Grössen als veränderlich, so stellen die Gleichungen:

$$p = 0, \qquad z + ay + bx + c = 0$$

beide dieselbe gegebene Ebene dar. Wenn wir nach dieser Ebene von dem gegebenen Puncte aus und parallel mit der Axe Z eine gerade Linie ziehen, welche diese Ebene in irgend einem Puncte trifft, dessen z wir durch z'' unterscheiden wollen, so kommt:

$$0 = z'' + ay' + bx' + c,$$

und hiernach:

$$p' = \pi(z' - z'').$$

$(z' - z'')$ ist gleich dem, nach der beliebig bestimmten Richtung der Axe Z genommenen Abstand

des gegebenen Punctes von der gegebenen Ebene p.*) Bezeichnen wir den kürzesten Abstand beider durch p_1 und den constanten Winkel, welchen die Ebene p mit der Axe Z bildet, durch φ, und setzen zugleich der Kürze wegen $\frac{\pi}{\sin\varphi} = \pi_1$, so ergibt sich:

$$p' = \pi_1 p_1.$$

Es bedeutet also p' den kürzesten Abstand des gegebenen Punctes von der gegebenen Ebene, multiplicirt mit einem constanten Coefficienten.

Als allgemeine Punct-Coordinaten-Bestimmung erhalten wir hiernach die folgende.

Vier Ebenen werden von Vorne herein beliebig angenommen; dann sind die kürzesten Abstände eines Punctes von diesen vier Ebenen, multiplicirt mit vier beliebigen Constanten, die vier Coordinaten dieses Punctes. Die vier Ebenen selbst werden durch die vier Gleichungen:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0$$

dargestellt. Gehen wir zu den drei Coordinaten des Punctes

$$\frac{p}{s}, \quad \frac{q}{s}, \quad \frac{r}{s}$$

über, so bedeuten diese die Quotienten, welche man erhält, wenn man irgend drei der fraglichen Perpendikel durch das vierte dividirt und dann dem Quotienten einen constanten Coefficienten hinzufügt. Es hängt diese allgemeine Coordinaten-Bestimmung also von 15 Constanten ab; von diesen kommen drei auf die Bestimmung jeder der vier Ebenen und die drei übrigen treten unmittelbar in Evidenz.

Wenn eine der vier linearen Funktionen auf eine Constante sich reducirt, so rückt die bezügliche Ebene unendlich weit, wobei keine Spur von ihrer ursprünglichen Lage übrig bleibt.**) Dann sind die drei Coordinaten des Punctes entweder (wenn s constant und, unbeschadet der Allgemeinheit, der Einheit gleich ist) drei lineare Functionen

$$p, \quad q, \quad r,$$

oder (wenn etwa p der Einheit gleich ist):

$$\frac{1}{s}, \quad \frac{q}{s}, \quad \frac{r}{s},$$

das heisst, die Einheit und zwei lineare Functionen, getheilt durch eine dritte. Dann hängt die Coordinaten-Bestimmung nur von 9 Constanten ab.

---

*) Wenn überhaupt ein geometrischer Ort durch eine Gleichung

$$\lambda = 0,$$

in welcher λ irgend eine beliebige Function von Punct- oder Plan-Coordinaten bedeutet, dargestellt wird, so werden wir denselben, der Kürze wegen, als den „Ort λ“ bezeichnen. Hiernach ist die Ebene p diejenige, welche durch die Gleichung

$$p = 0$$

dargestellt wird.

**) Stellen wir eine Ebene durch folgende Gleichung zwischen gewöhnlichen Parallel-Coordinaten dar:

$$\mu(x + ay + bz) + c = 0,$$

so rückt diese Ebene, parallel mit sich selbst, um so weiter, je kleiner wir μ annehmen, und liegt unendlich weit, wenn μ verschwindet. Indem sich dann der erste Theil ihrer Gleichung auf die Constante c, für welche wir, unbeschadet der Allgemeinheit, auch Eins nehmen können, reducirt, fallen a und b, durch welche die Richtung der Ebene ursprünglich bestimmt war, ganz fort.

Um insbesondere zu dem gewöhnlichen Systeme der Parallel-Coordinaten z, y, x zurückzukehren, können wir in dem vorletzten Falle die drei Coordinaten durch

$$\pi p_1, \quad \varkappa q_1, \quad \rho r_1,$$

ausdrücken, wobei die drei Veränderlichen kürzeste Abstände von den drei Coordinaten-Ebenen XY, XZ, YZ bedeuten, und dann für π, $\varkappa$, ρ die Cosecanten der drei Winkel nehmen, welche diese Ebenen bezüglich mit den Axen Z, Y, X bilden.

7. Es sei zweitens, um zu den Plan-Coordinaten überzugehen:

$$P' = \pi(w' + av' + bu' + c),$$

indem wir P', w', v' und u' auf dieselbe Ebene beziehen. Betrachten wir diese Grössen als veränderlich, so stellen, indem wir die Accente fortlassen, die beiden Gleichungen

$$P = 0, \qquad w + av + bu + c = 0$$

denselben Punct dar. (Für diesen ist nach der 3. Nummer $z = c$, $y = b$, $x = a$.) Wenn wir eine Ebene durch diesen Punct legen, parallel mit der Ebene (w', v', u'), und das derselben entsprechende w durch w'' bezeichnen, so kommt:

$$w'' + av' + bu' + c = 0,$$

und hiernach

$$P' = \pi(w' - w'').$$

Es bedeutet also P' den Abstand der bezüglichen Ebene von dem gegebenen Puncte P, genommen nach der beliebig angenommenen Richtung der Axe Z und multiplicirt mit dem constanten Coefficienten π.

Als allgemeine Plan-Coordinaten-Bestimmung erhalten wir hiernach die folgende.

Vier Puncte werden von Vorne herein beliebig angenommen und überdiess eine constante Richtung. Die Abstände einer Ebene von diesen vier Puncten, genommen nach der constanten Richtung und multiplicirt mit vier constanten Coefficienten, sind die vier Coordinaten der Ebene.

Die vier angenommenen Puncte selbst werden durch die vier Gleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0$$

dargestellt.

Gehen wir zu den drei Coordinaten der Ebene

$$\frac{P}{S}, \quad \frac{Q}{S}, \quad \frac{R}{S}$$

über, so erhält man die geometrische Bedeutung derselben, wenn man drei beliebige der fraglichen Abstände durch den vierten dividirt und dann die drei sich ergebenden Quotienten mit drei constanten Coefficienten multiplicirt. Hier können wir statt der Abstände, die nach der, ein für alle Male bestimmten, Richtung genommen sind, kürzeste Abstände von der jedesmaligen Ebene nehmen. Dann erkennen wir sogleich die 15 nothwendigen Constanten, von welchen die Coordinaten-Bestimmung abhängt, in den viermal drei Constanten, durch welche die vier gegebenen Puncte bestimmt werden, und in den drei unmittelbar hervortretenden constanten Coefficienten.

Wenn der vierte beliebig angenommene Punct nach der Richtung der Axe Z unendlich weit liegt, so reducirt sich S auf eine Constante,*) für welche wir, unbeschadet der Allgemeinheit, Eins

*) Die Gleichung des Punctes (x', y', x') ist in dem zu Grunde gelegten Coordinaten-Systeme

$$w + x'v + y'u + z' = 0.$$

Wenn wir dieselbe durch z' dividiren und dann z', nicht aber zugleich auch y' und x', unendlich gross nehmen, so reducirt sich ihr erster Theil auf eine Constante, auf Eins.

nehmen können. Dann werden die drei Coordinaten der Ebene die drei linearen Functionen:

$$P, \quad Q, \quad R.$$

Diese linearen Functionen können wir hier nicht mehr als kürzeste Abstände von der zu bestimmenden Ebene construiren.

Die möglichst einfachen Coordinaten-Bestimmungen, die wir in der 1. und 3. Nummer gegeben haben, lassen sich durch Particularisation aus der vorstehenden allgemeinen Bestimmung leicht herleiten. Schreiben wir zu diesem Ende an die Stelle von t, u und v, den drei Coordinaten der ersten Nummer, bezüglich $\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}$, so können wir

$$P = t, \quad Q = u, \quad R = v, \quad S = w$$

für die vier Coordinaten nehmen. Da die Gleichung eines Punctes (z', y', x') alsdann die folgende wird:

$$x't + y'u + z'v + w = 0,$$

so ist zuvörderst ersichtlich, dass die Gleichungen

$$t = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

bezüglich diejenigen drei Puncte, die nach der Richtung der drei Axen Z, Y und X des zu Grunde gelegten beliebigen Coordinaten-Systems unendlich weit liegen und den Anfangspunct des Systems darstellen. Das ist also die besondere Lage der in diesem Falle die Coordinaten-Construction vermittelnden vier festen Puncte.

Die vier Coordinaten t, u, v und w haben natürlich auch hier keine absolute Bedeutung. Setzen wir $w = 1$, so kommen wir zur Coordinaten-Bestimmung der 1. Nummer zurück. Setzen wir $t = 1$, so erhalten wir die Coordinaten der 3. Nummer. Wollen wir die vier Coordinaten beibehalten, so können wir der Coordinate w die Bedeutung des kürzesten Abstandes der zu bestimmenden Ebene von dem Anfangspuncte der Coordinaten geben. Dann bedeuten, abgesehen vom Zeichen, t, u, v die Sinus derjenigen Winkel, welche die fragliche Ebene mit den drei Richtungen der beliebig angenommenen Coordinaten-Axen bildet. Dann bedeuten ferner, in Uebereinstimmung mit der 1. Nummer, $\frac{t}{w}, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}$ die reciproken Werthe derjenigen Segmente, welche von den Coordinaten-Axen durch die bezügliche Ebene abgeschnitten werden. Wenn wir w immer positiv nehmen, so müssen wir den drei Sinus t, u, v, einzeln für sich betrachtet, das positive oder negative Zeichen geben, je nachdem die Ebene die drei bezüglichen Axen auf der negativen oder positiven Seite schneidet.

8. Wenn zwei beliebige Systeme von Punct-Coordinaten ξ, η, ζ und ξ_1, η_1, ζ_1 willkührlich angenommen werden, so ist durch drei beliebige Coordinaten-Werthe in jedem der beiden Systeme ein Punct gegeben; wir sagen, dass zwei so bestimmte Puncte sich collinear entsprechen. Die Collineation ist hiernach durch die drei Gleichungen

$$\xi = \xi_1, \quad \eta = \eta_1, \quad \zeta = \zeta_1 \qquad (1)$$

ausgedrückt, in der Art, dass, bei willührlicher Annahme von a, b, c,

$$\{\xi = a, \quad \eta = b, \quad \zeta = c\},$$
$$\{\xi_1 = a, \quad \eta_1 = b, \quad \zeta_1 = c\}$$

zwei sich entsprechende Puncte sind. Die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} g\xi + h\eta + k\zeta + 1 &= 0, \\ g\xi_1 + h\eta_1 + k\zeta_1 + 1 &= 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

welche in den constanten Coefficienten übereinstimmen, stellen zwei Ebenen dar, deren Puncte sich collinear entsprechen, weil alle die unendlich vielen Gruppen von Coordinaten-Werthen, welche eine dieser beiden Gleichungen befriedigen, auch der andern Genüge thun. Wir sagen darum, dass auch die beiden Ebenen selbst, bei willkührlicher Annahme der drei Constanten g, h, k, sich collinear entsprechen.

In gleichem Sinne stehen irgend zwei Flächen, welche bei beliebiger Bestimmung der Function φ durch die beiden Gleichungen

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0, \qquad \varphi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 0$$

dargestellt werden, in der Verwandtschaft der Collineation.

9. Wir können die Collineation auch in dem Systeme der Plan-Coordinaten ausdrücken und aus den Gleichungen (1) andere ableiten, die diesem Systeme angehören. Da nemlich ξ, η, ζ und ξ_1, η_1, ζ_1 lineare Punct-Coordinaten bedeuten, die gegeben und auch als bekannte Functionen von z, y, x zu betrachten sind, so sind die Coordinaten jeder der beiden Ebenen (2) (wir können uns hier beliebiger Plan-Coordinaten und namentlich auch der Coordinaten t, u, v der 1. Nuumer bedienen) lineare Functionen der willkührlichen Grössen g, h, k und, ungekehrt sind auch diese lineare Functionen von jenen. Die Gleichung der ersten Ebene gebe, hiermit in Uebereinstimmung:

$$g = f(t,u,v) = \Theta, \quad h = f_{,}(t,u,v) = H, \quad k = f_{,,}(t,u,v) = Z,$$

und die Gleichung der zweiten:

$$g = F(t,u,v) = \Theta_1, \quad h = F_{,}(t,u,v) = H_1, \quad k = F_{,,}(t,u,v) = Z_1.$$

Dann können wir, unabhängig von den jedesmaligen Werthen von g, h, k, die Collineation der beiden Ebenen (2) durch die nachstehenden Gleichungen ausdrücken:

$$\Theta = \Theta_1, \qquad H = H_1, \qquad Z = Z_1, \qquad (3)$$

wobei Θ, H, Z, so wie Θ_1, H_1, Z_1, bekannte lineare Plan-Coordinaten bedeuten. Es stellen hiernach ferner, wenn wir durch a, b, c irgend drei constante Werthe bezeichnen, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} a\Theta + bH + cZ + 1 &= 0, \\ a\Theta_1 + bH_1 + cZ_1 + 1 &= 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

zwei sich entsprechende Puncte dar, weil dieselben Gruppen von drei Coordinaten-Werthen in den beiden Systemen diese beiden Gleichungen gleichzeitig befriedigen und also die Ebenen, welche durch die beiden Puncte gehen, paarweise genommen, sich collinear entsprechen.

10. Die Collineation hängt von der Annahme der beiden Systeme von Punct-Coordinaten oder der beiden Systeme von Plan-Coordinaten ab. Auf unendlichfache Weise können wir aber die Gleichungen (1) oder (3) mit andern vertauschen und insbesondere eines der jedesmaligen beiden Coordinaten-Systeme ganz willkührlich von Vorne herein annehmen.

Die gewöhnlichen Parallel-Coordinaten x, y, z zum Beispiel sind gebrochene lineare Functionen der allgemeinen Coordinaten ξ, η, ζ. Diese Functionen sind als gegeben zu betrachten, wenn die Bestimmung der Coordinaten ξ, η, ζ, die wir in der 6. Nummer construirt haben, gegeben ist. Setzen wir demnach:

$$x = f(\xi,\eta,\zeta), \qquad y = f_{,}(\xi,\eta,\zeta), \qquad z = f_{,,}(\xi,\eta,\zeta),$$
$$f(\xi_1,\eta_1,\zeta_1) = \xi_2, \quad f_{,}(\xi_1,\eta_1,\zeta_1) = \eta_2, \quad f_{,,}(\xi_1,\eta_1,\zeta_1) = \zeta_2,$$

so sind $\mathfrak{x}_2, \eta_2$ und ζ_2 eben dieselben Functionen von $\mathfrak{x}_1, \eta_1$ und ζ_1 wie x, y, z von $\mathfrak{x}, \eta, \zeta$, und also auch die erstern gegebene Functionen derselben Art von x, y, z. In Folge der Gleichung (1) erhalten wir hiernach:

$$x = \mathfrak{x}_2, \quad y = \eta_2, \quad z = \zeta_2,$$

und diese Gleichungen treten nun an die Stelle der eben genannten, um die Verwandtschaft der Collineation auszudrücken.

Ebenso können wir, wenn wir zu der Plan-Coordinaten-Bestimmung der 1. Nummer zurückgehen, aus den Gleichungen (3) die folgenden ableiten:

$$t = \Theta_2, \quad u = H_2, \quad v = Z_2,$$

wobei Θ_2, H_2 und Z_2 gegebene lineare und gebrochene Functionen von t, u und v bedeuten.

Es hängt nach dem Vorstehenden die Collineation von so vielen Constanten ab, als die Bestimmung der Systeme der allgemeinen Punct- oder Plan-Coordinaten, nemlich von fünfzehn.*)

---

*) Um den Uebergang von der einen zu der andern Bestimmungsweise derselben Collineations-Verwandtschaft noch deutlicher hervorzuheben, füge ich in dieser Note noch einige Ausführungen hinzu.

Die Collineation werde ursprünglich durch die Gleichungen:

$$x = \mathfrak{x}, \quad y = \eta, \quad z = \zeta \tag{1}$$

dargestellt, indem, bei willkührlicher Annahme von 16 Constanten, die sich indess sogleich auf 15 reduciren lassen,

$$\zeta = \frac{az + by + cx + d}{a_3z + b_3y + c_3x + d_3}, \quad \eta = \frac{a_1z + b_1y + c_1x + d_1}{a_3z + b_3y + c_3z + d_3}, \quad \mathfrak{x} = \frac{a_2z + b_2y + c_2x + d_2}{a_3z + b_3y + c_3x + d_3}.$$

Irgend zwei collineare Ebenen werden alsdann bei beliebiger Annahme von g, h, k durch die beiden Gleichungen:

$$gz + hy + kx + 1 = 0, \tag{2}$$
$$g\zeta + h\eta + k\mathfrak{x} + 1 = 0 \tag{3}$$

dargestellt. Entwickeln wir die letzte dieser beiden Gleichungen, so kommt:

$$g(az + by + cx + d) + h(a_1z + b_1y + c_1x + d_1) + k(a_2z + b_2y + c_2x + d_2) + (a_3z + b_3y + c_3x + d_3) = 0,$$

oder, wenn wir folgendermassen ordnen:

$$(ag + a_1h + a_2k + a_3)z + (bg + b_1h + b_2k + b_3)y + (cg + c_1h + c_2k + c_3)x + (dg + d_1h + d_2k + d_3) = 0,$$

und dann

$$\frac{ag + a_1h + a_2k + a_3}{dg + d_1h + d_2k + d_3} = l, \quad \frac{bg + b_1h + b_2k + b_3}{dg + d_1h + d_2k + d_3} = m, \quad \frac{cg + c_1h + c_2k + c_3}{dg + d_1h + d_2k + d_3} = n$$

setzen, schliesslich:

$$lz + my + nx + 1 = 0. \tag{4}$$

Indem wir das Plan-Coordinaten-System der 1. Nummer zu Grunde legen, haben wir hiernach für die beiden collinearen Ebenen (2) und (4):

$$t = g, \quad u = h, \quad v = k,$$
$$t = l, \quad u = m, \quad v = n,$$

wonach wir, weil l, m, n gegebene Functionen von g, h und k sind, die beiden Ebenen gegenseitig durch einander bestimmen können. Hiernach sind also auch g, h, k als bekannt zu betrachtende lineare Functionen von l, m, n, den Coordinaten t, u, v der Ebene des zweiten Systems. Wir wollen diese Functionen durch Θ, H und Z bezeichnen. Setzen wir hiernach die zwiefachen Ausdrücke für g, h, k einander gleich, so erhalten wir die folgenden drei Gleichungen:

$$t = \Theta, \quad u = H, \quad v = Z,$$

welche, um bie Collineation der beiden Systeme auszudrücken, an die Stelle der Gleichungen (1) treten.

11. Indem wir die Collineation durch die Gleichungen (1) der 8. Nummer ausdrücken, werden die Puncte des Raumes doppelt, und gleichsam als zwei verschiedenen Raum-Systemen angehörig betrachtet. Die Puncte des einen Systems entsprechen auf lineare Weise den Puncten des andern, und das eben ist die Definition der Collineation, die hier durch die Gleichungen (1) analystisch ausgedrückt worden ist. Eine nothwendige Folge hiervon ist, dass allen Puncten des neuen Systems, welche in derselben Ebene liegen, solche Puncte des andern Systems entsprechen, welche ebenfalls in derselben Ebene liegen. Es entsprechen sich hiernach auch die beiden Ebenen auf einzige Art. Allen Puncten des einen Systems, die in einer geraden Linie, dem Durchschnitte zweier Ebenen, liegen, entsprechen solche Puncte des zweiten Systems, die gleichzeitig in den beiden entsprechenden Ebenen, also ebenfalls in derselben geraden Linie liegen. Es entsprechen sich hiernach auch die beiden geraden Linien.

Indem wir die Collineation durch die Gleichungen (3) ausdrücken, werden die durch den Raum gelegten Ebenen ihrerseits ursprünglich doppelt, und gleichsam als zwei verschiedenen Raum-Systemen angehörig betrachtet. Die Ebenen der beiden Systeme entsprechen einander auf lineare Weise, und das eben ist hier die, durch jene Gleichungen analytisch ausgedrückte, Definition der Collineation. Eine nothwendige Folge hieraus ist, dass allen Ebenen des einen Systems, welche durch denselben Punct gehen, solche Ebenen des andern Systems entsprechen, welche ebenfalls durch denselben Punct gehen; wonach auch die beiden Puncte sich auf einzige Weise entsprechen. Allen Ebenen des einen Systems, die in einer geraden Linie, der Verbindungslinie zweier Puncte, sich schneiden, entsprechen solche Ebenen des zweiten Systems, die gleichzeitig durch die beiden entsprechenden Puncte, also ebenfalls durch dieselbe, jene beiden Puncte verbindende, gerade Linie gehen. Es entsprechen sich hiernach auch die beiden geraden Linien.

12. Wenn wir ein Punct-Coordinaten-System $\mathfrak{x}, \eta, \zeta$ und ein Plan-Coordinaten-System Θ, H, Z beliebig annehmen, so ist durch irgend drei constante Coordinaten-Werthe in dem ersten Systeme ein Punct und in dem zweiten Systeme eine Ebene gegeben: wir sagen, dass Punct und Ebene sich reciprok entsprechen. Die Reciprocität hängt hiernach von der willkührlichen Annahme der beiden Coordinaten-Systeme ab und wird durch die folgenden drei Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = \Theta_1, \quad \eta = H_1, \quad \zeta = Z_1, \tag{1}$$

ausgedrückt, in der Art, dass

$$\left.\begin{array}{llll} \mathfrak{x} = a, & \eta = b, & \zeta = c \\ \Theta_1 = a, & H_1 = b, & Z_1 = c \end{array}\right\},$$

ein Punct des ersten und eine Ebene des zweiten Systemes sind, welche einander reciprok entsprechen. Durch die beiden Gleichungen:

$$g\mathfrak{x} + h\eta + k\zeta + 1 = 0, \tag{2}$$

$$g\Theta_1 + hH_1 + kZ_1 + 1 = 0 \tag{3}$$

sind, bei willkührlicher Annahme von g, h, k, eine Ebene des ersten und ein Punct des zweiten Systems gegeben, von denen wir ebenfalls sagen, dass sie sich reciprok entsprechen, weil jedem Puncte, der in jener Ebene liegt, eine Ebene entspricht, die durch diesen Punct geht. g, h, k können wir einerseits als Coordinaten der Ebene (2) des ersten Systems construiren und, dem entsprechend, durch Θ, H, Z bezeichnen, dann aber andrerseits als Coordinaten des Punctes (3) des zweiten Systems construiren und, dem entsprechend, durch $\mathfrak{x}_1, \eta_1, \zeta_1$ bezeichnen. Die Reciprocität zwischen Ebenen des ersten und Puncten des zweiten Systems wird hiernach durch die drei Gleichungen:

$$\Theta = \mathfrak{x}_1, \quad H = \eta_1, \quad Z = \zeta_1 \tag{4}$$

ausgedrückt, in der Art, dass wiederum, bei willkührlicher Annahme von a, b, c,

$$\left\{\Theta = a, \quad H = b, \quad Z = c\right\},$$
$$\left\{\vartheta_1 = a, \quad \eta_1 = b, \quad \zeta_1 = c\right\}$$

eine Ebene und ein Punct sind, die sich entsprechen. Und ebenso stellen wiederum, bei willkührlicher Annahme von g, h, k, die beiden Gleichungen:

$$g\Theta + hH + kZ + 1 = 0,$$
$$g\vartheta_1 + h\eta_1 + k\zeta_1 + 1 = 0$$

einen Punct des ersten und eine Ebene des zweiten Systems dar, die sich reciprok entsprechen.

Um die Reciprocität der beiden Systeme vollständig auszudrücken, können wir uns sowohl der Gleichungen (1) als auch der Gleichungen (4) bedienen, und unbeschadet der Allgemeinheit, der Einfachheit wegen, einerseits, gewöhnliche Parallel-Coordinaten x, y, z an die Stelle von ϑ, η, ζ und, andrerseits, etwa die Plan-Coordinaten der 1. Nummer t, u, v an die Stelle von Θ, H, Z setzen, und dann $\vartheta_1, \eta_1, \zeta_1$ als lineare Functionen von x, y, z und Θ_1, H_1, Z_1 als lineare Functionen von t, u, v darstellen. Zugleich sehen wir hieraus, dass die Verwandtschaft der Reciprocität gerade so, wie die Verwandtschaft der Collineation, von fünfzehn Constanten abhängig ist.

13. Es gibt noch eine andere Art, die Reciprocität zweier Systeme auszudrücken, und zwar können wir hierbei uns sowohl bloss der Punct-Coordinaten als auch bloss der Plan-Coordinaten bedienen.

Wir wollen wiederum von den Gleichungen (1) der vorigen Nummer:

$$\vartheta = \Theta_1, \quad \eta = H_1, \quad \zeta = Z_1, \tag{1}$$

durch welche die Reciprocität zweier Systeme ausgedrückt wird, ausgehen. Diejenige Ebene des zweiten Systems, deren Coordinaten Θ_1, H_1 und Z_1 sind, können wir auch durch eine lineare Gleichung zwischen beliebigen Punct-Coordinaten darstellen; wir wollen dafür die folgende nehmen:

$$gz + hy + kx + 1 = 0. \tag{5}$$

Die Coordinaten Θ_1, H_1 und Z_1 sind bekannte lineare Functionen von g, h, k (die wir als Coordinaten dieser Ebene, wie wir sie in der 1. Nummer bestimmt haben, betrachten können) und, umgekehrt, auch diese von jenen. Es sei demnach:

$$g = f(\Theta_1, H_1, Z_1), \quad h = f_{,}(\Theta_1, H_1, Z_1), \quad k = f_{,,}(\Theta_1, H_1, Z_1),$$

dann ist in Folge der Gleichungen (1):

$$g = f(\vartheta, \eta, \zeta) = \vartheta_0, \quad h = f_{,}(\vartheta, \eta, \zeta) = \eta_0, \quad k = f_{,,}(\vartheta, \eta, \zeta) = \zeta_0,$$

indem wir, der Kürze wegen, ϑ_0, η_0, ζ_0, als neue Coordinaten für Puncte des ersten Systems einführen. Es sind dieselben nicht nur als lineare (gebrochene) Functionen von ϑ, η, ζ, sondern auch von den, diesen Coordinaten entsprechenden, Werthen von z, y und x anzusehen. Setzen wir diese Werthe von g, h, k in die Gleichung (5), so kommt:

$$\vartheta_0 z + \eta_0 y + \zeta_0 x + 1 = 0. \tag{6}$$

Diese Gleichung stellt also diejenige Ebene des zweiten Systemes dar, welche einem Puncte des ersten entspricht, dessen gegebene Coordinaten-Werthe ϑ_0, η_0 und ζ_0 sind. Wenn wir die Voraussetzung machen, dass diese Ebene durch einen gegebenen Punct (z′, y′, x′) des zweiten Systemes gehen soll, so erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichung zwischen den Punct-Coordinaten ϑ_0, η_0, ζ_0:

$$z'\vartheta_0 + y'\eta_0 + x'\zeta_0 + 1 = 0.$$

Betrachten wir diese Coordinaten als veränderlich, so stellt die vorstehende Gleichung eine Ebene dar, welche alle Puncte enthält, denen im zweiten Systeme solche Ebenen entsprechen, die sämmtlich durch den Punct (z', y', x') gehen. Diesem gegebenen willkührlichen Puncte des zweiten Systems entspricht also, im ersten Systeme, die durch die letzte Gleichung dargestellte Ebene.

Eine und dieselbe Gleichung (6) stellt also, einerseits, wenn wir den Punct-Coordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 diejenigen constanten Werthe geben, welche einem gegebenen Puncte des ersten Systems zukommen, und dann z, y, x als veränderlich betrachten, die diesem Puncte, in dem zweiten Systeme, entsprechende Ebene dar; und, andrerseits, wenn wir für z, y und x diejenigen constanten Werthe einsetzen, welche sich auf einen gegebenen Punct des zweiten Systems beziehen, und dann die Punct Coordinaten ξ_0, η_0 und ζ_0 als veränderlich betrachten, diejenige Ebene, welche, im ersten Systeme, dem gegebenen Puncte des zweiten entspricht.

14. Ganz auf gleiche Weise können wir der Reciprocität auch eine Gleichung zwischen Plan-Coordinaten zu Grunde legen.

Zu diesem Ende stellen wir den Punct (ξ, η, ζ) des ersten Systems durch folgende Gleichung in gewöhnlichen Plan-Coordinaten dar:

$$at + bu + cv + 1 = 0. \tag{7}$$

Dann sind a, b, c die Parallel-Coordinaten des fraglichen Punctes und, als solche, lineare Functionen von ξ, η, ζ. Es sei demnach:

$$a = F(\xi, \eta, \zeta), \qquad b = F_{,}(\xi, \eta, \zeta), \qquad c = F_{,,}(\xi, \eta, \zeta);$$

mithin ist auch:

$$a = F(\Theta_1, H_1, Z_1) = \Theta_0, \quad b = F_{,}(\Theta_1, H_1, Z_1) = H_0, \quad c = F_{,,}(\Theta_1, H_1, Z_1) = Z_0,$$

indem wir zugleich, der Kürze wegen, Θ_0, H_0, Z_0 als neue Plan-Coordinaten einführen. Die Gleichung (7) geht hiernach in die folgende über:

$$\Theta_0 t + H_0 u + Z_0 v + 1 = 0, \tag{8}$$

in der wir Θ_0, H_0, Z_0 auch als gegebene Functionen derjenigen Werthe von t, u, v, die der Ebene (Θ_1, H_1, Z_1) des zweiten Systems zugehören, betrachten können.

Die vorstehende Gleichung (8) stellt, einerseits, wenn wir Θ_0, H_0, Z_0 auf irgend eine gegebene Ebene des zweiten Systems beziehen und also constant nehmen, während wir t, u, v als veränderlich betrachten, denjenigen Punct dar, welcher, im ersten Systeme, der gegebenen Ebene entspricht; und, andrerseits, wenn wir t, u, v auf eine gegebene Ebene des ersten Systems beziehen und also constant nehmen, während wir Θ_0, H_0, Z_0 als veränderlich betrachten, denjenigen Punct, welcher, im zweiten Systeme, der gegebenen Ebene entspricht.

15. Bei der Reciprocität zweier Raum-Systeme entsprechen die Puncte des ersten und die Ebenen des zweiten einander auf einzige Weise, was durch die Gleichungen (1) der 12. Nummer ausgedrückt wird. Eine nothwendige Folge hiervon ist, dass auch die Puncte des zweiten und die Ebenen des ersten Systems einander auf einzige Weise entsprechen, was durch die Gleichungen (4) derselben Nummer ausgedrückt wird. Punct und Ebene, die einander entsprechen, werden Pol und Polar-Ebene genannt. Von zwei sich entsprechenden geraden Linien verbindet eine zwei Puncte in dem einen Systeme, während die andere die Durchschnittslinie der entsprechenden Polar-Ebenen in dem andern Systeme ist, oder die eine derselben ist die Durchschnittslinie zweier Ebenen des einen Systems, während die andere die Pole der beiden Ebenen in dem andern Systeme verbindet; solche gerade Linien heissen zugeordnete Polaren.

Jeder Punct hat, indem er nach einander als jedem der beiden Systeme angehörig betrachtet wird, zwei verschiedene Polar-Ebenen, und jede Ebene ebenso zwei verschiedene Pole. Hieraus folgt denn, dass in demselben Sinne auch jede gegebene gerade Linie zwei verschiedene Polaren hat.

Wenn insbesondere die drei Gleichungen (1)

$$\mathfrak{x} = \Theta_1, \qquad \eta = H_1, \qquad \zeta = Z_1$$

mit den drei Gleichungen (4)

$$\mathfrak{x}_1 = \Theta, \qquad \eta_1 = H, \qquad \zeta_1 = Z$$

identisch werden, so fällt die zwiefache Polar-Bestimmung in eine zusammen; dann hat jeder Punct nur eine Polar-Ebene, jede Ebene nur einen Pol, jede gerade Linie nur eine Polare. Um diesen Fall zu discutiren, ist es einfacher, eine der beiden Gleichungen (6) und (8) zu Grunde zu legen. Nehmen wir zu diesem Ende die erstere, so können wir, der grössten Allgemeinheit entsprechend,

$$\zeta_0 = \frac{az_1+by_1+cx_1+d}{a_3z_1+b_3y_1+c_3x_1+d_3}, \quad \eta_0 = \frac{a_1z_1+b_1y_1+c_1x_1+d_1}{a_3z_1+b_3y_1+c_3x_1+d_3}, \quad \mathfrak{x}_0 = \frac{a_2z_1+b_2y_1+c_2x_1+d_2}{a_3z_1+b_3y_1+c_3x_1+d_3}$$

setzen. In Gemässheit der 13. Nummer stellt dann die resultirende Gleichung:

$$(az_1+by_1+cx_1+d)z+(a_1z_1+b_1y_1+c_1x_1+d_1)y+(a_2z_1+b_2y_1+c_2x_1+d_2)x \\ +(a_3z_1+b_3y_1+c_3x_1+d_3)=0,$$

wenn wir z_1, y_1, x_1 (Coordinaten der Puncte des ersten Systems, die wir, um sie von den Coordinaten der Puncte des zweiten Systems zu unterscheiden, numerirt haben) constant und z, y, x als veränderlich betrachten, die Polar-Ebene des Punctes (z_1, y_1, x_1) in dem zweiten Systeme, und wenn wir, umgekehrt, z, y, x als constant und z_1, y_1, x_1 als veränderlich betrachten, die Polar-Ebene des Punctes (z, y, x) in dem ersten Systeme dar. Soll diese Polar-Bestimmung in beiden Voraussetzungen dieselbe sein, so ist nothwendig und hinreichend, dass die vorstehende Gleichung in Beziehung auf z_1, y_1, x_1 und z, y, x symmetrisch ist. Diess fordert:

$$\begin{aligned} a_3 &= d, & b_3 &= d_1, & c_3 &= d_2, \\ a_1 &= b, & a_2 &= c, & b_2 &= c_1, \end{aligned} \tag{9}$$

wonach die Grund-Gleichung der Reciprocität sich in die folgende particularisirt:

$$(az_1+by_1+cx_1+d)z+(bz_1+b_1y_1+c_1x_1+d_1)y+(cz_1+c_1y_1+c_2x_1+d_2)x \\ +(dz_1+d_1y_1+d_2x_1+d_3)=0,$$

in welcher wir, ohne dass dieselbe sich ändert, z, y, x mit z_1, y_1, x_1 gegenseitig vertauschen können:

$$(az+by+cx+d)z_1+(bz+b_1y+c_1x+d_1)y_1+(cz+c_1y+c_2x+d_2)x_1+(dz+d_1y+d_2x+d_3)=0.$$

In Folge der Bedingungs-Gleichungen kommt:

$$\zeta_0 = \frac{az_1+by_1+cx_1+d}{dz_1+d_1y_1+d_2x_1+d_3}, \quad \eta_0 = \frac{bz_1+b_1y_1+c_1x_1+d_1}{dz_1+d_1y_1+d_2x_1+d_3}, \quad \mathfrak{x}_0 = \frac{cz_1+c_1y_1+c_2x_1+d_2}{dz_1+d_1y_1+d_2x_1+d_3} \tag{10}$$

und wir überzeugen uns leicht, dass auch umgekehrt z_1, y_1, x_1 durch $\zeta_0, \eta_0, \mathfrak{x}_0$ vermittelst linearer Functionen von derselben particulären Form sich ausdrücken lassen. *)

---

*) Wir können die fragliche Particularisation der linearen Abhängigkeit, welche zwischen den Coordinaten $\mathfrak{x}_0, \eta_0, \zeta_0$ und $\mathfrak{x}, \eta, \zeta$ zweier verschiedenen Coordinaten-Systeme besteht, leicht auf ihren analytischen Ursprung zurückführen und dadurch genauer characterisiren. Wir wollen zu diesem Ende die allgemeinste Coordinaten-Bestimmung zu Grunde legen, indem wir

Wenn wir die Reciprocität der beiden Systeme für den in Rede stehenden Fall durch die Gleichungen

$$x_1 = \Theta_1, \quad y_1 = H_1, \quad z_1 = Z_1$$

ausdrücken wollen, so bleiben auch Θ_1, H_1, Z_1 nicht mehr beliebig anzunehmende Plan-Coordinaten. Es sind nach der 13. Nummer (wo wir bloss in den Gleichungen (1) z_1, y_1, x_1 statt $\mathfrak{z}, \eta, \zeta$ schreiben und in der Gleichung (5) g, h, k als Plan-Coordinaten t, u, v bezeichnen), wenn

$$\mathfrak{z}_0 z + \eta_0 y + \zeta_0 x + 1 = 0$$

die Grund-Gleichung derselben Reciprocität ist, t, u, v dieselben Functionen von Θ_1, H_1, Z_1, als $\mathfrak{z}_0, \eta_0, \zeta_0$ von z_1, y_1, x_1, und folglich sind, nach der vorstehenden Bemerkung, auch umgekehrt Θ_1, H_1, Z_1 Functionen derselben Form von t, u, v. Es ist aus dem vorstehenden Entwicklungsgange sogleich ersichtlich, dass wir hierbei die beiden Coordinaten-Systeme z, y, x und t, u, v mit irgend zwei andern, die wir in der 5. Nummer befreundete genannt haben, vertauschen können.

Unter den gemachten Beschränkungen hängt die Reciprocität der beiden Systeme von sechs Constanten weniger ab, als im allgemeinen Falle. So viele Constanten bestimmen die Lage eines Systems im Raume, und hiermit in Uebereinstimmung hat Herr Magnus *) gezeigt, dass, durch eine schickliche Lagen-Aenderung eines der beiden Systeme gegen das andere, der allgemeine Fall der Reciprocität in den besondern übergeht.

Später, nach der Discussion der Flächen, die durch Gleichungen des zweiten Grades in Punct- und Plan-Coordinaten dargestellt werden, wollen wir in einem besondern Paragraphen auf die Reciprocität der Raumgebilde zurückkommen.

$$\mathfrak{z}_0 = \frac{p_0}{s_0}, \quad \eta_0 = \frac{q_0}{s_0}, \quad \zeta_0 = \frac{r_0}{s_0}, \quad \mathfrak{z} = \frac{p}{s}, \quad \eta = \frac{q}{s}, \quad \zeta = \frac{r}{s}$$

setzen, und dann die allgemeine homogene Function des zweiten Grades von p, q, r, s durch π bezeichnen. Setzen wir in dieser Voraussetzung

$$p_0 = \frac{d\pi}{dp}, \quad q_0 = \frac{d\pi}{dq}, \quad r_0 = \frac{d\pi}{dr} \quad s_0 = \frac{d\pi}{ds},$$

so besteht zwischen $\mathfrak{z}_0, \eta_0, \zeta_0$ und $\mathfrak{z}, \eta, \zeta$ die fragliche Art der Abhängigkeit. Um insbesondere zu den Gleichungen (10) zurückzukommen, brauchen wir bloss

$$\pi \equiv ap^2 + 2bpq + 2cpr + 2dps + b_1q^2 + 2c_1qr + 2d_1qs + c_2r^2 + 2d_2rs + d_3s^2$$

zu setzen, und dann $\mathfrak{z}, \eta, \zeta$ bezüglich mit z_1, y_1, x_1 zu vertauschen.

Als allgemeine Grund-Gleichung derjenigen Reciprocität, bei welcher jedem gegebenen Puncte nur eine einzige Polar-Ebene entspricht, können wir hiernach die folgende nehmen:

$$\frac{d\pi}{dp} \cdot p_0 + \frac{d\pi}{dq} \cdot q_0 + \frac{d\pi}{dr} \cdot r_0 + \frac{d\pi}{ds} \cdot s_0 = 0,$$

die mit der folgenden, in welcher wir die partiellen Differential-Coefficienten auf den Punct (p_0, q_0, r_0, s_0) beziehen und zur Unterscheidung umklammern:

$$\left(\frac{d\pi}{dp}\right)p + \left(\frac{d\pi}{dq}\right)q + \left(\frac{d\pi}{dr}\right)r + \left(\frac{d\pi}{ds}\right)s = 0$$

identisch ist.

*) Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der Geometrie des Raumes. Erste Abtheilung. Berlin 1837. §. 25.

§. 2.

Darstellung der Flächen in der doppelten Coordinaten-Bestimmung. Uebergang von einer Darstellungsweise zur andern. Analytische Theorie des Contactes. Curven doppelter Krümmung; Abwickelungsflächen. Gleichzeitige Beschreibung beider durch eine gerade Linie. Erste und zweite Krümmung. Conische Krümmung.

16. Indem wir durch ξ, η, ζ allgemeine Punct-Coordinaten bezeichnen, stellt

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

eine Fläche dar, welche wir eine algebraische nennen, wenn die durch F angezeigte Function eine algebraische ist. Der Grad der Gleichung, welcher derselbe bleibt für jede andere Wahl der zu Grunde gelegten linearen Coordinaten, bestimmt die Ordnung der Fläche. Die vorstehende Gleichung geht, wenn wir für ξ, η, ζ die Ausdrücke $\frac{p}{s}, \frac{q}{s}, \frac{r}{s}$ einführen, sogleich in eine homogene Gleichung desselben Grades zwischen vier ganzen und linearen Functionen über. Wir wollen diese homogene Gleichung folgendergestalt schreiben:

$$\pi(p, q, r, s) = 0.$$

Eine Gleichung zwischen zwei der drei allgemeinen Coordinaten, etwa die Gleichung:

$$F(\xi, \eta) = 0,$$

welche in eine homogene Gleichung zwischen drei linearen und ganzen Functionen:

$$\pi(p, q, s) = 0$$

unmittelber übergeht, stellt eine Kegelfläche dar. Denn solche Puncte, für welche ξ und η gegebene Werthe α und β haben, liegen zugleich auf den beiden Ebenen:

$$p = \alpha s, \qquad q = \beta s,$$

also in einer durch den Durchschnittspunct der drei Ebenen p, q und s gehenden geraden Linie, welche, wenn die, die Gleichung der Fläche befriedigenden, Werthe von ξ und η sich continuirlich ändern, um diesen Punct sich dreht und so die fragliche Kegelfläche beschreibt. Wenn insbesondere ξ und η lineare und ganze Functionen sind, so liegt, zugleich mit der Ebene s, die Spitze des Kegels unendlich weit. Er ist in einen Cylinder, dessen Seiten der Durchschnittslinie der Ebenen p und q parallel sind, übergegangen.

Wenn aus der allgemeinen Gleichung der Fläche zwei der drei Coordinaten ausfallen, wonach:

$$F(\xi) = 0, \qquad \pi(p, s) = 0,$$

so stellt sie nur noch ein System von Ebenen dar, welche alle durch die Durchschnittslinie der beiden Ebenen p und s gehen und deren Anzahl durch den Grad der Gleichung bestimmt wird. Alle Ebenen werden parallel mit der Ebene p, wenn dadurch, dass die Ebene s unendlich weit rückt, sich ξ auf eine ganze und lineare Function reducirt.

17. Wenn wir die Gleichungen zweier Flächen:

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0, \qquad F_1(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

zusammenstellen, so werden beide zugleich nur durch die Coordinaten-Werthe solcher Puncte befriedigt, welche zugleich auf beiden Flächen liegen. Das System solcher zwei Gleichungen stellt die Durchschnitts-Curve der beiden bezüglichen Flächen dar.

Eliminiren wir zwischen den beiden vorstehenden Gleichungen eine der drei Coordinaten, etwa ζ, so kommt:

$$\varphi(\xi, \eta) = 0.$$

Diese Gleichung stellt einen Kegel dar, welcher ebenfalls durch die Durchschnitts-Curve der beiden Flächen geht, und dessen Spitze in den Durchschnittspunct der drei Ebenen p, q, s fällt. Wenn die beiden gegebenen Gleichungen die allgemeinen des g. und h. Grades sind, so ist die vorstehende, in Gemässheit der Theorie der Elimination, vom gh. Grade. Da endlich die Coordinaten-Bestimmung von Vorne herein beliebig angenommen worden ist, so folgt, dass eine Kegelfläche, welche einen gegebenen Punct zum Mittelpuncte hat und durch die Durchschnitts-Curve zweier gegebenen Flächen der g. und h. Ordnung geht, im Allgemeinen, von der gh. Ordnung ist. Wenn ξ und η lineare und ganze Functionen bedeuten, so liegt mit der Ebene s auch die Spitze des Kegels unendlich weit, es ist derselbe in einen Cylinder, dessen Seiten der Durchschnittslinie der Ebenen p und q parallel sind, übergegangen. Hiernach ist also auch die Projection der Durchschnitts-Curve der beiden Flächen g. und h. Ordnung auf eine beliebige Ebene eine Curve der gh. Ordnung.

Wenn insbesondere eine der beiden zusammengestellten Flächen in eine Ebene übergeht, so ist also die Durchschnitts-Curve dieser Ebene mit der andern Fläche von gleicher Ordnung.

18. Wenn wir die Gleichungen dreier Flächen:

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0, \qquad F_1(\xi, \eta, \zeta) = 0, \qquad F_2(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

zusammenstellen, so wird durch ihr gleichzeitiges Bestehen nur eine endliche Anzahl von Puncten dargestellt, weil nur eine bestimmte Anzahl von Gruppen dreier Coordinaten diese drei Gleichungen zugleich befriedigen; und zwar beträgt diese Anzahl, wenn die drei Gleichungen von dem g., h. und k. Grade sind, in Gemässheit eines bekannten algebraischen Satzes, im Allgemeinen ghk. In so viel Puncten schneiden sich also drei Flächen der g., h. und k. Ordnung.

Wenn insbesondere die beiden letzten Flächen in Ebenen übergehen, so sind die fraglichen Durchschnitte diejenigen Puncte, in welchen die erste Fläche von der Durchschnittslinie der beiden Ebenen, die, wie diese Ebenen selbst, als willkührlich angenommen zu betrachten ist, geschnitten wird. Dann beträgt die Anzahl der Durchschnittspuncte g, so dass wir hiernach eine Fläche der g. Ordnung als eine solche definiren können, die von einer beliebigen geraden Linie in g Puncten geschnitten wird. Es ist diese Definition anders nichts, als eine geometrische Ausdrucksweise dafür, dass eine solche Fläche durch eine Gleichung des g. Grades in linearen Punct-Coordinaten ausgedrückt wird; und jeder Versuch sie, als rein geometrisch, selbstständig für sich hinzustellen, muss ihr nothwendig alle Basis nehmen.

19. Indem wir durch Θ, H, Z allgemeine Plan-Coordinaten bezeichnen, stellt die Gleichung:

$$F(\Theta, H, Z) = 0$$

eine Fläche dar, die, statt wie früher durch ihre Puncte, nun durch ihre Tangential-Ebenen bestimmt wird. Der Grad der Gleichung bestimmt die Classe der Fläche. Ein Punct ist eine Fläche der ersten Classe. Wenn wir für Θ, H, Z die Ausdrücke $\frac{P}{S}, \frac{Q}{S}, \frac{R}{S}$ einführen, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung sogleich in eine homogene Gleichung zwischen vier ganzen linearen Functionen; es sei dieselbe:

$$\pi(P, Q, P, S) = 0.$$

Eine Gleichung zwischen zwei der drei Coordinaten

$$F(\Theta, H) = 0$$

oder die entsprechende homogene Gleichung zwischen drei der vier ganzen linearen Functionen:

$$\Pi(P,Q,S) = 0$$

stellt eine ebene Curve dar. Denn sind α und β zwei die vorstehende Gleichung befriedigende Werthe von Θ und H, so ist durch dieselben eine Ebene nur in so weit bestimmt, als sie durch diejenigen beiden Puncte gehen muss, deren Gleichungen die folgenden sind:

$$P = \alpha S, \qquad Q = \beta S,$$

und die mithin, bezüglich, auf zwei geraden Linien liegen, welche die Puncte P und Q mit dem Puncte S verbinden. Es ist also die fragliche Ebene eine solche, welche durch eine bestimmte, in der Ebene der drei Puncte P, Q, S liegende, gerade Linie geht und um diese Linie beliebig sich drehen kann. Diese Linie bewegt sich nach einem bestimmten Gesetze fort, wenn die Coordinaten-Werthe von Θ und H, indem sie fortwährend die vorstehende Gleichung befriedigen, continuirlich sich ändern, und umhüllt auf diese Weise eine ebene Curve, an welche zugleich auch alle durch diese Linie, in einer ihrer beliebigen Lagen, gelegten Ebenen berührend sich anlehnen, dem analog, wie alle Puncte, die auf derselben Seite einer Kegelfläche liegen, auch dieser Kegelfläche angehören.

Wenn aus der allgemeinen Gleichung zwei der drei Coordinaten ausfallen, wonach:

$$F(\Theta) = 0, \qquad \Pi(P,S) = 0,$$

so stellt sie nur noch eine Reihe von Puncten dar, welche alle mit den festen Puncten P und S in gerader Linie liegen und deren Anzahl durch den Grad der Gleichung bestimmt wird.

20. Wenn wir die Gleichungen zweier Flächen in Plan-Coordinaten:

$$F(\Theta,H,Z) = 0, \qquad F_1(\Theta,H,Z) = 0,$$

zusammenstellen, so muss eine Ebene, deren Coordinaten gleichzeitig beide Gleichungen befriedigen sollen, auch gleichzeitig beide Flächen berühren. Eine solche Ebene kann von einer Lage in eine benachbarte nur auf einzige Weise gelangen, in ähnlicher Weise wie der, eine Curve im Raume beschreibende, Punct nur auf einzige Weise in eine benachbarte Lage fortrücken kann. Es umhüllt dieselbe eine Fläche von besonderer Art, die wir Abwickelungsfläche nennen und von der wir sagen, dass sie durch das System der beiden vorstehenden Gleichungen dargestellt werde.

Wenn wir zwischen diesen Gleichungen, von denen wir annehmen wollen, dass sie die allgemeinen des g. und h. Grades seien, eine der drei Veränderlichen, etwa Z eliminiren, so ist die resultirende Gleichung:

$$\varphi(\Theta,H) = 0,$$

vom gh. Grade und stellt eine ebene Curve derselben Classe dar, welche von allen gemeinschaftlichen Tangential-Ebenen der beiden Flächen berührt wird, oder mit andern Worten, die Gleichung der Durchschnitts-Curve der Abwickelungsfläche mit derjenigen Ebene, welche die drei Puncte P, Q, S enthält. Da das Coordinaten-System ein durchaus willkührliches ist und mit jedem andern vertauscht werden kann, ohne dass dadurch die Form der vorstehenden Gleichungen sich ändert, so folgt, dass diejenige Abwickelungsfläche, welche zwei gegebenen Flächen der g. und h. Classe umschrieben ist, von einer beliebigen Ebene im Allgemeinen in einer Curve der gh. Classe geschnitten wird. Reducirt sich die Classe einer Fläche auf die erste, das heisst geht die Fläche selbst in einen beliebigen Punct über, so particularisirt sich die Abwickelungsfläche in einen Kegel, der diesen Punct zum Mittelpuncte hat, und weiter noch in einen Cylinder, wenn der Mittelpunct nach gegebener Richtung unendlich weit rückt. Es wird also auch irgend ein beliebiger, einer Fläche umschriebener, Kegel oder Cylinder von einer beliebigen Ebene in einer solchen Curve geschnitten, deren Classe die Classe der Fläche selbst ist.

21. Die Gleichungen dreier Flächen:

$$F(\Theta,H,Z)=0, \qquad F_{,}(\Theta,H,Z)=0, \qquad F_{,,}(\Theta,H,Z)=0,$$

werden gleichzeitig nur durch die Coordinaten derjenigen Ebenen befriedigt, welche alle drei Flächen zugleich berühren. Die Anzahl der in diesem Sinne durch das System dieser drei Gleichungen dargestellten Ebene beträgt, wenn die drei Flächen die allgemeinen der g., h. und k. Classe sind, ghk. Wenn wir insbesondere h und k der Einheit gleichsetzen und demnach die beiden letzten Flächen in Puncte sich verwandeln, so gehen alle fraglichen Ebenen durch diese beiden Puncte und ihre Anzahl beträgt g, so dass also an eine gegebene Fläche durch eine gegebene gerade Linie sich im Allgemeinen so viele Tangential-Ebenen legen lassen, als die Zahl, welche die Classe der Fläche angibt, Einheiten enthält. Eben so gross ist die Anzahl derjenigen Tangential-Ebenen, welche sich, parallel mit einer gegebenen Ebene (das heisst, durch eine in dieser Ebene unendlich weit liegende gerade Linie), an die gegebene Fläche legen lassen.

22. Eine Fläche wird, je nachdem sie durch eine Gleichung zwischen Punct-Coordinaten oder durch eine Gleichung zwischen Plan-Coordinaten dargestellt wird, durch ihre Puncte oder ihre Tangential-Ebenen bestimmt. Im ersten Falle tritt uns die Aufgabe entgegen, in einem gegebenen Puncte der Fläche die Tangential-Ebene, im zweiten Falle die Aufgabe, auf einer gegebenen Tangential-Ebene den Berührungspunct zu bestimmen. Wie in den Constructionen der Ebene, so gibt auch hier die Interpretation des bekannten Theorems über die homogenen Functionen, in beiden bezeichneten Fällen, eine unmittelbare und vollständige Lösung der Aufgabe: eine allgemeine Theorie des Contactes erster Ordnung.

Wenn wir nemlich durch

$$\Pi = 0 \tag{1}$$

eine homogene Function irgend eines n. Grades zwischen beliebig vielen linearen Functionen $p, q, r, s..$ darstellen, so ist nach dem genannten Theorem:

$$\frac{d\Pi}{dp}.p+\frac{d\Pi}{dq}.q+\frac{d\Pi}{dr}.r+\frac{d\Pi}{ds}.s+..\equiv n\Pi. \tag{2}$$

Durch die Gleichung (1) wird, wenn wir den Grössen $p, q, r, s..$ die Bedeutung linearer Punct-Coordinaten geben, eine Fläche der n. Ordnung dargestellt. Bilden wir ferner die folgende Gleichung

$$\left(\frac{d\Pi}{dp}\right)p+\left(\frac{d\Pi}{dq}\right)q+\left(\frac{d\Pi}{dr}\right)r+\left(\frac{d\Pi}{ds}\right)s+..=0, \tag{3}$$

in welcher wir die partiellen Differential-Coefficienten auf einen gegebenen Punct der Fläche, für welchen

$$p=p', \qquad q=q', \qquad r=r', \qquad s=s', \ldots$$

beziehen und zur Unterscheidung einklammern, so stellt diese Gleichung die Tangential-Ebene in dem gegebenen Puncte der Fläche dar.

Denn erstlich stellt diese Gleichung, weil sie vom ersten Grade ist, eine Ebene dar. Für den gegebenen Punct besteht ferner die Gleichung der Fläche, auf welcher er liegt, und in Folge der identischen Gleichung (2) auch die fragliche Gleichung (3), wenn wir den veränderlichen Grössen die besondern Werthe $p', q', r', s'..$ geben; es geht also die bezügliche Ebene durch den gegebenen Punct der Fläche. Wenn wir endlich einerseits auf der gegebenen Fläche (1), andrerseits auf der Ebene (3) von dem, beiden gemeinschaftlichen, Puncte aus nach irgend einer Richtung zu einem consecutiven Puncte übergehen, und dem entsprechend, einerseits die Gleichung (1), andrerseits die

Gleichung (3) differentiiren und, nach der Differentiation, für p, q, r, s . . ihre besondern Werthe p′, q′, r′, s′ . . einsetzen, so ergibt sich beidesmal, ganz übereinstimmend:

$$\left(\frac{d\Pi}{dp}\right)dp+\left(\frac{d\Pi}{dq}\right)dq+\left(\frac{d\Pi}{dr}\right)dr+\left(\frac{d\Pi}{ds}\right)ds\,..\,=0.$$

In die Sprache der Geometrie übersetzt, heisst diess, dass zwei Durchschnittspuncte der Fläche mit jeder in der fraglichen Ebene durch den gegebenen Punct gehenden geraden Linie in diesen Punct zusammenfallen. Es stellt die Gleichung (3) die Tangential-Ebene der Fläche (1) in dem gegebenen Puncte dar.

Die Uebertragung der allgemeinen Form der Gleichung (3) auf jeden besondern Fall bietet durchaus keine Schwierigkeit dar. Wenn zum Beispiel die Gleichung der Fläche die folgende ist:

$$\alpha p^2+\beta q^2+\gamma r^2+\delta s^2=0,$$

so kommt:

$$\frac{d\Pi}{dp}=2\alpha p,\quad \frac{d\Pi}{dq}=2\beta q,\quad \frac{d\Pi}{dr}=2\gamma r,\quad \frac{d\Pi}{ds}=2\delta s,$$

und demnach für die Gleichung der Tangential-Ebene in dem gegebenen Puncte:

$$\alpha p'p+\beta q'q+\gamma r'r+\delta s's=0. \qquad (5)$$

Auch wenn die gegebene Gleichung keine homogene ist, besteht, mit einer leichten Modification, immer noch die in dem Vorstehenden entwickelte analytische Bestimmungsweise der Tangential-Ebenen. Wäre zum Beispiel, statt der vorstehenden Gleichung (1), die folgende gegeben:

$$\alpha p^2+\beta q^2+\gamma r^2+\delta=0, \qquad (6)$$

so ist klar, dass diese neue Gleichung in die frühere übergeht, wenn wir p, q, r bezüglich mit $\frac{p}{s}, \frac{q}{s}, \frac{r}{s}$ vertauschen, oder, was dasselbe heisst, dieselbe durch Einführung einer neuen linearen Function s homogen machen. Nach dieser Vertauschung ergibt sich für die Gleichung der Tangential-Ebene die vorstehende Gleichung (5). Um diese auf die ursprüngliche Coordinaten-Bestimmung zurückzuführen, brauchen wir bloss s, und also auch s′, gleich Eins zu setzen. Hiernach ergibt sich für die Gleichung der Tangential-Ebene in irgend einem Puncte der Fläche (6), dessen Coordinaten p′, q′, r′ sind, die folgende:

$$\alpha p'p+\beta q'q+\gamma r'r+\delta=0.$$

Wir können hieraus sogleich die allgemeine Regel für den Fall, dass die gegebene Gleichung der Fläche keine homogene ist, entnehmen. Wir brauchen bloss diese Gleichung durch Einführung einer neuen Veränderlichen homogen zu machen, wie in dem Vorstehenden die Gleichung der Tangential-Ebene zu entwickeln, und dann wieder die eingeführte Veränderliche gleich Eins zu setzen: Operationen, die sich alle leicht ausführen lassen, auch ohne die später wieder verschwindende Veränderliche wirklich hinzuschreiben. Nehmen wir als Beispiel die Gleichung:

$$\alpha p^2+\beta q^2-2\gamma r=0,$$

so kommt:

$$\frac{d\Pi}{dp}=2\alpha p,\quad \frac{d\Pi}{dq}=2\beta q,\quad \frac{d\Pi}{dr}=-2\gamma,\quad \frac{d\Pi}{ds}=-2\gamma r,$$

und hiernach als Gleichung der Tangential-Ebene:

$$\alpha p'p+\beta q'q=\gamma(r+r').$$

Wenn zugleich mit der Gleichung (1) noch eine zweite Gleichung von derselben Form

$$\Pi_1 = 0$$

besteht und beide Gleichungen also eine Curve im Raume darstellen, so ist die Tangente dieser Curve, in einem Puncte, der willkührlich auf ihr, also zugleich auch auf beiden bezüglichen Flächen, angenommen wird, die Durchschnittslinie der beiden Tangential-Ebenen dieser Flächen in dem angenommenen Puncte. Bezeichnen wir diesen Punct, wie früher, so ist die eine Tangential-Ebene durch die Gleichung (3) und die zweite durch folgende Gleichung von derselben Form:

$$\left(\frac{d\Pi_1}{dp}\right)p+\left(\frac{d\Pi_1}{dq}\right)q+\left(\frac{d\Pi_1}{dr}\right)r+\left(\frac{d\Pi_1}{ds}\right)s+..=0$$

gegeben. Das System der beiden Gleichungen stellt die fragliche Tangente dar.

23. Wenn wir in den vorstehenden Entwickelungen die Punct-Coordinaten mit Plan-Coordinaten vertauschen, so ergibt sich unmittelbar in dem Systeme dieser letztern die analytische Theorie des Contactes erster Ordnung.

Es seien

$$Z = 0, \qquad Z_1 = 0,$$

zwei homogene Gleichungen in Plan-Coordinaten P, Q, R, S.., welche einzeln zwei Flächen und gleichzeitig eine Abwickelungsfläche darstellen. Ist eine Tangential-Ebene der beiden Flächen gegeben und sind P′, Q′, R′, S′.. die Coordinaten der Ebene, so erhalten wir für die Puncte, in welchen diese beiden Flächen von dieser Ebene berührt werden, die beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{dZ}{dP}\right)P+\left(\frac{dZ}{dQ}\right)Q+\left(\frac{dZ}{dR}\right)R+\left(\frac{dZ}{dS}\right)S+..=0,$$

$$\left(\frac{dZ_1}{dP}\right)P+\left(\frac{dZ_1}{dQ}\right)Q+\left(\frac{dZ_1}{dR}\right)R+\left(\frac{dZ_1}{dS}\right)S+..=0.$$

Das System dieser beiden Gleichungen stellt diejenige gerade Linie dar, welche die Berührungspuncte auf den beiden Flächen verbindet, und welche, worauf wir bald zurückkommen werden, in ihrer ganzen Ausdehnung in die Abwickelungsfläche fällt.

24. Die Gleichung

$$\left(\frac{d\Pi}{dp}\right)p+\left(\frac{d\Pi}{dq}\right)q+\left(\frac{d\Pi}{dr}\right)r+\left(\frac{d\Pi}{ds}\right)s=0,$$

welche die Tangential-Ebene der Fläche Π in irgend einem Puncte, dem die Functionen-Werthe p′, q′, r′, s′ entsprechen, darstellt, können wir auch, eben weil sie durch diesen Punct geht, unter der folgenden Form schreiben:

$$\left(\frac{d\Pi}{dp}\right)(p-p')+\left(\frac{d\Pi}{dq}\right)(q-q')+\left(\frac{d\Pi}{dr}\right)(r-r')+\left(\frac{d\Pi}{ds}\right)(s-s')=0.$$

Gehen wir von den vier linearen Functionen zu drei Punct-Coordinaten über, indem wir $s = 1$, $r = \zeta$, $q = \eta$, $p = \mathfrak{H}$ und demnach auch $s' = 1$, $r' = \zeta'$, $q' = \eta'$, $p' = \mathfrak{H}'$ setzen, so nimmt die Gleichung der Fläche die folgende Form an:

$$F(\mathfrak{H}, \eta, \zeta) \equiv \Omega = 0$$

und für die Gleichung der Tangential-Ebene in dem Puncte $(\mathfrak{H}', \eta', \zeta')$ ergibt sich:

$$\left(\frac{d\Omega}{d\mathfrak{H}}\right)(\mathfrak{H}-\mathfrak{H}')+\left(\frac{d\Omega}{d\eta}\right)(\eta-\eta')+\left(\frac{d\Omega}{d\zeta}\right)(\zeta-\zeta')=0,$$

indem wir hier, wie früher, die umklammerten partiellen Differential-Coefficienten auf den gegebenen Punct beziehen. Endlich geht auch noch, wenn wir durch $\left(\frac{d\Omega}{d\mathfrak{Z}}\right)$ dividiren, die Gleichung der Tangential-Ebene in die nachstehende über:

$$\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}' = \frac{d\mathfrak{Z}}{d\eta}(\eta-\eta') + \frac{d\mathfrak{Z}}{d\zeta}(\zeta-\zeta').$$

Auf gleiche Weise ergibt sich, wenn wir die Fläche durch eine Gleichung in Plan-Coordinaten Θ, H, Z:

$$F(\Theta, H, Z) \equiv \Phi = 0$$

darstellen, und irgend eine Tangential-Ebene durch die Coordinaten-Werthe Θ', H', Z' gegeben ist, für die Gleichung des Berührungspunctes auf dieser Ebene:

$$\left(\frac{d\Phi}{d\Theta}\right)(\Theta-\Theta') + \left(\frac{d\Phi}{dH}\right)(H-H') + \left(\frac{d\Phi}{dZ}\right)(Z-Z') = 0$$

oder auch, indem wir durch $\left(\frac{d\Phi}{d\Theta}\right)$ dividiren:

$$\Theta-\Theta' = \frac{d\Theta}{dH}(H-H') + \frac{d\Theta}{dZ}(Z-Z').$$

25. Wenn insbesondere die homogene Gleichung in Punct-Coorrdinaten:

$$\Pi = 0$$

eine Fläche der zweiten Ordnung darstellt, so hat die Gleichung der Tangential-Ebene dieser Fläche in einem gegebenen Puncte p', q', r', s', nemlich die Gleichung

$$\left(\frac{d\Pi}{dp}\right)p + \left(\frac{d\Pi}{dq}\right)q + \left(\frac{d\Pi}{dr}\right)r + \left(\frac{d\Pi}{ds}\right)s = 0, \qquad (1)$$

in welcher die partiellen Differential-Coefficienten auf die dem Berührungs-Puncte entsprechenden Functionen-Werthe zu beziehen sind, dieselbe Form als die Grund-Gleichung der Reciprocität in demjenigen Falle, wo jedem gegebenen Puncte nur eine einzige Polar-Ebene entspricht (15. Nummer und Note). Aus dieser Uebereinstimmung fliesst eine geometrische Construction der Polar-Ebene eines gegebenen Punctes durch die Vermittelung einer Fläche der zweiten Ordnung.

Wenn wir nemlich die vorstehende Gleichung, die wir auch unter der nachstehenden Form schreiben können:

$$\frac{d\Pi}{dp}.p' + \frac{d\Pi}{dq}.q' + \frac{d\Pi}{dr}.r' + \frac{d\Pi}{ds}.s' = 0,$$

als Grund-Gleichung der Reciprocität nehmen, so wird die Polar-Ebene irgend eines gegebenen Punctes p, q, r, s durch diese Gleichung in der Voraussetzung, dass p, q, r, s constant und p', q', r', s' als veränderlich genommen werden, dargestellt. Hieraus folgt, dass, wenn der gegebene Punct auf irgend einer Tangential-Ebene liegt, die Polar-Ebene durch den Berührungspunct geht. Da aber durch den gegebenen Punct unendlich viele Tangential-Ebenen gehen und diese einen, der Fläche umschriebenen, Kegel, dessen Mittelpunct der gegebene Punct ist, umhüllen, so ist weiter ersichtlich, dass dieser Kegel die Fläche in einer ebenen Curve berühren muss, welche ganz in der fraglichen Polar-Ebene liegt. Es vertritt hier die Fläche der zweiten Ordnung Π, was die Construction der Polar-Ebene eines gegebenen Punctes betrifft, vollständig die Grund-Gleichung; sie heisst in dieser Beziehung die Directrix der Reciprocität.

Nehmen wir also eine beliebige Fläche der zweiten Ordnung als Directrix, so gibt das Princip der Reciprocität unmittelbar die folgenden Relationen.

Wenn die Spitze eines, einer Fläche der zweiten Ordnung umschriebenen, Kegels auf einer gegebenen Ebene beliebig fortrückt, so dreht sich die Ebene der Berührungs-Curve um einen gegebenen festen Punct, und umgekehrt.

Wenn die Spitze des umschriebenen Kegels auf einer gegebenen geraden Linie fortrückt, so dreht sich die Ebene der Berührungs-Curve um eine zweite feste gerade Linie, und umgekehrt. Die beiden geraden Linien sind zugeordnete Polaren; ihre Beziehung zu einander ist eine durchaus gegenseitige.

Einem reellen Pole entspricht immer eine reelle Polar-Ebene, während der umschriebene Kegel, welcher den Pol zur Spitze hat, und die Curve, welche in der Polar-Ebene liegt, imaginär sein können. Um, in diesem Falle, die Polar-Ebene eines gegebenen Punctes zu construiren, brauchen wir nur die Pole dreier beliebigen Ebenen, welche durch diesen Punct gehen, zu bestimmen; diejenige Ebene, welche diese drei Pole enthält, ist die gesuchte Polar-Ebene. Um den Pol einer gegebenen Ebene zu construiren, brauchen wir bloss die Polar-Ebenen dreier Puncte dieser Ebene zu bestimmen; der Durchschnitt dieser drei Ebenen ist der gesuchte Pol.

Wenn eine gerade Linie gegeben ist, so erhalten wir die zugeordnete Polare, wenn wir durch dieselbe zwei Tangential-Ebenen an die Fläche legen und die beiden Berührungspuncte durch eine gerade Linie verbinden, oder indem wir in ihren Durchschnittspuncten mit der Fläche die Tangential-Ebenen construiren und die Durchschnittslinie von diesen nehmen, oder, wenn diese Constructionsweisen keine Anwendung finden, indem wir entweder durch die gegebene gerade Linie zwei beliebige Ebenen legen und die Pole von diesen durch eine gerade Linie verbinden, oder auf ihr zwei Puncte beliebig annehmen, und dann die Durchschnittslinie ihrer beiden Polar-Ebenen bestimmen.

26. Eine Ebene, welche die Directrix-Fläche berührt, hat den auf ihr liegenden Berührungspunct zu ihrem Pole. Die Durchschnittslinie zweier Tangential-Ebenen ist die Polare derjenigen geraden Linie, welche die beiden Berührungspuncte verbindet. Jede Ebene, welche durch jene Durchschnittslinie geht, hat einen Punct dieser Verbindungslinie zu ihrem Pole und kann nur dann eine Tangential-Ebene sein, wenn ihr Pol auf der Fläche liegt. Diejenige gerade Linie, welche die beiden Berührungspuncte verbindet, schneidet die Fläche in keinem dritten Puncte: durch die Durchschnittslinie der beiden Tangential-Ebenen lässt sich also keine dritte Tangential-Ebene an die Fläche legen. Eine Fläche der zweiten Ordnung ist also auch eine Fläche der zweiten Classe.

In Uebereinstimmung hiermit können wir auch, unter Beibehaltung der Bezeichnung der 23. Nummer, die folgende Gleichung in Plan-Coordinaten:

$$\frac{dZ}{dP}\cdot P' + \frac{dZ}{dQ}\cdot Q' + \frac{dZ}{dR}\cdot R' + \frac{dZ}{dS}\cdot S' = 0$$

als Grund-Gleichung der Reciprocität nehmen, woran sich dann Erörterungen knüpfen, welche den Erörterungen der vorigen Nummer vollkommen entsprechen.

27. Wenn ein Punct-Coordinaten-System ξ, η, $\Im$ und ein Plan-Coordinaten-System Z, H, Θ befreundete der zweiten Art sind (5), so drückt die Gleichung:

$$\xi + \Theta\eta + H\Im + Z = 0, \qquad (1)$$

die Bedingung aus, welche zwischen den beiden Gruppen von Coordinaten-Werthen Statt finden muss, wenn der Punct $(\xi,\eta,\Im)$ auf der Ebene (Z,H,Θ) liegen, oder, was dasselbe heisst, diese Ebene durch jenen Punct gehen soll.

Wenn hiernach dieselbe Fläche durch die folgenden beiden Gleichungen:

$$\varphi(\xi,\eta,\Im) \equiv \Omega = 0, \tag{2}$$
$$\Phi(Z,H,\Theta) \equiv \Xi = 0, \tag{3}$$

einmal in dem Systeme der Punct-Coordinaten, das andere Mal in dem Systeme der Plan-Coordinaten dargestellt wird und $\xi,\eta,\Im$ die Coordinaten irgend eines Punctes der Fläche und Z,H,Θ die Coordinaten der Tangential-Ebene der Fläche in eben diesem Puncte bezeichnen, so besteht zwischen diesen sechs Coordinaten-Werthen die Gleichung (1). Und zwar stellt diese Gleichung die Tangential-Ebene (Z,H,Θ) dar, wenn wir $\xi,\eta,\Im$ als veränderlich, und stellt den Berührungspunct $(\xi,\eta,\Im)$ dar, wenn wir Z,H,Θ als veränderlich betrachten.

In der ersten Voraussetzung, dass $\xi,\eta,\Im$ veränderlich sind, müssen also, wenn wir die beiden Gleichungen (1) und (2) differentiiren, die resultirenden Gleichungen:

$$d\xi + \Theta d\eta + H d\Im = 0,$$
$$d\xi = \frac{d\xi}{d\eta}.d\eta + \frac{d\xi}{d\Im}.d\Im,$$

übereinstimmen. Auf gleiche Weise ergeben sich ferner, wenn wir, in der zweiten Voraussetzung, dass Z,H,Θ veränderlich seien, die Gleichungen (1) und (3) differentiiren, die beiden übereinstimmenden Gleichungen:

$$dZ + \Im dH + \eta d\Theta = 0,$$
$$dZ = \frac{dZ}{dH}.dH + \frac{dZ}{d\Theta}.d\Theta.$$

Führen wir hiernach, der Kürze halber, die folgenden Bezeichnungen für die partiellen Differential-Coefficienten ein:

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \mathfrak{q}, \quad \frac{d\xi}{d\Im} = \mathfrak{p}, \quad \frac{dZ}{dH} = \mathfrak{Q}, \quad \frac{dZ}{d\Theta} = \mathfrak{P},$$

so kommt:

$$\Theta = -\mathfrak{q}, \qquad H = -\mathfrak{p}, \tag{4}$$
$$\Im = -\mathfrak{Q}, \qquad \eta = -\mathfrak{P}, \tag{5}$$

und hieraus in Folge der Gleichung (1):

$$Z = -(\xi - \mathfrak{q}\eta - \mathfrak{p}\Im), \tag{6}$$
$$\xi = -(Z - \mathfrak{Q}H - \mathfrak{P}\Theta). \tag{7}$$

28. Die Entwickelungen der vorigen Nummer stellen sich symmetrischer dar, wenn wir homogene Gleichungen zu Grunde legen.

Vertauschen wir $\xi,\eta,\Im$ und Z,H,Θ bezüglich mit $\frac{s}{p},\frac{r}{p},\frac{q}{p}$ und $\frac{P}{S},\frac{Q}{S},\frac{R}{S}$, so geht zunächst die Gleichung (1) in die folgende über:

$$Ss + Rr + Qq + Pp = 0, \tag{1,a}$$

während wir die homogen werdenden Gleichungen (2) und (3) auf folgende Weise schreiben:

$$\varpi(s,r,q,p) = 0, \tag{2,a}$$
$$\Pi(S,R,Q,P) = 0, \tag{3,a}$$

und zugleich, der Kürze wegen, die ersten Theile dieser Gleichungen durch die blossen Functions-Zeichen ϖ und Π darstellen können.

Setzen wir erstens:

$$S = \frac{d\varpi}{ds}, \quad R = \frac{d\varpi}{dr}, \quad Q = \frac{d\varpi}{dq}, \quad P = \frac{d\varpi}{dp},$$

so stellt, wenn wir s, r, q und p als veränderlich betrachten und die partiellen Differential-Coefficienten auf irgend einen Punct der Fläche beziehen, die Gleichung (1,a) die Tangential-Ebene der Fläche in diesem Puncte dar. Dieselbe Gleichung stellt eben diesen Punct dar, wenn wir zweitens:

$$s = \frac{d\Pi}{dS}, \quad r = \frac{d\Pi}{dR}, \quad q = \frac{d\Pi}{dQ}, \quad p = \frac{d\Pi}{dP}$$

setzen, die partiellen Differential-Coefficienten auf dieselbe Tangential-Ebene beziehen und S, R, Q und P als veränderlich betrachten. (Die letzten acht Gleichungen hätten wir, durch Hülfe des Theorems über die homogenen Functionen auch aus den Gleichungen (4), (5), (6), (7) ableiten können.)

Wir erhalten hiernach die folgende Relation zwischen den beiden Functionen ϖ und Π:

$$\varpi(s,r,q,p) \equiv \lambda\Pi\left(\frac{d\varpi}{ds}, \frac{d\varpi}{dr}, \frac{d\varpi}{dq}, \frac{d\varpi}{dp}\right),$$

wobei wir die Constante λ auch gleich der Einheit nehmen können. Und gegenseitig ist:

$$\Pi(S,R,Q,P) \equiv \varpi\left(\frac{d\Pi}{dS}, \frac{d\Pi}{dR}, \frac{d\pi}{dQ}, \frac{d\Pi}{dP}\right).$$

29. Nachdem wir die Betrachtungen der vorigen Nummer eingeschaltet haben, wollen wir weiter gehen und die Differential-Coefficienten der zweiten Ordnung auf folgende Weise bezeichnen:

$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = t, \quad \frac{d^2\zeta}{d\eta\, d\Theta} = \mathfrak{s}, \quad \frac{d^2\zeta}{d\Theta^2} = \mathfrak{r},$$

$$\frac{d^2Z}{dH^2} = \mathfrak{T}, \quad \frac{d^2Z}{dH\, d\Theta} = \mathfrak{S}, \quad \frac{d^2Z}{d\Theta^2} = \mathfrak{R}.$$

Differentiiren wir demnach die Gleichungen (4) nach einander in Beziehung auf η, indem wir Θ, und in Beziehung auf Θ, indem wir η als constant betrachten, so kommt:

$$\frac{d\Theta}{d\eta} = -t, \quad \frac{d\Theta}{d\Theta} = \frac{dH}{d\eta} = -\mathfrak{s}, \quad \frac{dH}{d\Theta} = -\mathfrak{r}.$$

Differentiiren wir ferner, unter demselben doppelten Gesichtspuncte, jede der beiden Gleichungen (5), indem wir berücksichtigen, dass Ω und $\mathfrak{P}$ Functionen von H und Θ sind, so gelangen wir zu den vier Gleichungen:

$$\frac{d\Omega}{dH}\cdot\frac{dH}{d\eta} + \frac{d\Omega}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{d\eta} = 0,$$

$$1 + \frac{d\Omega}{dH}\cdot\frac{dH}{d\Theta} + \frac{d\Omega}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{d\Theta} = 0,$$

$$1 + \frac{d\mathfrak{P}}{dH}\cdot\frac{dH}{d\eta} + \frac{d\mathfrak{P}}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{d\eta} = 0,$$

$$\frac{d\mathfrak{P}}{dH}\cdot\frac{dH}{d\Theta} + \frac{d\mathfrak{P}}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{d\Theta} = 0,$$

welche wir, in Gemässheit des Vorhergehenden, auch auf folgende Weise schreiben können:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\mathfrak{s}+\mathfrak{S}\mathfrak{t} &= 0, \\ 1-\mathfrak{T}\mathfrak{r}-\mathfrak{S}\mathfrak{s} &= 0, \\ 1-\mathfrak{S}\mathfrak{s}-\mathfrak{R}\mathfrak{t} &= 0, \\ \mathfrak{S}\mathfrak{r}+\mathfrak{R}\mathfrak{s} &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Von diesen vier Gleichungen bedingen irgend drei die jedesmalige vierte; denn die erste und letzte, so wie die zweite und dritte dieser Gleichungen geben übereinstimmend:

$$\mathfrak{T}\mathfrak{r} = \mathfrak{R}\mathfrak{t}. \tag{9}$$

Um gegenseitig die drei zweiten Differential-Coefficienten in den beiden Coordinaten-Systemen durch einander auszudrücken, finden wir hiernach die folgenden beiden Gruppen von drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \frac{-\mathfrak{t}}{\mathfrak{s}^2-\mathfrak{r}\mathfrak{t}}, & \mathfrak{t} &= \frac{-\mathfrak{T}}{\mathfrak{S}^2-\mathfrak{R}\mathfrak{T}}, \\ \mathfrak{S} &= \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{s}^2-\mathfrak{r}\mathfrak{t}}, & \mathfrak{s} &= \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}^2-\mathfrak{R}\mathfrak{T}}, \\ \mathfrak{R} &= \frac{-\mathfrak{r}}{\mathfrak{s}^2-\mathfrak{r}\mathfrak{t}}; & \mathfrak{r} &= \frac{-\mathfrak{R}}{\mathfrak{S}^2-\mathfrak{R}\mathfrak{T}}; \end{aligned} \tag{10}$$

und endlich gibt noch jede dieser Gruppen von drei Gleichungen die folgende, von bemerkenswerther Form:

$$(\mathfrak{s}^2-\mathfrak{r}\mathfrak{t})(\mathfrak{S}^2-\mathfrak{R}\mathfrak{T}) = 1. \tag{11}$$

Zu denselben Resultaten wären wir auch dann gelangt, wenn wir die Gleichungen (4) und (5) nach einander in Beziehung auf H und Θ differentiirt und dabei $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{p}$ als Functionen von η und $\mathfrak{H}$ betrachtet hätten.

Und endlich können wir, den in dem Vorstehenden eingeschlagenen Weg weiter verfolgend, auch zur gegenseitigen Bestimmung der partiellen Differential-Coefficienten **höherer** Ordnung in der doppelten Coordinaten-Annahme übergehen. Doch brechen wir hier ab, weil die weitere Entwickelung voraussichtlich in unsern spätern Untersuchungen keine Anwendung finden würde.

30. Nach dem Vorstehenden können wir, wenn irgend eine Fläche durch eine Gleichung in Plan-Coordinaten dargestellt ist, dieselbe Fläche durch eine Gleichung in Punct-Coordinaten ausdrücken, und, umgekehrt, auch von der letztern Gleichung zu der erstern übergehen. Wir brauchen nur, wenn zum Beispiel die Gleichung

$$\Phi(Z,H,\Theta) = 0 \tag{3}$$

gegeben ist, zwischen dieser Gleichung und den drei Gleichungen (1) und (5) die drei veränderlichen Grössen Z, H und Θ zu eliminiren. Dann ist die resultirende Gleichung in ζ, η und $\mathfrak{H}$ die gesuchte und stimmt mit der Gleichung (2) überein.

Wenn die gegebene Gleichung (3) in Beziehung auf die Plan-Coordinaten Z, H, Θ eine algebraische und vom m. Grade ist, so sind die Gleichungen (5) beide vom $(m-1)$. Grade und wir erhalten nach der eben besprochenen Elimination dieser drei Coordinaten eine Gleichung des $m(m-1)^2$. Grades in ζ, η, $\mathfrak{H}$.

Wenn die Gleichung der Fläche in Punct-Coordinaten gegeben ist:

$$\varphi(\zeta,\eta,\mathfrak{H}) = 0, \tag{2}$$

so erhalten wir, wenn wir zwischen dieser Gleichung und den drei Gleichungen (1) und (4) ζ, η, $\mathfrak{H}$ eliminiren, die Gleichung derselben Fläche in den befreundeten Plan-Coordinaten Z, H, Θ. Der Grad dieser Gleichung bestimmt sich aus dem Grade der gegebenen gerade so, wie vorhin.

Hieran knüpft sich zuvörderst die allgemeine Bemerkung, dass eine algebraische Fläche auch in dem Systeme der Plan-Coordinaten durch eine algebraische Gleichung ausgedrückt wird, und dass also auch umgekehrt an diese letzte Bedingung die Definition einer algebraischen Fläche sich knüpfen lässt. Dann haben wir ferner die folgenden beiden Sätze:

Eine Fläche der m. Classe ist von der $m(m-1)^2$. Ordnung.

Eine Fläche der m. Ordnung ist von der $m(m-1)^2$. Classe.

Die vorstehenden beiden Sätze lassen sich dahin umschreiben, dass eine Fläche der m. Classe von einer gegebenen geraden Linie in $m(m-1)^2$ Puncten geschnitten wird und dass an eine Fläche der m. Ordnung durch eine gegebene gerade Linie sich $m(m-1)^2$ Tangential-Ebenen legen lassen.

Um etwa den letztern Theil dieser Behauptung direct zu beweisen, können wir, weil einer andern Coordinaten-Annahme keine Form-Aenderung der Gleichung

$$\Omega = 0 \tag{2}$$

entspricht, unbeschadet der Allgemeinheit, als gegebene gerade Linie diejenige nehmen, für welche $\Theta = 0$, $H = 0$. Die Gleichungen (4) geben hiernach:

$$\mathfrak{q} \equiv \frac{d\xi}{d\eta} = 0, \qquad \mathfrak{p} \equiv \frac{d\xi}{d\mathfrak{H}} = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{d\Omega}{d\eta} = 0, \qquad \frac{d\Omega}{d\mathfrak{H}} = 0. \tag{12}$$

Diese beiden Gleichungen stellen zwei Flächen der $(m-1)$. Ordnung dar. Wird also der Berührungspunct auf der gegebenen Fläche Ω so angenommen, dass er zugleich auch auf der ersten der beiden Flächen (12) liegt, so geht die Tangential-Ebene in demselben nothwendig durch den Punct $\Theta = 0$, oder, mit andern Worten, die Durchschnitts-Curve der beiden Flächen m. und $(m-1)$. Ordnung ist diejenige Curve, in welcher die erstere derselben von demjenigen umschriebenen Kegel berührt wird, dessen Spitze der letztgenannte Punct ist. Nehmen wir endlich den Berührungspunct auf der gegebenen Fläche so an, dass er zugleich auf beiden Flächen $(m-1)$. Ordnung (12) liegt, so geht die bezügliche Tangential-Ebene zugleich durch die beiden Puncte $\Theta = 0$ und $H = 0$, das heisst, durch diejenige gerade Linie, welche diese Puncte verbindet. Die Anzahl der so bestimmten Berührungspuncte beträgt $m(m-1)^2$, und das ist also auch die Anzahl der Tangential-Ebenen, welche durch die gegebene gerade Linie an die gegebene Fläche der m. Ordnung sich legen lassen.

Nach dem Vorstehenden geht der einer Fläche der m. Ordnung umschriebene Kegel durch die Durchschnitts-Curve dieser Fläche und einer Fläche der $(m-1)$. Ordnung und ist selbst hiernach in Gemässheit der 17. Nummer von der $m(m-1)$. Ordnung.

Ein einer Fläche der m. Ordnung umschriebener Kegel ist im Allgemeinen von der $m(m-1)$. Ordnung.

Nach dem Principe der Reciprocität stellt sich neben diesen Satz der folgende:

Eine Fläche der m. Classe wird von einer Ebene in einer Curve der $m(m-1)$. Classe geschnitten.

31. Auch wenn eine Fläche oder vielmehr eine Familie von Flächen durch eine Gleichung in partiellen Differential-Coefficienten erster und zweiter Ordnung in der einen Coordinaten-Bestimmung gegeben ist, erhalten wir, nach den Entwickelungen der 27. und 29. Nummer, sogleich die Gleichung derselben Fläche in partiellen Differential-Coefficienten derselben Ordnung in der andern Coordinaten-Bestimmung.

Die allgemeine Differential-Gleichung der zweiten Ordnung in dem Systeme der Punct Coordinaten

$$F(t, \mathfrak{s}, r, q, \mathfrak{p}, \zeta, \eta, \mathfrak{H}) = 0, \tag{1}$$

können wir sogleich in die folgende umformen, welche für das System der Plan-Coordinaten gilt:

$$F\left(\frac{-\mathfrak{T}}{\mathfrak{S}^2-\mathfrak{R}\mathfrak{T}}, \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}^2-\mathfrak{R}\mathfrak{T}}, \frac{-\mathfrak{R}}{\mathfrak{S}^2-\mathfrak{R}\mathfrak{T}}, -\Theta, -H, -(Z-\Omega H-\mathfrak{P}\Theta), -\mathfrak{P}, -\Omega\right) = 0. \tag{2}$$

Wenn zum Beispiele die folgende Gleichung vorläge:

$$(1+\mathfrak{p}^2)t - 2\mathfrak{p}q\mathfrak{s} + (1+q^2)r = 0, \tag{3}$$

so erhalten wir zur Bestimmung derselben Flächen-Familie auch die nachstehende Gleichung:

$$(1+H^2)\mathfrak{T} - 2\Theta H\mathfrak{S} + (1+\Theta^2)\mathfrak{R} = 0.^*) \tag{4}$$

Es ist klar, dass solche verschiedene analytische Ausdrücke, wenn sie geometrisch gedeutet werden, zu neuen Sätzen führen, und somit durch die Vermittelung von partiellen Differential-Gleichungen ein Princip zum Auffinden geometrischer Sätze gegeben ist. Später erst können wir uns hierüber weitläufiger verbreiten und verweisen einstweilen auf eine frühere Abhandlung vom Jahre 1831 im 9. Bande von Crelle's Journal unter dem Titel: *Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes.*

32. Ein merkwürdiger Fall der Umformung einer Differential-Gleichung verdient eine besondere Erörterung. Wenn nemlich, bei willkührlicher Bestimmung der durch φ angezeigten Function, die folgende Gleichung in partiellen Differential-Coefficienten gegeben ist:

$$\varphi\{-(\zeta-q\eta-\mathfrak{p}\mathfrak{H}), -q, -\mathfrak{p}\} = 0, \tag{5}$$

so erhalten wir in dem befreundeten Coordinaten-Systeme eine Gleichung:

$$\varphi\{Z, H, \Theta\} = 0, \tag{6}$$

aus welcher die partiellen Differential-Coefficienten verschwunden sind. Von dieser Gleichung könnten wir, auf bekannte Weise, zu einer Gleichung in den ursprünglichen Coordinaten zurückgehen (30), und diese ist alsdann eine besondere Auflösung der ursprünglichen Differential-Gleichung.

Jeder Werthen-Gruppe Z, H, Θ entspricht eine die Fläche (6) berührende Ebene, welche in dem ursprünglichen Coordinaten-Systeme durch die Gleichung:

$$\zeta + \Theta\eta + H\mathfrak{H} + Z = 0, \tag{7}$$

dargestellt wird. Diese Gleichung, in welcher zwei der drei Constanten Z, H, Θ willkührlich angenommen werden können und dann erst die dritte durch die Gleichung (7) bestimmt wird, ist die allgemeine Integral-Gleichung der Differential-Gleichung (5).

---

*) In dem Systeme gewöhnlicher rechtwinkliger Parallel-Coordinaten ist (3) oder

$$\left\{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right\}\frac{d^2z}{dy^2} - 2\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{d^2z}{dxdy} + \left\{1+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right\}\frac{^2z}{dx^2} = 0$$

die partielle Differential-Gleichung solcher Flächen, deren Inhalt ein Minimum ist; dieselben Flächen werden also in dem befreundeten Plan-Coordinaten-Systeme der 2. Nummer, der Gleichung (4) entsprechend, auch durch die folgende Gleichung dargestellt:

$$(1+u^2)\frac{d^2w}{dv^2} - 2uv\cdot\frac{d^2w}{dudv} + (1+v^2)\frac{d^2w}{du^2} = 0.$$

Diese letzte Gleichung hat die allgemeine Form solcher Differential-Gleichungen der ersten Ordnung, die überhaupt eine besondere Auflösung zulassen und deren allgemeines Integral in Beziehung auf die drei Veränderlichen ζ, η, $\mathfrak{H}$ vom ersten Grade ist. Haben diese Veränderlichen, wie in dem Vorstehenden, die Bedeutung von linearen Punct-Coordinaten, so stellt das allgemeine Integral eine veränderliche Ebene dar, welche in allen ihren Lagen diejenige Fläche, welche durch die besondere Auflösung dargestellt wird, berührt. Die Gleichung dieser Fläche in befreundeten Plan-Coordinaten ist unmittelbar durch (6) gegeben.

Wenn die durch φ angezeigte Function vom ersten Grade ist, so geht die durch die besondere Auflösung dargestellte Fläche in einen Punct über: dann fällt in dem ursprünglichen Coordinaten-Systeme die besondere Auflösung eigentlich weg.

33. Ein System zweier Gleichungen in Plan-Coordinaten:

$$F(Z,H,\Theta) = 0, \qquad F_1(Z,H,\Theta) = 0,$$

stellt, wie wir schon in der 20. Nummer bemerkt haben, eine solche Fläche dar, welche durch eine Ebene umhüllt wird, die, bei ihrer Bewegung, von einer Lage in eine benachbarte nur auf einzige Weise fortrücken kann. Eine solche Abwickelungs-Fläche wird in dem Systeme der Punct-Coordinaten, wie jede andere Fläche, durch eine einzige Gleichung ausgedrückt.

Eliminiren wir zwischen den obigen beiden Gleichungen Z, so kommt:

$$H = \varphi(\Theta),$$

mithin in dem befreundeten Punct-Coordinaten-Systeme zweiter Art:

$$\mathfrak{q} = \varphi(\mathfrak{p}),$$

und wenn wir nach einander in Beziehung auf η und $\mathfrak{H}$ differentiiren:

$$\frac{d\mathfrak{q}}{d\eta} = \frac{d\varphi(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}} \cdot \frac{d\mathfrak{p}}{d\eta}, \qquad \frac{d\mathfrak{q}}{d\mathfrak{H}} = \frac{d\varphi(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}} \cdot \frac{d\mathfrak{p}}{d\mathfrak{H}},$$

oder, was dasselbe ist:

$$t = \frac{d\varphi(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{s}, \qquad \mathfrak{s} = \frac{d\varphi(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{r},$$

und wenn wir $\frac{d\varphi(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}$ eliminiren:

$$t\mathfrak{r} - \mathfrak{s}^2 = 0.$$

Das ist, in einem beliebigen Systeme von linearen Punct-Coordinaten, die partielle Differential-Gleichung zweiter Ordnung der Abwickelungs-Flächen, und wenn wir insbesondere gewöhnliche Parallel-Coordinaten nehmen, diejenige, welche Euler zuerst gegeben hat.

Eine Curve im Raume, im Allgemeinen doppelter Krümmung, wird durch ein System zweier Gleichungen in Punct-Coordinaten:

$$F(\zeta,\eta,\mathfrak{H}) = 0, \qquad F_1(\zeta,\eta,\mathfrak{H}) = 0,$$

ausgedrückt, aber nur durch eine einzige Gleichung, wenn wir uns der Plan-Coordinaten bedienen.

Eliminiren wir ζ, so kommt:

$$\eta = \varphi(\mathfrak{H}),$$

oder, wenn wir zum befreundeten Plan-Coordinaten-Systeme übergehen:

$$\mathfrak{Q} = \varphi(\mathfrak{P}),$$

und hieraus, auf ähnliche Weise wie eben:

$$\mathfrak{TR} - \mathfrak{S}^2 = 0.$$

Das ist also in einem beliebigen Systeme von linearen Plan-Coordinaten die partielle Differential-Gleichung zweiter Ordnung der Curven im Raume.

34. Aus dem analytischen Gesichtspuncte betrachtet ist, wenn wir Plan-Coordinaten zu Grunde legen, eine Abwickelungs-Fläche eigentlich keine Fläche, eben so wenig als in dem Systeme von Punct-Coordinaten eine Curve doppelter Krümmung eine Fläche ist. So wie aber hier Abwickelungs-Flächen mit den übrigen Flächen sich zusammenordnen, so ist dort auch eine Curve doppelter Krümmung als eine eigentliche Fläche anzusehen.

Wir haben gesehen, dass eine Fläche zweiter Ordnung im Allgemeinen auch eine Fläche zweiter Classe ist (26). Insbesondere gehören aber zu den Flächen zweiter Ordnung auch die Abwickelungs-Flächen dieser Ordnung, (Kegelflächen derselben Ordnung, die sich auch auf einen Punct reduciren, in einen Cylinder, ein System von zwei reellen oder imaginären oder zusammenfallenden Ebenen ausarten können) und diese lassen sich nicht durch eine einzige Gleichung in Plan-Coordinaten ausdrücken. Ebenso gehören insbesondere auch zu den Flächen zweiter Classe die Curven dieser Classe im Raume, welche nothwendig die ebenen Curven derselben Classe sind und durch eine einzige Gleichung in Punct-Coordinaten sich nicht ausdrücken lassen.

35. Zwischen einer Curve im Raume und einer Abwickelungs-Fläche besteht ein vollständiger Parallelismus.

Eine Ebene, welche um eine in ihr liegende gerade Linie sich dreht, umhüllt diese gerade Linie; bewegt sich die gerade Linie so, dass sie sich continuirlich um einen continuirlich fortrückenden Punct dreht, so umhüllt sie eine Curve im Raume, die, im Allgemeinen, von doppelter Krümmung ist; wonach diese von jeder beliebigen, durch die umhüllende gerade Linie gehenden, Ebene berührt wird. Während die gerade Linie in ihrer Bewegung die Curve umhüllt, wird dieselbe gleichzeitig von dem auf ihr fortrückenden Puncte beschrieben.

Ein Punct, der auf einer geraden Linie sich fortbewegt, beschreibt diese gerade Linie; bewegt sich die gerade Linie so, dass sie continuirlich in einer continuirlich sich drehenden Ebene fortrückt, so beschreibt sie eine Abwickelungs-Fläche, auf welcher hiernach jeder Punct der erzeugenden geraden Linie liegt. Während die gerade Linie in ihrer Bewegung die Abwickelungs-Fläche beschreibt, wird dieselbe gleichzeitig von der um dieselbe sich continuirlich drehenden Ebene umhüllt.

Durch zwei benachbarte Lagen des beschreibenden Punctes ist ein (in gewisser Hinsicht als Punct anzusehendes) lineares Element der Curve gegeben, welches gleichzeitig der umhüllenden geraden Linie angehört; wenn sich diese Linie, das jedesmalige auf ihr liegende Element der Curve mit sich führend, von einer spätern Lage in eine frühere rückwärts bewegt, wobei sie sich continuirlich um die consecutiven Puncte der Curve dreht, so wird die Curve abgewickelt, rectificirt.

Durch zwei benachbarte Lagen der umhüllenden Ebene ist ein (in gewisser Hinsicht als eine gerade Linie anzusehendes) Flächen-Element der Abwickelungs-Fläche gegeben, in welches gleichzeitig die beschreibende gerade Linie fällt; wenn sich diese Linie von einer spätern in eine frühere Lage rückwärts bewegt, während um dieselbe die umhüllende Ebene, das jedesmalige in ihr liegende Flächen-Element mit sich führend, continuirlich sich dreht, so wird die Abwickelungs-Fläche abgewickelt, complanirt.

36. Wenn eine Abwickelungs-Fläche, wie früher, durch zwei Gleichungen in Plan-Coordinaten:

$$F(Z,H,\Theta) = 0, \qquad F_1(Z,H,\Theta) = 0, \tag{1}$$

gegeben ist, so können wir dieselbe Fläche auch durch eine einzige Gleichung in dem befreundeten Punct-Coordinaten-Systeme (zweiter Art) ausdrücken. Es stellt dann zuvörderst die Gleichung

$$\zeta + \Theta\eta + H\vartheta + Z = 0, \tag{2}$$

wenn wir ζ, η, ϑ als veränderlich betrachten, während Z, H, Θ gleichzeitig die beiden Gleichungen (1) befriedigen, irgend eine gemeinschaftliche Tangential-Ebene der beiden bezüglichen Flächen dar. Die Durchschnittslinie je zweier solcher auf einander folgenden Tangential-Ebenen liegt auf der Abwickelungs-Fläche und wird hiernach durch das System der vorstehenden und der folgenden Gleichung ausgedrückt:

$$\eta\, d\Theta + \vartheta\, dH + dZ = 0, \tag{3}$$

wobei $\frac{d\Theta}{dZ}$ und $\frac{dH}{dZ}$ in Folge der Gleichungen (1) als Functionen von Z, H und Θ gegeben sind. Eliminiren wir zwischen den vier vorstehenden Gleichungen Z, H und Θ, so erhalten wir die verlangte Gleichung der Abwickelungs-Fläche in ζ, η, ϑ.

Auf ganz entsprechende Weise ergibt sich, wenn eine Curve doppelter Krümmung durch zwei Gleichungen in Punct-Coordinaten:

$$F(\zeta,\eta,\vartheta) = 0, \qquad F_1(\zeta,\eta,\vartheta) = 0,$$

gegeben ist, indem wir zwischen den beiden Gleichungen und den folgenden beiden:

$$\zeta + \Theta\eta + H\vartheta + Z = 0,$$
$$d\zeta + \Theta\, d\eta + H\, d\vartheta = 0,$$

wobei $\frac{d\eta}{d\zeta}$ und $\frac{d\vartheta}{d\zeta}$ sich als Functionen von ζ, η, ϑ ergeben, diese drei Punct-Coordinaten eliminiren, die einzige Gleichung derselben Curve in dem Systeme der befreundeten Plan-Coordinaten Z, H, Θ.

37. Da eine und dieselbe Linie, wenn sie im Raume sich so bewegt, dass in zwei auf einander folgenden Lagen derselben jedesmal ein Durchschnitt Statt findet, gleichzeitig eine Curve doppelter Krümmung umhüllt und eine Abwickelungs-Fläche beschreibt, so gehört zu jeder Curve doppelter Krümmung eine Abwickelungs-Fläche und umgekehrt zu jeder Abwickelungs-Fläche eine Curve doppelter Krümmung. Zwei auf einander folgende Lagen der sich bewegenden geraden Linie bestimmen einerseits durch ihr Durchschneiden einen Punct der Curve und andrerseits eine Tangential-Ebene der Fläche, welche durch die gerade Linie in ihren beiden Lagen geht. Durch drei auf einander folgende Puncte der Curve sind zwei auf einander folgende Lagen der umhüllenden geraden Linie, also eine Tangential-Ebene der zugehörigen Abwickelungs-Fläche gegeben; umgekehrt sind also auch die Tangential-Ebenen dieser Fläche die Osculations-Ebenen der zugehörigen Curve doppelter Krümmung. Durch drei auf einander folgende Tangential-Ebenen der Abwickelungs-Fläche sind zwei auf einander folgende Lagen der beschreibenden geraden Linie, also ein Punct der zugehörigen Curve doppelter Krümmung gegeben und umgekehrt jeder Punct dieser Curve ist ein Rückkehrpunct der zugehörigen Abwickelungs-Fläche. Die Curve ist der Ort der Rückkehrpuncte (*arrête de rebroussement*) der zugehörigen Fläche, so wie diese derjenige Ort ist, welcher von den Osculations-Ebenen der Curve umhüllt wird.

Eine Curve doppelter Krümmung und die zugehörige Abwickelungs-Fläche wollen wir durch die nachstehenden Gleichungen-Paare in befreundeten Coordinaten-Systemen:

$$f(\zeta, \eta, \vartheta) = 0, \qquad f_1(\zeta, \eta, \vartheta) = 0, \tag{1}$$
$$F(Z, H, \Theta) = 0, \qquad F_1(Z, H, \Theta) = 0, \tag{2}$$

darstellen. Betrachten wir alsdann zuerst die beiden Gleichungen (2) und, durch dieselben, die Abwickelungs-Fläche als gegeben, so können wir die zugehörige Curve bestimmen. Denn, beziehen wir Z, H, Θ auf irgend eine Berührungs-Ebene dieser Abwickelungs-Fläche, und betrachten wir ζ, η, ϑ als veränderlich, so stellt die Gleichung

$$\zeta + \Theta\eta + H\vartheta + Z = 0 \tag{3}$$

diese Tangential-Ebene dar. Für den Durchschnittspunct dieser Ebene mit den beiden unmittelbar folgenden Tangential-Ebenen, bestehen neben dieser Gleichung (3) zugleich auch die folgenden beiden:

$$\eta\, d\Theta + \vartheta\, dH + dZ = 0,$$
$$\eta\, d^2\Theta + \vartheta\, d^2H + d^2Z = 0, \tag{4}$$

wobei wir dZ constant nehmen (wonach $d^2Z = 0$) und dann $\frac{d\Theta}{dZ}, \frac{dH}{dZ}, \frac{d^2\Theta}{dZ^2}, \frac{d^2H}{dZ^2}$ als Functionen von Z, H und Θ aus den Gleichungen (2) ableiten können. Eliminiren wir hiernach zwischen den fünf Gleichungen (2), (3) und (4) die drei Veränderlichen Z, H, Θ, so erhalten wir zwei resultirende Gleichungen in ζ, η und ϑ, welche die verlangte Curve darstellen und mit den Gleichungs-Systemen (1) übereinstimmen.

Ebenso erhalten wir, wenn durch die Gleichungen (1) die Curve doppelter Krümmung gegeben ist, die beiden Gleichungen der zugehörigen Abwickelungs-Fläche in Z, H, Θ, wenn wir zwischen den drei Gleichungen (1) und (3) und den folgenden beiden Gleichungen:

$$d\zeta + \Theta\, d\eta + H\, d\vartheta = 0,$$
$$d^2\zeta + \Theta\, d^2\eta + H\, d^2\vartheta = 0,$$

die drei Punct-Coordinaten ζ, η, ϑ eliminiren.

38. Wenn eine gerade Linie, ein auf derselben liegender Punct und eine durch dieselbe gehende Ebene gegeben sind, so kann das System dieser drei geometrischen Oerter sich im Raume so fortbewegen, dass der Punct continuirlich auf der geraden Linie fortrückt, die Ebene continuirlich um die gerade Linie rotirt, und endlich die gerade Linie selbst um den continuirlich fortrückenden Punct in der continuirtich rotirenden Ebene continuirlich sich dreht. In der Bestimmung einer solchen Bewegung liegt zugleich die Bedingung ausgedrückt, dass in zwei auf einander folgenden Lagen der geraden Zinie ein Durchschneiden Statt findet, so dass durch eine solche Bewegung der geraden Linie gleichzeitig auch die Bewegung des Punctes (als des Durchschnittes zweier auf einander folgenden Linien-Lagen) und der Ebene (als derjenigen, welche durch zwei auf einander folgenden Linien-Lagen geht) bestimmt ist. Drücken wir hiernach das Gesetz des successiven Fortrückens der geraden Linie durch Gleichungen aus, so stellen solche Gleichungen gleichzeitig einerseits die von der geraden Linie umhüllte und von dem auf derselben liegenden Puncte beschriebene Curve doppelter Krümmung und andrerseits die von der geraden Linie beschriebene und von der durch dieselbe gehenden Ebene umhüllte Abwickelungs-Fläche dar.

In irgend einem Momente wollen wir die Lagen der geraden Linie, des Punctes und der Ebene bezüglich durch L, P und E bezeichnen, während wir Λ, Π und E als die ursprünglichen Lagen derselben drei Oerter betrachten. Es sei ferner λ die Summe der unendlich vielen unendlich kleinen Winkel, um welche die gerade Linie von Λ bis L sich gedreht hat, ϖ der Weg, welchen der Punct von Π bis P beschrieben hat, und endlich ε die Summe der unendlich vielen unendlich

kleinen Winkel, um welche die Ebene von E bis E sich gedreht hat. Die drei Grössen λ, ϖ, ε ändern sich, unabhängig von einander, mit der Zeit, wonach wir um die fragliche Bewegung auszudrücken,

$$\lambda = \varphi(t), \qquad \varpi = \psi(t), \qquad \varepsilon = \chi(t) \tag{1}$$

setzen können, indem wir durch φ, ψ und χ drei gegebene Functionen bezeichnen. Eliminiren wir t zwischen je zweien dieser drei Gleichungen, so ergibt sich:

$$X(\lambda,\varpi) = 0, \qquad \Phi(\varepsilon,\varpi) = 0, \qquad \Psi(\lambda,\varepsilon) = 0. \tag{2}$$

Diese drei neuen Gleichungen, von denen jede eine algebraische Folge von den beiden übrigen ist, bestimmen alle möglichen Lagen, welche die gerade Linie, in Gemässheit des durch die frühern Gleichungen (1) ausgedrückten Gesetzes der Bewegung, successive annehmen kann: es sind Gleichungen, welche zugleich eine Abwickelungs-Fläche und die zugehörige Curve doppelter Krümmung darstellen, und zwar, unabhängig von der Lage derselben, bloss ihrer Natur nach. Die Lage von beiden ist erst durch Annahme der geraden Linie, des Punctes und der Ebene in den ursprünglichen Lagen Λ, Π und E bestimmt, und diese Annahme hängt von sechs Constanten ab.

ig. 1. Wir können die successiven Elemente der dargestellten Curve und Abwickelungs-Fläche annäherungsweise construiren. Aus den Gleichungen (1) ergibt sich:

$$d\lambda = \varphi'(t)\,dt, \qquad d\varpi = \psi'(t)\,dt, \qquad d\varepsilon = \chi'(t)\,dt, \tag{3}$$

und somit für jedes gegebene dt das entsprechende $d\lambda$, $d\varpi$ und $d\varepsilon$. Wenn also zur Zeit t die Lagen der geraden Linie L, des Punctes P und der Ebene E bezüglich pl, p und lpl′ sind, so rückt, während des folgenden Zeitmoments dt die Linie L, indem sie in der Ebene lpl′ um den Punct p den Winkel $d\lambda$ beschreibt, von pl nach pl′, der Punct P, indem er auf der geraden Linie pl′ den Weg $d\varpi$ zurücklegt, von p nach p′, und die Ebene E, indem sie um pl′ den Winkel $d\varepsilon$ beschreibt, von lpl′ nach l′pl″. Für den folgenden Zeit-Moment geben, der vorgerückten Zeit entsprechend, die letzten drei Gleichungen wiederum die Werthe für $d\lambda$, $d\varpi$, $d\varepsilon$, die wir wie eben construiren können. Indem wir auf diese Weise fortfahren, erhalten wir ein Polygon pp′p″p‴, das sich der zu bestimmenden Curve doppelter Krümmung im Raume um so mehr annähert, je kleiner wir dt nehmen, und eine von den Ebenen plp′, p′l′p″, p″l″p‴.. gebildete Fläche, deren Gränze die jener Curve zugehörige Abwickelungs-Fläche ist.

39. Die erste der drei Gleichungen (2) ist unabhängig von ε, und würde also auch unverändert dieselbe sein, wenn ε immer Null geblieben wäre, oder, was dasselbe ist, wenn wir die Abwickelungs-Fläche mit der zugehörigen Curve in die ursprüngliche Ebene E abgewickelt hätten. Nach der Abwickelung ist der von den geraden Linien Λ und L gebildete Winkel der Werth von λ, während die Länge der Curve oder ϖ unverändert geblieben ist. Bei dieser Abwickelung bleibt die erste Krümmung der Curve, welche für jeden ihrer Puncte in der bezüglichen Osculations-Ebene zu nehmen ist, ebenfalls unverändert, während gleichzeitig der Curve ihre zweite Krümmung genommen wird. Die abgewickelte Curve und ihre Ebene werden durch die beiden simultanen Gleichungen:

$$X(\lambda,\varpi) = 0, \qquad \varepsilon = 0, \tag{4}$$

dargestellt. Für irgend einen Punct dieser Curve, und also auch für den entsprechenden Punct der Curve im Raume, ist

$$\frac{d\lambda}{d\varpi} = \frac{d\lambda}{dt} : \frac{d\varpi}{dt} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

der Krümmungshalbmesser, und der reciproke Werth desselben

$$\frac{d\varpi}{d\lambda} = \frac{d\varpi}{dt} : \frac{d\lambda}{dt}$$

das Maass der ersten Krümmung (Flexion). Berücksichtigen wir, dass $\frac{d\varpi}{dt}$ die Geschwindigkeit des Punctes P und $\frac{d\lambda}{dt}$ die Drehungs-Geschwindigkeit der geraden Linie L zur Zeit t ist, so ergibt sich der folgende Satz:

Das Maass der ersten Krümmung einer Curve im Raume ist gleich der Winkel-Geschwindigkeit der diese Curve umhüllenden geraden Linie, getheilt durch die Geschwindigkeit des dieselbe beschreibenden Punctes.*)

40. Die zweite der drei Gleichungen (2) ist unabhängig von λ und würde also auch unverändert dieselbe sein, wenn λ immer gleich Null geblieben wäre. Dann aber wäre dieselbe gerade Linie A gleichzeitig von dem Puncte P beschrieben und von der Ebene E umhüllt worden. Die folgenden beiden simultanen Gleichungen:

$$\Phi(\varepsilon, \varpi) = 0, \qquad \lambda = 0, \tag{5}$$

stellen also dieselbe gerade Linie in doppeltem Sinne dar, einmal als die rectificirte Curve im Raume, das andere Mal als eine gerade Linie, auf welche sich die Abwickelungs-Fläche dadurch reducirt hat, dass die umhüllende Fläche in allen ihren Lagen durch diese gerade Linie geht. Um, von einer gegebenen Abwickelungs-Fläche und der zugehörigen Curve ausgehend, zu der Bedeutung des letzten Gleichungen-Paares zu gelangen, müssen wir in folgender Weise verfahren: Es sei $l''''p'''l'''$ die Ebene E in ihrer äussersten Lage; diese Ebene wollen wir so fortbewegen, dass sie mit der vorhergehenden Ebene $l'''p'''l''$ fortwährend denselben Winkel bildet und dass die Durchschnittslinie beider Ebenen $p'''l'''$ um den Punct p'' sich dreht, bis sie mit der vorhergehenden Linie $p''l''$ zusammenfällt. Dann sind auf diese gerade Linie zwei Elemente der Curve im Raume, $p'p''$ und $p''p'''$, zurückgeführt, und durch dieselbe gehen die beiden Ebenen $l''''p'''l'''$ und $l'''p''l''$, früher beide Osculations-Ebenen dieser Curve. Auf gleiche Weise können wir fortfahren und die Linie $p''l''$ mit den beiden auf ihr liegenden Elementen und den beiden durch dieselbe gehenden geraden Linien in der Osculations-Ebene $l''p'l'$ um den Punct p' sich drehen lassen, bis drei Elemente der Curve, pp', $p'p''$ und $p''p'''$, in die gerade Linie $p'l'$ fallen und durch dieselbe die drei Osculations-Ebenen $l''''p'''l'''$, $l'''p''l''$ und $l''p'l'$ gehen. Hiernach bringen wir zuletzt alle Elemente der Curve auf die Linie L in der ursprünglichen Lage A, wobei dann zugleich alle Osculations-Ebenen der Curve durch dieselbe Linie gehen.

Bei der Bestimmung der zweiten Krümmung einer Curve im Raume tritt die Drehung der Osculations-Ebene derselben, beim Uebergange von einem Puncte zum andern, an die Stelle der Drehung ihrer Tangenten, die für die erste Krümmung bestimmend war. Als Krümmungshalbmesser ür die zweite Flexion der Curve erhalten wir also:

$$\frac{d\varpi}{d\varepsilon} = \frac{d\varpi}{dt} : \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\phi'(t)}{\chi'(t)},$$

*) Vergl. Theorie der algebraischen Curven p. 205.

und für den reciproken Werth desselben oder das Maass der Krümmung:

$$\frac{d\varepsilon}{d\varpi} = \frac{d\varepsilon}{dt} : \frac{d\varpi}{dt}.$$

Drücken wir die letzte Gleichung in Worten aus, so ergibt sich der nachstehende Satz:

Das Maass der zweiten Krümmung einer Curve im Raume ist gleich der Winkel-Geschwindigkeit der die zugehörige Abwickelungs-Fläche umhüllenden, die Curve selbst osculirenden Ebene, getheilt durch die Geschwindigkeit des die Curve beschreibenden Punctes.

Um den Krümmungshalbmesser der zweiten Flexion für jeden Punct der Curve im Raume zu bestimmen, brauchen wir bloss die erste der Gleichungen (5), wie die erste der Gleichungen (4), als eine ebene Curve, ε mit λ vertauschend, zu construiren. Dann ist der von den äussersten Tangenten dieser Curve gebildete Winkel derjenige Werth von ε, welcher dem Endpuncte der Curve im Raume entspricht, während die Länge der beiden Curven dieselbe ist. Und, so wie wir in irgend einem Puncte der gegebenen Curve im Raume den Halbmesser der ersten Krümmung als den Krümmungshalbmesser der Abwickelungs-Curve in dem entsprechenden Puncte construiren können, so können wir den Halbmesser der zweiten Krümmung als den Krümmungshalbmesser der eben bestimmten Curve in dem entsprechenden Puncte construiren. Entsprechende Puncte der drei Curven sind hierbei solche, denen gleiche Bogenlängen entsprechen.

41. Die dritte der drei Gleichungen (2) ist unabhängig von ϖ und würde also auch unverändert dieselbe sein, wenn ϖ immer gleich Null geblieben wäre, das heisst, wenn der beschreibende Punct seine ursprüngliche Lage behalten hätte. Die Curve im Raume reducirt sich hierbei auf einen Punct, die Abwickelungsfläche auf einen Kegel. Beide werden durch die simultanen Gleichungen:

$$\Psi(\lambda, \varepsilon) = 0, \qquad \varpi = 0,$$

dargestellt. Um den Kegel zu construiren, wenn die Curve im Raume oder die zugehörige Abwickelungs-Fläche gegeben ist, brauchen wir bloss die gerade Linie, welche die erstere umhüllt, die letztere beschreibt, in ihren verschiedenen Lagen parallel mit sich selbst, durch den ursprünglichen Punct Π zu legen; so entsteht alsdann der fragliche Kegel, dessen Tangential-Ebenen parallel sind der die Curve osculirenden, die Fläche umhüllenden Ebene in ihren verschiedenen Lagen.

Für jede Seite dieses Kegels, und also auch für jede Tangente der Curve, jede Seite der Abwickelungs-Fläche erhalten wir aus der ersten der vorstehenden Gleichungen einen vollkommen bestimmten Werth für $\frac{d\varepsilon}{d\lambda}$, den wir das Maass der conischen Krümmung der Curve oder auch der zugehörigen Abwickelungs-Fläche nennen wollen. Es ist:

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{d\varepsilon}{dt} : \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\chi'(t)}{\varphi'(t)},$$

oder, in Worten ausgedrückt:

Das Maass der conischen Krümmung einer Curve doppelter Krümmung ist gleich der Winkel-Geschwindigkeit der diese Curve osculirenden Ebene, getheilt durch die Winkel-Geschwindigkeit der dieselbe umhüllenden geraden Linie.

Knüpfen wir den Begriff der conischen Krümmung an die Abwickelungs-Fläche, so ist das Maass derselben gleich der Winkel-Geschwindigkeit der dieselbe umhüllenden Ebene, getheilt durch die Winkel-Geschwindigkeit der dieselbe beschreibenden geraden Linie.

So wie wir zur Bestimmung der ersten Krümmung einer räumlichen Curve in einem gegebenen Puncte einen Kreis zu Hülfe nehmen, der überall dieselbe Krümmung hat, so bedienen wir uns nach der vorigen Nummer zur Bestimmung der zweiten Krümmung ebenfalls eines Kreises, oder, was auf dasselbe hinauskommt, aber mehr der Sache entspricht, eines geraden Kreis-Cylinders. Und ebenso bedienen wir uns hier zur Bestimmung der conischen Krümmung eines geraden Kegels mit kreisförmiger Basis. Auf allen Seiten eines solchen ist offenbar die conische Krümmung desselben gleich. Wir wollen dieselbe für einen als gegeben betrachteten Kegel, dessen Seiten mit der Axe desselben einen gegebenen constanten Winkel α bilden, construiren.

Zu diesem Behufe wollen wir uns in den Kegel eine n-seitige Pyramide, deren Basis ein regelmässiges n-Eck ist, beschrieben denken, und dann den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ der Kürze halber durch ξ, ferner den von zwei auf einander folgenden Kanten der Pyramide gebildeten Winkel durch γ und den Nebenwinkel des von zwei auf einander folgenden Seitenflächen gebildeten Winkels durch δ bezeichnen. Dann finden wir auf bekanntem Wege:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2}\delta = \frac{\tang^2 \tfrac{1}{2}\xi \cos^2\alpha}{1+\tang^2 \tfrac{1}{2}\xi \cos^2\alpha},$$

$$\sin \tfrac{1}{2}\gamma = \sin \tfrac{1}{2}\xi \sin\alpha.$$

Diese Gleichungen bestehen, wie gross auch die Zahl n angenommen werden mag; nehmen wir n immer grösser, so nähert sich die eingeschriebene Pyramide immer mehr dem Kegel. Dann werden ξ, und hiermit zugleich γ und δ, immer kleiner, bis sie zuletzt in $d\lambda$ und $d\varepsilon$ übergehen. An dieser Gränze können wir an die Stelle von $\sin\frac{1}{2}\xi$ (und ebenso von $\tang\frac{1}{2}\xi$), $\sin\frac{1}{2}\gamma$ und $\sin\frac{1}{2}\delta$ die entsprechenden Winkel $\frac{1}{2}\xi$, $\frac{1}{2}d\lambda$ und $\frac{1}{2}d\varepsilon$ setzen, und $\tang^2\frac{1}{2}\xi$ gegen die Einheit vernachlässigen. Hiernach gehen die vorstehenden beiden Gleichungen in die folgenden über:

$$d\varepsilon = \xi\cos\alpha, \qquad d\lambda = \xi\sin\alpha,$$

und hieraus ergibt sich:

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{1}{\tang\alpha}.^{*)}$$

Das Maass für die constante conische Krümmung eines geraden Kreis-Kegels ist also der reciproke Werth der trigonometrischen Tangente desjenigen Winkels, welchen die Seiten desselben mit der Axe bilden, dem analog, wie das Maass für die constante Krümmung eines Kreises, der reciproke Werth des Radius desselben ist. Das Maass der conischen Krümmung eines schiefen Kegels oder einer Abwickelungs-Fläche überhaupt auf einer gegebenen Seite desselben ist hiernach möglichst einfach durch einen geraden Kegel, welcher die Fläche auf der gegebenen Seite osculirt, bestimmt.

42. Von den drei Gleichungen (2) bedingen je zwei die dritte, wonach auch zwischen den Bestimmungen der dreifachen Krümmung einer räumlichen Curve eine Abhängigkeit Statt finden muss. Wir haben:

---

*) Wenn wir zwischen den obigen beiden Gleichungen des Textes ξ eliminiren, so ergibt sich nach einfachen Reductionen:

$$\sin\tfrac{1}{2}\delta = \frac{\tang\tfrac{1}{2}\gamma}{\tang\alpha},$$

woraus unmittelbar dasselbe Resultat hervorgeht.

$$\frac{d\varepsilon}{d\varpi} = \frac{d\lambda}{d\varpi} \cdot \frac{d\varepsilon}{d\lambda},$$

oder, in Worten ausgedrückt:

Das Maass der zweiten Krümmung einer räumlichen Curve in einem gegebenen Puncte ist gleich dem Maasse ihrer ersten Krümmung, multiplicirt mit dem Maasse ihrer conischen Krümmung.

§. 3.

Das Zählen der Constanten.

43. Um die Anzahl der Glieder zu bestimmen, welche die allgemeine Function des n. Grades zwischen drei Veränderlichen enthält, können wir diese Function, geordnet nach steigenden Potenzen der Veränderlichen, als zusammengesetzt betrachten aus allen allgemeinen homogenen Functionen von dem 0. bis n. Grade zwischen denselben Veränderlichen. Die allgemeine homogene Function irgend eines m. Grades zwischen drei Veränderlichen besteht aber aus eben so viel Gliedern, als die allgemeine nicht homogene Function desselben Grades zwischen zwei Veränderlichen, nemlich aus:

$$\frac{(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2}.$$

Um also die Anzahl aller Glieder der allgemeinen Function des n. Grades zu erhalten, brauchen wir nach einander für m alle ganze Zahlen von 0 bis n einzusetzen und dann die entsprechenden Werthe des vorstehenden Ausdrucks zu summiren. Auf diese Weise kommt:

$$\frac{1.2}{1.2} + \frac{2.3}{1.2} + \frac{3.4}{1.2} + \ldots + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Diese Anzahl, um Eins vermindert, ist also die Anzahl der Constanten in der allgemeinen Gleichung des n. Grades zwischen drei Veränderlichen, die wir durch $\varphi(n)$ bezeichnen wollen. Hiernach ist

$$\varphi(n) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1 = \frac{n(n^2+6n+11)}{6},$$

so dass $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 3$, $\varphi(2) = 9$, $\varphi(3) = 19$, $\varphi(4) = 34$, $\varphi(5) = 55$, $\varphi(6) = 83$, $\varphi(7) = 119$, $\varphi(8) = 164$, $\varphi(9) = 219$, $\varphi(10) = 285$, und so weiter.

Je nachdem die drei Veränderlichen lineare Punct- oder Plan-Coordinaten bedeuten, stellt die allgemeine Gleichung vom n. Grade die Flächen der n. Ordnung oder n. Classe dar. Im erstern Falle gibt jeder Punct, welcher auf der Fläche liegt, im zweiten Falle jede Tangential-Ebene der Fläche eine lineare Bedingungs-Gleichung zwischen den $\varphi(n)$ Coefficienten der allgemeinen Gleichung des n. Grades. Durch $\varphi(n)$ solcher Bedingungs-Gleichungen sind die sämmtlichen Coefficienten auf lineare Weise bestimmt: eben so viele gegebene Puncte gehören also zur linearen Bestimmung einer Fläche der n. Ordnung, und eben so viele Tangential-Ebenen zur linearen Bestimmung einer Fläche der n. Classe.

44. Es seien

$$\Omega_n = 0, \qquad \Omega'_n = 0 \tag{1}$$

die Gleichungen irgend zweier Flächen der n. Ordnung; dann stellt die Gleichung

$$\Omega_n + \lambda\Omega'_n = 0, \qquad (2)$$

wenn λ eine beliebige Constante bedeutet, irgend eine neue Fläche derselben Ordnung dar, welche durch die Durchschnitts-Curve der beiden Flächen (1) geht. Denn die Coordinaten jedes Punctes dieser Durchschnitts-Curve befriedigen gleichzeitig die beiden Gleichungen (1) und folglich auch die Gleichung (2).

Wenn wir den ersten Theil der letzten Gleichung durch $-\mu\Omega''_n$ bezeichnen, so erhalten wir die folgende identische Gleichung:

$$\Omega_n + \lambda\Omega'_n + \mu\Omega''_n \equiv 0, \qquad (3)$$

welche ausdrückt, dass die drei Flächen der n. Ordnung Ω_n, Ω'_n, Ω''_n eine gemeinschaftliche Durchschnitts-Curve haben.

Jede Fläche der n. Ordnung, welche durch die Durchschnitts-Curve der beiden Flächen Ω_n und Ω'_n geht, lässt sich, bei gehöriger Bestimmung von λ, durch die Gleichung (2) darstellen. Wenn nämlich

$$\Omega''_n = 0$$

die Gleichung einer solchen Fläche ist, so muss, nach der Voraussetzung, die Gleichung:

$$\Omega_n + \mu\Omega''_n = 0$$

bei gehöriger Bestimmung von μ, mit der zweiten der Gleichungen (1) übereinstimmen, was wiederum zu der vorstehenden identischen Gleichung (3) führt. Es ist also (2) die allgemeine Gleichung aller Flächen der n. Ordnung, welche mit den beiden gegebenen Flächen derselben Ordnung Ω_n und Ω'_n eine gemeinschaftliche Durchschnitts-Curve haben: sie stellt alle diese Flächen dar, wenn wir für μ successive alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ einsetzen.

Hierbei sind die Flächen Ω_n und Ω'_n nicht absolut bestimmt, sondern können durch irgend zwei andere, welche willkührlich aus der Gruppe der unendlich vielen Flächen derselben Ordnung, welche dieselbe gemeinschaftliche Durchschnitts-Curve haben, genommen werden. Die Durchschnitts-Curve ist ihrerseits durch irgend zwei Flächen der n. Ordnung, welche, bei willkührlicher zwiefacher Annahme von λ, durch die Gleichung (2) dargestellt werden, bestimmt. Die Anzahl der Constanten jeder solcher zwei Flächen reducirt sich hiernach auf $\varphi(n)-1$, wonach die fragliche Durchschnitts-Curve von $2[\varphi(n)-1]$ Constanten abhängt. Zur linearen Bestimmung dieser Constanten reicht es hin, dass $[\varphi(n)-1]$ Puncte gegeben sind, durch welche die Curve geht, und die also gleichzeitig auf den beiden Flächen, als deren Durchschnitt sie construirt wird, liegen.

Eine räumliche Curve, durch welche sich Flächen der n. Ordnung legen lassen, ist vollkommen bestimmt, wenn $[\varphi(n)-1]$ ihrer Puncte gegeben sind.

Oder, mit andern Worten:

Alle Flächen der n. Ordnung, welche durch $[\varphi(n)-1]$ Puncte gehen, haben eine gemeinschaftliche Durchschnitts-Curve.

45. Flächen der zweiten Ordnung, welche durch 8, Flächen der dritten Ordnung, welche durch 18 gegebene Puncte gehen, haben hiernach dieselbe Durchschnitts-Curve. Zum vollständigen Verständniss der vorstehenden Sätze fügen wir noch die folgenden Erörterungen hinzu.

Durch die Durchschnitts-Curve zweier gegebenen Flächen der n. Ordnung, Ω_n und Ω'_n, lassen sich noch unendlich viele andere Flächen derselben Ordnung legen, deren allgemeine Gleichung (2) ist. Eine einzelne dieser Flächen ist erst bestimmt, wenn der entsprechende Werth von λ gegeben ist, und λ ist gegeben, wenn wir irgend einen Punct der Fläche kennen, welcher nicht auf der

Durchschnitts-Curve liegt. Denn, auf einen gegebenen Punct bezogen, erhalten die Functionen Ω_n und Ω'_n constante Werthe, die wir durch ω und ω' bezeichnen wollen, und hiernach kommt:

$$\lambda = -\frac{\omega}{\omega'}.$$

Liegt der gegebene Punct auf der Durchschnitts-Curve der beiden gegebenen Flächen, so erscheint λ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$; liegt er aber, was vorausgesetzt worden ist, ausserhalb derselben, so ist λ durch die vorstehende Gleichung immer auf einzige Weise bestimmt. Eine Fläche der n. Ordnung ist aber überhaupt durch $\varphi(n)$ Puncte auf lineare Weise gegeben, so dass also zu dem genannten Puncte noch $[\varphi(n)-1]$ gegebene Puncte hinzukommen müssen. Nehmen wir diese auf der Durchschnitts-Curve beliebig an, so tragen sie also zur Bestimmung der Fläche gerade eben so viel bei, als die Gesammtheit aller Puncte dieser Durchschnitts-Curve, die unmittelbar aus der Form der Gleichung (2) sich bestimmen lassen. Hieraus ergeben sich unmittelbar die fraglichen Sätze.

46. Es können zwischen den $\varphi(n)$ Constanten der allgemeinen Gleichung der Flächen n. Ordnung lineare Bedingungs-Gleichungen Statt finden, wodurch die Natur der Flächen particularisirt und die Anzahl der zur Bestimmung derselben nothwendigen Puncte um so viel Einheiten vermindert wird, als Bedingungs-Gleichungen da sind. Hiernach erhalten wir neben dem letzten Satze der 44. Nummer sogleich den folgenden:

Alle solche Flächen der n. Ordnung, welche durch m gegebene Puncte auf lineare Weise bestimmt sind, haben, wenn sie durch $(m-1)$ dieser Puncte gehen, eine gemeinschaftliche Durchschnitts-Curve.

Während dieser Satz als eine Beschränkung des letzten Satzes der 44. Nummer sich darstellt, erhalten wir dagegen in der nachstehenden Auffassung eine Verallgemeinerung desselben.

Alle Flächen der n. Ordnung, welche $[\varphi(n)-1]$ linearen Bedingungs-Gleichungen unterworfen sind, schneiden sich in derselben räumlichen Curve.

Durch $\varphi(n)$ solcher linearen Bedingungs-Gleichungen sind die $\varphi(n)$ Constanten der Fläche, im Allgemeinen, auf einzige Weise bestimmt. Insbesondere führt zu einer solchen linearen Bedingungs-Gleichung die Annahme, dass die Fläche durch einen gegebenen Punct gehen soll.

47. Wir wollen zwei Zahlen p und q so bestimmen, dass

$$n = p + q,$$

und dann annehmen, dass von den $[\varphi(n)-1]$ gegebenen Puncten des letzten Satzes der 44. Nummer $\varphi(p)$ beliebig abgesondert werden, durch welche eine Fläche der p. Ordnung auf lineare Weise bestimmt wird, deren Gleichung die folgende sei:

$$\Omega_p = 0,$$

und ferner voraussetzen, dass alle übrigen Puncte, deren Anzahl

$$\varphi(n) - \varphi(p) - 1 \equiv \varphi(n) - \varphi(n-q) - 1$$

beträgt, auf einer Fläche der q. Ordnung liegen, für deren Gleichung wir

$$\Omega_q = 0$$

nehmen wollen. Alsdann gehört das System der beiden Flächen Ω_p und Ω_q zu denjenigen Flächen der n. Ordnung, welche die gemeinschaftliche Durchschnitts-Curve haben, oder, analytisch ausgedrückt, bei gehöriger Bestimmung der Coefficienten λ und μ, ist:

$$\Omega_n + \lambda\Omega'_n \equiv \mu\Omega_p\Omega_q .$$

Alle Durchschnittspuncte der Flächen n. Ordnung liegen also gleichzeitig entweder auf der Fläche Ω_p oder der Fläche Ω_q und somit ergibt sich der nachstehende Satz.

Alle Flächen der n. Ordnung, welche durch $[\varphi(n) - \varphi(n-q) - 1]$ gegebene, einer Fläche der q. Ordnung angehörende, Puncte gehen, schneiden diese letztgenannte Fläche in ein und derselben Curve.

Setzen wir beispielsweise $q = 1$, so erhalten wir zur Bestimmung einer ebenen Curve n. Ordnung die bekannte Anzahl von

$$\varphi(n) - \varphi(n-1) - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - 1$$

gegebenen Puncten. Ebenso erhalten wir für Bestimmung einer Curve, die auf einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung und überdiess auf einer Fläche der n. Ordnung liegt, indem wir in dem allgemeinen Ausdrucke $q = 2$ setzen, die folgende nothwendige Anzahl von gegebenen Puncten:

$$\varphi(n) - \varphi(n-2) - 1 = (n+1)^2 - 1.$$

Wir können die gegebenen $[\varphi(n) - 1]$ Puncte der Sätze der 44. Nummer auf die beiden Flächen der p. und q. Ordnung auch anders vertheilen, so nemlich, dass auf die Fläche der p. Ordnung $[\varphi(p) + h]$ Puncte und auf die Fläche der q. Ordnung die übrigen $[\varphi(n) - \varphi(p) - h - 1]$ Puncte kommen, und hierbei bloss voraussetzen, dass die letzte Anzahl von Puncten überhaupt zur Bestimmung einer Fläche der q. Ordnung hinreichend sei, wonach

$$\varphi(n) - \varphi(p) - h - 1 \geqq \varphi(q)$$

sein muss, also

$$h < \varphi(n) - \varphi(p) - \varphi(q),$$

oder auch

$$h < \frac{pq(n+4)}{2},$$

weil sich sogleich ergibt, dass

$$\varphi(n) - \varphi(p) - \varphi(q) = \frac{pq(n+4)}{2}.$$

Dann schneiden alle Flächen der n. Ordnung, welche durch die gegebenen $[\varphi(n) - 1]$ Puncte gehen, sich auf denselben beiden Flächen der p. und q. Ordnung.

Die gemeinschaftliche Durchschnitts-Curve aller Flächen der n. Ordnung, welche durch $[\varphi(n) - 1]$ gegebene Puncte geht, zerfällt, wenn von diesen Puncten $[\varphi(p) + h]$ auf einer Fläche der p. und die übrigen auf einer Fläche der q. Ordnung liegen, in zwei verschiedene Curven, die bezüglich den beiden Flächen der p. und q. Ordnung angehören.

48. Es seien ferner

$$\Omega_n = 0, \quad \Omega'_n = 0, \quad \Omega''_n = 0 \tag{1}$$

die Gleichungen irgend dreier gegebenen Flächen der n. Ordnung; dann stellt die folgende Gleichung

$$\Omega_n + \lambda\Omega'_n + \mu\Omega''_n = 0, \tag{2}$$

wenn λ und μ beliebige Constanten bezeichnen ($-\infty$ und $+\infty$ nicht ausgeschlossen) irgend eine neue Fläche derselben Ordnung dar, welche der Bedingung unterworfen ist, dass sie durch alle Durchschnittspuncte der drei gegebenen Flächen Ω_n, Ω'_n und Ω''_n geht, wobei die Anzahl dieser

Durchschnittspuncte n^3 beträgt. Es ist diess augenscheinlich, weil die letzte Gleichung durch die Coordinaten-Werthe jedes Punctes befriedigt wird, welche gleichzeitig die drei Gleichungen (1) befriedigen.

Bezeichnen wir den ersten Theil der Gleichung (2) durch $(-\nu\Omega'''_n)$, so erhalten wir die identische Gleichung:

$$\Omega_n + \lambda\Omega'_n + \mu\Omega''_n + \nu\Omega'''_n \equiv 0,$$

um auszudrücken, dass die vier Flächen Ω_n, Ω'_n, Ω''_n, Ω'''_n durch dieselben n^3 Puncte gehen.

Wir können ferner unmittelbar nachweisen, dass jede Fläche, welche durch die fraglichen n^3 Puncte geht, bei gehöriger Bestimmung von λ und μ, durch die Gleichung (2) dargestellt wird. Es ist, mit andern Worten, diese Gleichung die allgemeine solcher Flächen der n. Ordnung, welche durch n^3 gegebene Puncte gehen, indem unter den unendlich vielen Flächen, die dieser Bedingung unterworfen sind, irgend drei willkührlich herausgenommen und durch Ω_n, Ω'_n und Ω''_n bezeichnet werden.

Zur Particularisirung einer einzelnen Fläche, die durch die allgemeine Gleichung (2) dargestellt wird, ist die Bestimmung der beiden Coefficienten λ und μ nothwendig, und diese sind ihrerseits bestimmt, wenn wir zwei neue Puncte der Fläche kennen. Für diese Fläche können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, die Fläche Ω_n nehmen, dann ist zur Bestimmung derselben nothwendig, dass wir zwei ihrer Puncte kennen, welche nicht gleichzeitig auf den beiden Flächen Ω'_n und Ω''_n liegen. Denn, wenn wir die Coordinaten-Werthe jedes dieser beiden Puncte nach einander in die Gleichung (2) einsetzen, so verschwindet beidesmal Ω_n, während Ω'_n und Ω''_n nicht verschwindende und endliche Werthe erhalten, wonach sich zur Bestimmung der Fläche $\lambda = 0$ und $\mu = 0$ ergibt. Die Fläche wird also hier dadurch bestimmt, dass sie durch n^3 Puncte geht, die gleichzeitig auf zwei (beliebigen) Flächen derselben Ordnung liegen, und ausserdem noch durch irgend zwei ihrer Puncte: sie ist es andrerseits eben so vollständig durch $\varphi(n)$ ihrer Puncte, für welche wir die letztgenannten beiden nehmen und ausserdem noch $[\varphi(n)-2]$ willkührlich aus jenen n^3 Puncten auswählen können. Diese n^3 Puncte tragen also zur Bestimmung der Fläche nicht mehr bei, als jene $[\varphi(n)-2]$, woraus folgt, dass durch diese letztere Anzahl von Puncten die an der Anzahl von n^3 Puncten noch fehlenden

$$n^3 - \varphi(n) + 2$$

Puncte der Fläche vollkommen bestimmt sind.

Alle Flächen der n. Ordnung, welche durch $[\varphi(n)-2]$ gegebene Puncte gehen, schneiden sich überdiess noch in $[n^2-\varphi(n)+2]$ neuen festen Puncten.

Die Bestimmung dieser Puncte hängt von der Auflösung einer Gleichung ab, deren Grad durch die Anzahl derselben bestimmt wird.

Beispielsweise schneiden alle Flächen der zweiten Ordnung, welche durch sieben gegebene Puncte gehen, sich ausserdem noch in einem achten festen Punct, und dieser ist durch die sieben gegebenen auf lineare Weise bestimmt. Alle Flächen der dritten Ordnung, welche durch 17 gegebene Puncte gehen, schneiden sich ausserdem noch in 10 andern festen Puncten.

Insbesondere können auch die Flächen n. Ordnung sich in Systeme von Flächen niederer Ordnung auflösen, Flächen der zweiten Ordnung zum Beispiel in Systeme von zwei Ebenen. Drei solcher Systeme schneiden sich in acht Puncten, welche die Ecken eines Körpers bilden, der, wie ein vierseitiges Prisma, von sechs Vierecken begränzt wird. Solche acht Puncte sind also als die Durchschnittspuncte von unendlich vielen Flächen der zweiten Ordnung anzusehen, in der Art, dass jede Fläche dieser Ordnung, welche durch sieben dieser Puncte geht, zugleich auch den achten Punct enthält.

49. Ein anderer Beweis des vorstehenden Satzes liegt in den nachstehenden Bemerkungen.

Zur Bestimmung der n^3 Durchschnittspuncte der drei Flächen (1) sind irgend drei der durch die allgemeine Gleichung (2) dargestellten Flächen hinreichend. Jede dieser Flächen hängt aber, mit Rücksicht auf die beiden willkührlichen Constanten λ und μ, nur von $[\varphi(n)-2]$ Constanten ab, was zur Bestimmung der n^3 Durchschnittspuncte im Ganzen $3[\varphi(n)-2]$ Constante gibt. Diese Constanten, und somit die n^3 Durchschnittspuncte sind vollkommen bestimmt, wenn insbesondere irgend $[\varphi(n)-2]$ derselben gegeben sind.

Zugleich ist ersichtlich, dass zur Bestimmung der fraglichen n^3 Durchschnittspuncte nicht nothwendig $[\varphi(n)-2]$ derselben gegeben sein müssen, sondern dass auch bloss $3[\varphi(n)-2]$ lineare Bedingungs-Gleichungen zwischen den Coordinaten der n^3 Durchschnittspuncte gegeben sein können. Bei der Uebertragung der Resultate dieses Paragraphen auf Flächen der zweiten Ordnung werden wir in die Discussion dieses neuen Gesichtspunctes eingehen, hier aber die bezügliche Verallgemeinerung des Satzes der vorigen Nummer nicht weiter verfolgen.

50. In diesem Satze kann jeder gegebene Punct durch irgend eine lineare Bedingungs-Gleichung zwischen den Constanten der allgemeinen Gleichung der Flächen der n. Ordnung vertreten werden, wonach die folgenden Sätze sich ergeben.

Alle Flächen der n. Ordnung, welche $[\varphi(n)-2]$ linearen Bedingungs-Gleichungen unterworfen sind, gehen durch dieselben n^3 Puncte.

Alle Flächen der n. Ordnung, welche durch m Puncte auf lineare Weise bestimmt sind, schneiden sich, wenn sie durch $(m-2)$ gegebene Puncte gehen, überdiess noch in denselben (n^3-m+2) Puncten.

51. Es sei, indem wir

$$p+q=r+s=n$$

nehmen,

$$\Omega'_n \equiv \Omega_p \Omega_q, \qquad \Omega''_n \equiv \Omega_r \Omega_s,$$

wonach die Gleichung (2) in die folgende übergeht:

$$\Omega_n + \lambda \Omega_p \Omega_q + \mu \Omega_r \Omega_s = 0. \tag{3}$$

Alsdann bestimmen $[\varphi(n)-2]$ Durchschnittspuncte der Fläche Ω_n mit den beiden Flächen-Systemen Ω_p und Ω_q, Ω_r und Ω_s fortwährend noch die übrigen $[n^3-\varphi(n)+2]$ Durchschnittspuncte. In denselben sämmtlichen n^3 Durchschnittspuncten schneiden sich zugleich auch alle Flächen, welche, bei beliebiger Annahme von λ und μ, durch die vorstehende Gleichung (3) dargestellt werden.

Es zerfallen hier die n^3 Durchschnittspuncte in vier Gruppen von bezüglich nqs, nps, nqr und npr Puncten, welche bezüglich die Durchschnittspuncte der drei nachstehend in Gruppen zusammengestellten Flächen sind:

$$\Omega_n, \Omega_q, \Omega_s; \qquad \Omega_n, \Omega_p, \Omega_s; \qquad \Omega_n, \Omega_q, \Omega_r; \qquad \Omega_n, \Omega_p, \Omega_r.$$

Um auszudrücken, dass durch die gegebenen $[\varphi(n)-2]$ Puncte das System einer Fläche der p. und einer Fläche der q. Ordnung gehe, ist es hinreichend anzunehmen, dass $[\varphi(n)-\varphi(p)-2]$ dieser Puncte auf einer Fläche der q. Ordnung liegen, weil alsdann durch die übrigen $\varphi(p)$ gegebenen Puncte immer eine Fläche der p. Ordnung sich legen lässt. Ferner geht durch dieselben gegebenen $[\varphi(n)-2]$ Puncte das System einer Fläche der r. und einer Fläche der s. Ordnung, wenn von diesen Puncten $[\varphi(n)-\varphi(r)-2]$ auf einer Fläche der s. Ordnung liegen, weil alsdann durch die übrigen $\varphi(r)$ Puncte immer noch eine Fläche der r. Ordnung sich legen lässt. Hiernach kommen von den gegebenen Durchschnittspuncten

$$\varphi(n)-\varphi(p)-\varphi(r)-2 \equiv \varphi(n)-\varphi(n-q)-\varphi(n-s)-2$$

auf die Gruppe nqs, ferner $\varphi(p)$ auf die Gruppe nps und $\varphi(r)$ auf die Gruppe nqr.

Wir wollen zunächst von den beiden Flächen Ω_p und Ω_r abstrahiren; dann sind, nach dem Vorstehenden, die Durchschnittspuncte der drei Flächen

$$\Omega_n = 0, \quad \Omega_q = 0, \quad \Omega_s = 0,$$

deren Anzahl nqs beträgt, sämmtlich bestimmt, wenn irgend

$$\varphi(n)-\varphi(n-q)-\varphi(n-s)-2 \tag{4}$$

derselben gegeben sind. Nur wird hierbei vorausgesetzt, dass, wenn die Flächen Ω_q und Ω_s bestimmt sind, dadurch auch die zugehörigen Flächen Ω_p und Ω_r vollkommen bestimmt werden, oder mit andern Worten, dass die Functionen Ω_p und Ω_r in der Gleichung (3) nicht mit andern derselben Ordnung vertauscht werden können, ohne dass die Gleichung selbst sich dadurch ändert. Es ist aber

$$\lambda\Omega_p\Omega_q+\mu\Omega_r\Omega_s \equiv \lambda(\Omega_p+\sigma\mu\Omega_{n-q-s}\Omega_s)\Omega_q+\mu(\Omega_r-\sigma\lambda\Omega_{n-q-s}\Omega_q)\Omega_s,$$

und wenn wir der Kürze wegen

$$\Omega_p+\sigma\mu\Omega_{n-q-s}\Omega_s \equiv \Omega'_p,$$
$$\Omega_r+\sigma\lambda\Omega_{n-q-s}\Omega_q \equiv \Omega'_r$$

setzen, geht dadurch die Form der Gleichung (3) in die folgende über:

$$\Omega_n+\lambda\Omega'_p\Omega_q+\mu\Omega'_r\Omega_s = 0.$$

Wenn $n<q+s$, so findet diese Umformung nicht Statt; die beiden Flächen Ω_p und Ω_r lassen sich dann nicht mit andern vertauschen und verlangen zu ihrer Bestimmung die volle Anzahl von

$$\varphi(p)+\varphi(r) \equiv \varphi(n-q)+\varphi(n-s)$$

Constanten. Für diesen Fall gilt die obige Zahl-Bestimmung. Wenn aber $n>q+s$, so hängt die Bestimmung der beiden Flächen Ω_p und Ω_r von so viel Constanten weniger ab, als die willkührliche Function $\sigma\Omega_{n-q-s}$ enthält, nemlich nur von

$$\varphi(n-q)+\varphi(n-s)-\varphi(n-q-s)-1.$$

So viele von den gegebenen $[\varphi(n)-2]$ Puncten sind also auch zur Bestimmung dieser beiden Flächen hier hinreichend, so dass wir die übrigen

$$\varphi(n)-\varphi(n-q)-\varphi(n-s)+\varphi(n-q-s)-1 \equiv nqs-\frac{qs(q+s-4)}{2}-1 \tag{5}$$

unter den nqs Durchschnittspuncten der drei Flächen Ω_n, Ω_q, Ω_s annehmen müssen, um dadurch die übrigen

$$\frac{qs(q+s-4)}{2}+1$$

dieser Durchschnittspuncte zu bestimmen. Mit diesem zweiten Falle können wir endlich auch den dritten Fall, dass $n = q+s$, zusammenfassen, indem alsdann $\varphi(n-q-s)$ auf Null sich reducirt.

Wir sind hiernach zu dem nachstehenden Satze gelangt:

Drei Curven der n., q. und s. Ordnung (wir wollen voraussetzen, dass die höchste dieser Ordnungen die n. sei) schneiden sich im Allgemeinen in nqs Puncten:

1°. in dem Falle, dass $n<q+s$, sind, wenn von diesen Durchschnittspuncten

$$\varphi(n)-\varphi(n-q)-\varphi(n-s)-2$$

gegeben sind, dadurch die übrigen

$$nqs-\varphi(n)+\varphi(n-q)+\varphi(n-s)+2$$

vollkommen bestimmt;

2°. in dem Falle, dass $n \overline{\overline{>}} q+s$, sind, wenn von den nqs Durchschnittspuncten

$$nqs-\frac{qs(q+s-4)}{2}-1$$

gegeben sind, dadurch die übrigen

$$\frac{qs(q+s-4)}{2}+1$$

vollkommen bestimmt. *)

52. Wir gelangen auch zu denselben Resultaten, wenn wir, unter der Annahme, dass die beiden Flächen Ω_q und Ω_s gegeben sind, die Constanten der Gleichung (3) zählen, wobei sich, je nachdem $n<q+s$ oder $n \overline{\overline{>}} q+s$, Zahlen ergeben, welche die durch die Ausdrücke (4) und (5) gegebenen Zahlen um zwei Einheiten übertreffen, und dann den letzten Satz der 50. Nummer in Anwendung bringen. Das Resultat, das auf diese Weise unmittelbar gewonnen wird, enthält der folgende Satz.

---

*) Bezeichnen wir die Anzahl derjenigen Puncte, welche bezüglich im ersten und zweiten Falle des Satzes von den gegebenen Puncten bedingt werden, durch M und N, wonach

$$nqs-\varphi(n)+\varphi(n-q)+\varphi(n-s)+2 \equiv M,$$
$$nqs-\varphi(n)+\varphi(n-q)+\varphi(n-s)-\varphi(n-q-s)+1 \equiv N,$$

so ergibt sich

$$M = N+\varphi(n-q-s)+1.$$

Es ist aber

$$\varphi(n-q-s)+1 = \frac{(n-q-s+1)(n-q-s+2)(n-q-s+3)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3};$$

wenn also

$$n = q+s-1,$$
$$n = q+s-2,$$
$$n = q+s-3,$$

so ergibt sich

$$M = N.$$

Wir können hiernach den zweiten Fall des Satzes, wo die Anzahl der bedingten Puncte N oder

$$\frac{qs(q+s-4)}{2}+1$$

beträgt, in der Art ausdehnen, dass wir voraussetzen, es sei bloss

$$n > q+s-4.$$

In dieser Voraussetzung ist die Anzahl der bedingten Puncte unabhängig von n, der Ordnung der ersten Fläche. Ist beispielsweise

$$q = 6, \qquad s = 5,$$

so ergibt sich

$$n > 7, \qquad N = 106,$$
$$n = 7, \qquad M = 105,$$
$$n = 6, \qquad M = 102.$$

Alle Flächen der n. Ordnung, welche, wenn $n < q+s$, durch eine Anzahl von

$$\varphi(n)-\varphi(n-q)-\varphi(n-s)-2,$$

und, wenn $n \geqq q+s$, durch eine Anzahl von

$$nqs-\frac{qs(q+s-4)}{2}-1$$

Puncten der Durchschnitts-Curve zweier gegebenen Flächen der q. und s. Ordnung gehen, schneiden sich überdiess noch, im ersten Falle in denselben

$$nqs-\varphi(n)+\varphi(n-q)+\varphi(n-s)+2,$$

und im zweiten Falle in denselben

$$\frac{qs(q+s-4)}{2}+1$$

neuen Puncten jener Durchschnitts-Curve.

Wir können den Resultaten dieser Nummer eine viel grössere Ausdehnung geben, wenn wir die gegebenen $[\varphi(n)-2]$ Puncte auf andere Weise auf die vier Gruppen von bezüglich nqs, nps, nqr und npr Puncten vertheilen, als wir vorstehend gethan haben. Doch das würde uns hier zu weit führen.

53. Nehmen wir insbesondere $s = 1$, so ist die dritte Fläche eine Ebene und die Durchschnitte der drei Flächen sind die nq Durchschnittspuncte derjenigen beiden ebenen Curven der n. und q. Ordnung, in welcher die Ebene von den beiden ersten Flächen geschnitten wird. Wenn also

$$nq-\frac{q(q-3)}{2}-1$$

Durchschnittspuncte dieser Curven (der allgemeinen Curven ihrer Ordnung) gegeben sind, so sind die übrigen

$$\frac{q(q-3)}{2}-1$$

Durchschnittspuncte dadurch gleichzeitig bestimmt. (Theorie der algebraischen Curven, S. 10.)

Nehmen wir $s = 2$, so werden die ebenen Curven des vorstehenden Satzes durch solche vertreten, die auf einer Fläche der zweiten Ordnung, beispielsweise einer Kugel, beschrieben sind, und die gleichzeitig auf Flächen der n. und q. Ordnung liegen. Von den $2nq$ Durchschnittspuncten zweier solcher Curven sind

$$q(q-2)+1$$

durch die übrigen bestimmt.

54. Die analytischen Entwickelungen der letzten 10 Nummern, die wir in dem Vorstehenden unter der Voraussetzung von Punct-Coordinaten geometrisch gedeutet haben, können wir auf gleiche Weise auch in der Voraussetzung von Plan-Coordinaten deuten, und gewinnen alsdann diejenigen neuen Resultate, die wir auch unmittelbar aus den bereits gewonnenen durch Anwendung des Princips der Reciprocität ableiten können.

Alle Flächen der n. Classe, welche $[\varphi(n)-1]$ gegebene Ebenen berühren, oder die überhaupt $[\varphi(n)-1]$ linearen Bedingungs-Gleichungen unterworfen sind, werden von derselben Abwickelungsfläche umhüllt. (44, 46.)

Beispielsweise werden also alle Flächen der zweiten Classe (und Ordnung), welche acht gegebene Ebenen berühren, von derselben Abwickelungsfläche umhüllt. Wenn insbesondere die acht gegebenen Ebenen zu vier und vier in demselben Puncte sich schneiden, oder auch, wenn fünf derselben einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben, so gehört offenbar ein System von zwei Puncten zu den fraglichen Flächen zweiter Classe und die Abwickelungsfläche ist alsdann ein System von zwei Kegelflächen zweiter Ordnung.

55. Eine Abwickelungsfläche, welche $[\varphi(n)-1]$ gegebene Ebenen berührt, umhüllt unendlich viele Flächen der n. Classe. Wenn von jenen gegebenen Ebenen $[\varphi(p)+h]$ eine Fläche der p. und die übrigen $[\varphi(n)-\varphi(p)-h-1]$ eine Fläche der q. Classe berühren, so gehört zu jenen unendlich vielen Flächen der n. Classe insbesondere auch ein System zweier Flächen der p. und q. Classe, und die Abwickelungsfläche zerfällt in zwei verschiedene, welche einzeln die beiden letztgenannten Flächen der p. und q. Classe umhüllen. (47.)

Es ist hierbei $n = p+q$ und überdiess

$$h < \varphi(n) - \varphi(p) - \varphi(q).$$

Setzen wir insbesondere $h = 0$, so folgt, dass alle Flächen n. Classe, die mit einer gegebenen Fläche der q. Ordnung $[\varphi(n)-\varphi(n-q)-1]$ gemeinschaftliche Tangential-Ebenen haben, ebenso wie die letztgenannte Fläche von derselben Abwickelungsfläche umhüllt werden.

Setzen wir $n = 2$, $p = 1$, $q = 1$, wonach $h = 1$ oder $h = 2$ genommen werden kann, so kommen wir auf dieselben Particularisationen, zu denen wir am Ende der vorigen Nummer gelangt sind.

56. Alle Flächen der n. Classe, welche $[\varphi(n)-2]$ gegebene Ebenen berühren oder überhaupt $[\varphi(n)-2]$ linearen Bedingungs-Gleichungen unterworfen sind, berühren ausserdem noch $[n^3-\varphi(n)+2]$ feste Ebenen. (48, 49.)

Alle Flächen der zweiten Classe und Ordnung, welche sieben gegebene Ebenen berühren, berühren ausserdem auch noch eine achte feste Ebene, die durch die sieben gegebenen auf lineare Weise bestimmt ist. Wenn wir insbesondere drei Systeme von zwei Puncten statt Flächen zweiter Classe nehmen, so bilden diese die drei Paare gegenüberliegender Winkelpuncte eines Oktaeders, dessen acht Seiten-Ebenen, indem sie durch je drei Puncte der drei Systeme gehen, als gemeinschaftliche Tangential-Ebenen von diesen zu betrachten sind. Es lassen sich demselben Oktaeder noch unendlich viele Flächen der zweiten Classe einschreiben, in der Art, dass jede Fläche dieser Classe, welche sieben der acht Seiten-Ebenen berührt, nothwendig auch die achte berühren muss.

57. Drei Flächen der $n.$, $q.$ und $s.$ Classe (wir nehmen n grösser als q und s) haben nqs gemeinschaftliche Tangential-Ebenen. Diese Tangential-Ebenen sind vollständig bestimmt:

1°. in dem Falle, dass $n < q+s$, wenn irgend

$$\varphi(n) - \varphi(n-q) - \varphi(n-s) - 2,$$

und

2°. in dem Falle, dass $n \geqq q+s$, wenn irgend

$$nqs - \frac{qs(q+s-4)}{2} - 1$$

derselben gegeben sind, in der Art, dass alle Flächen der *n*. Classe, welche die jedesmal gegebenen Ebenen berühren, gleichzeitig sämmtlich dieselben *nqs* gemeinschaftlichen Tangential-Ebenen haben. (51.) —

Discussion

der Flächen zweiter Ordnung

und

der Flächen zweiter Classe.

§. 1.

Discussion der allgemeinen homogenen Function des zweiten Grades zwischen vier veränderlichen Grössen.

1. Es sei

$$Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + A'''s^2 + 2B''pq + 2B'pr + 2Bqr + 2Cps + 2C'qs + 2C''rs \qquad (1)$$

die allgemeine homogene Function des zweiten Grades zwischen den vier veränderlichen Grössen p, q, r und s. Im Allgemeinen können wir alsdann drei constante Grössen α, β, γ auf einzige Weise so bestimmen, dass aus dieser Function, die wir der Uebersichtlichkeit wegen durch Ω bezeichnen wollen, wenn wir in dieselbe

$$p + \alpha s, \qquad q + \beta s, \qquad r + \gamma s$$

bezüglich für p, q, r einsetzen, diejenigen Glieder, welche diese drei Veränderlichen nur in der ersten Potenz enthalten, ausfallen, so dass die allgemeine Form der Function Ω in die folgende übergeht:

$$Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + 2B''pq + 2B'pr + 2Bqr + \sigma s^2,$$

die wir, indem wir die ersten sechs Glieder, welche sich auch in der ursprünglichen Form schon vorfinden, in das Symbol $\Omega_,$ zusammenfassen, auf nachstehende Weise schreiben wollen:

$$\Omega_, + \sigma s^2. \qquad (2)$$

Es bedeutet hierbei σ einen, im Allgemeinen, vollkommen bestimmten Coefficienten.

Weiterhin können wir in der Function $\Omega_,$, welche die allgemeine homogene Function des zweiten Grades zwischen bloss drei Veränderlichen ist, die beiden nur mit der ersten Potenz von p und q behafteten Glieder fortschaffen, wenn wir, bei gehöriger, auch hier wiederum linearer Bestimmung zweier constanten Coefficienten α' und β',

$$p + \alpha' r, \qquad q + \beta' r$$

an die Stelle von p und q einsetzen. Dann ergibt sich, wenn wir die drei Glieder $Ap^2 + A'q^2 + 2B''pq$ in das Symbol $\Omega_{,,}$ zusammenfassen, statt der ursprünglichen Function Ω, nun:

$$\Omega_{,,} + \rho r^2 + \sigma s^2, \qquad (3)$$

wobei der Coefficient ρ wiederum, im Allgemeinen, vollkommen bestimmt ist.

Endlich können wir in $\Omega_{,,}$, wenn wir

$$p + \alpha'' q$$

an die Stelle von p einsetzen und α'' gehörig bestimmen, das mit pq behaftete Glied fortschaffen

und erhalten dann endlich, wenn wir zugleich zur Unterscheidung p, q, r und s durch P, Q, R und S ersetzen, statt der ursprünglichen Form die folgende:

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 + \sigma S^2. \tag{4}$$

Hierbei ist $\varkappa$ vollkommen bestimmt und zugleich haben wir, der Symmetrie wegen, π an die Stelle von A geschrieben.

Wir können die in dem Vorstehenden angezeigten successiven Substitutionen zusammenziehen und unmittelbar durch die nachstehenden vier Gleichungen

$$\begin{aligned} s &= S, \\ r &= R + \gamma S, \\ q &= Q + \beta' R + \beta S, \\ p &= P + \alpha'' Q + \alpha' R + \alpha S \end{aligned} \tag{5}$$

von der ursprünglichen Form (1) zu der Form (4) übergehen. Andrerseits können wir auch aus diesen Gleichungen die folgenden ableiten:

$$\begin{aligned} S &= s, \\ R &= r - \gamma s, \\ Q &= q - \beta' r - (\beta - \beta'\gamma)\, s, \\ P &= p - \alpha'' q - (\alpha' - \alpha''\beta')\, r - (\alpha - \alpha'\gamma - \alpha''\beta + \alpha\beta\gamma)\, s, \end{aligned} \tag{6}$$

um die neuen veränderlichen Grössen P, Q, R und S durch die ursprünglichen p, q, r und s auszudrücken.

2. Der Uebergang von der ursprünglichen Form (1) zu der Form (4) hängt von den sechs Constanten α, β, γ, α', β', α'' ab. Wir wollen zuvörderst uns mit der Bestimmung der drei ersten beschäftigen und zu diesem Ende für einen Augenblick

$$\alpha s = p', \qquad \beta s = q', \qquad \gamma s = r'$$

setzen, und während

$$\Omega \equiv f(p, q, r, s),$$

sei insbesondere:

$$\Omega' \equiv f(p', q', r', s).$$

Bei dieser Bezeichnung kommt, wenn wir nach der Taylor'schen Reihe entwickeln:

$$f(p'+p,\ q'+q,\ r'+r,\ s) \equiv \Omega' + \left(\frac{d\Omega'}{dp'}\cdot p + \frac{d\Omega'}{dq'}\cdot q + \frac{d\Omega'}{dr'}\cdot r\right) + \Omega_{,,} \tag{7}$$

wobei wir wiederum $\Omega_{,,}$ in der Bedeutung der vorigen Nummer nehmen, indem wir in dieses Symbol alle Glieder, welche p, q und r in der zweiten Potenz enthalten, mit denen die Entwickelung selbst abbricht, zusammenfassen. Zugleich haben wir, weil Ω' eine homogene Function des zweiten Grades von p', q', r' und s ist, nach bekanntem Theorem, die nachstehende identische Gleichung:

$$\Omega' \equiv \tfrac{1}{2}\left\{\frac{d\Omega'}{dp'}\cdot p' + \frac{d\Omega'}{dq'}\cdot q' + \frac{d\Omega'}{dr'}\cdot r' + \frac{d\Omega'}{ds}\cdot s\right\}.$$

Sollen aus der Function (7), wie es die vorige Nummer fordert, die ersten Potenzen von p, q und r fortfallen, so erhalten wir zur Bestimmung von p', q' und r' die folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{d\Omega'}{dp'} = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dq'} = 0, \qquad \frac{d\Omega'}{dr'} = 0,$$

wonach sich der Werth der Function Ω' sogleich auf

$$\Omega' = \tfrac{1}{2}\frac{d\Omega'}{ds}.s$$

reducirt.

Entwickeln wir die in dem Vorstehenden vorkommenden partiellen Differential-Coefficienten, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\frac{d\Omega'}{dp'} &\equiv Ap' + B''q' + B'r' + Cs,\\
\tfrac{1}{2}\frac{d\Omega'}{dq'} &\equiv B''p' + A'q' + Br' + C's,\\
\tfrac{1}{2}\frac{d\Omega'}{dr'} &\equiv B'p' + Bq' + A''r' + C''s,\\
\tfrac{1}{2}\frac{d\Omega'}{ds} &\equiv Cp' + C'q' + C''r' + A'''s.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also, wenn wir für p', q' und r' ihre obigen Werthe αs, βs und γs wieder einsetzen, zur Bestimmung von α, β, γ die folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
A\alpha + B''\beta + B'\gamma + C &= 0,\\
B''\alpha + A'\beta + B\gamma + C' &= 0,\\
B'\alpha + B\beta + A''\gamma + C'' &= 0,
\end{aligned} \qquad (8)$$

und überdiess kommt:

$$\Omega' = (C\alpha + C'\beta + C''\gamma + A''')\,s^2 = \sigma s^2,$$

indem wir

$$\sigma = C\alpha + C'\beta + C''\gamma + A''' \qquad (9)$$

setzen. Hiernach reducirt sich die Function (7) auf

$$\Omega_1 + \sigma s^2.$$

3. Wir wollen, des leichtern Ueberblicks wegen, die nachstehenden Abkürzungen einführen:

$$\begin{gathered}
AA' - B''^2 \equiv \Xi'', \qquad AA'' - B'^2 \equiv \Xi', \qquad A'A'' - B^2 \equiv \Xi,\\
A''B'' - BB' \equiv \Psi_{23}, \qquad A'B' - BB'' \equiv \Psi_{13}, \qquad AB - B'B'' \equiv \Psi_{03},\\
AA'A'' - (AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2) + 2BB'B'' \equiv \Theta_3.
\end{gathered}$$

Dann erhalten wir, in Folge der Gleichungen (8), für α, β und γ die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\Xi C - \Psi_{23}C' - \Psi_{13}C''}{\Theta_3},\\
\beta &= \frac{\Xi' C' - \Psi_{23}C - \Psi_{03}C''}{\Theta_3},\\
\gamma &= \frac{\Xi'' C'' - \Psi_{13}C - \Psi_{03}C'}{\Theta_3},
\end{aligned}$$

und, wenn wir diese Werthe in (9) substituiren, ergibt sich:

$$\sigma = \frac{A'''\Theta_3 + \Xi C^2 + \Xi' C'^2 + \Xi'' C''^2 - 2\Psi_{23}CC' - 2\Psi_{13}CC'' - 2\Psi_{03}C'C''}{\Theta_3}.$$

Bezeichnen wir den Zähler in diesem Werthe von σ durch Φ, so kommt:

$$\sigma = \frac{\Phi}{\Theta_3},$$

und es ergibt sich, wenn wir diesen Zähler entwickeln:

$$\begin{aligned}\Phi = {} & AA'A''A''' - \{AA'C''^2 + AA''C'^2 + A'A''C^2 + AA'''B^2 + A'A'''B'^2 + A''A'''B''^2\} \\ & + 2\{ABC'C'' + A'B'CC'' + A''B''CC' + A'''BB'B''\} \\ & - 2\{BB'CC' + BB''CC'' + B'B''C'C''\} \\ & + \{B^2C^2 + B'^2C'^2 + B''^2C''^2\}.\end{aligned}$$

Der Ausdruck, welchen wir durch Θ_2 bezeichnet haben, ist symmetrisch in Beziehung auf die den drei Veränderlichen p, q und r auf gleiche Weise entsprechenden Coefficienten der ursprünglichen Function Ω, so dass derselbe bei einer beliebigen Accent-Vertauschung unverändert bleibt. Der Ausdruck, den wir durch Φ bezeichnet haben, ist symmetrisch in Beziehung auf die den vier verschiedenen Veränderlichen p, q, r und s auf gleiche Weise entsprechenden Coefficienten der ursprünglichen Function Ω. *)

4. Es sei ferner

$$\alpha'r = p'', \qquad \beta'r = q'',$$

und während wir überhaupt

$$\Omega_r \equiv F(p, q, r),$$

setzen, insbesondere:

$$\Omega'_r \equiv F(p'', q'', r).$$

Alsdann ergibt sich, wenn wir nach der Taylor'schen Reihe entwickeln:

$$F(p''+p, q''+q, r) \equiv \Omega'_r + \left(\frac{d\Omega'_r}{dp''}\cdot p + \frac{d\Omega'_r}{dq''}\cdot q + \frac{d\Omega'_r}{dr}\cdot r\right) + \Omega_{rr}$$

wobei wir, wie in der 1. Nummer,

$$Ap^2 + A'q^2 + 2B''pq \equiv \Omega_{rr}$$

setzen. Damit aus der vorstehenden Entwickelung die ersten Potenzen von p und q ausfallen, müssen wir p'' und q'' durch die folgenden beiden Gleichungen:

---

*) Der Ausdruck Φ bleibt nemlich unverändert, wenn wir gleichzeitig die beiden Coefficienten in jedem der drei neben einander stehenden Paare einer der nachfolgenden sechs Zusammenstellungen mit einander gegenseitig vertauschen:

A und A',	B und B',	C und C';
A „ A'',	B „ B'',	C „ C'';
A' „ A'',	B' „ B'',	C' „ C'';
A „ A''',	B'' „ C',	B' „ C'';
A' „ A''',	B'' „ C ,	B „ C'';
A'' „ A''',	B' „ C ,	B „ C';

Diese Coefficienten-Vertauschung entspricht einer Vertauschung je zweier der vier Veränderlichen. Wir sind hier nicht mehr, wie in dem Falle von bloss drei Veränderlichen, im Stande, die fragliche Symmetrie durch verschiedene einfache Marken, die den verschiedenen Coefficienten angehängt werden, hervortreten zu lassen. Wir könnten diess bloss durch doppelte Marken. Bezeichneten wir zum Beispiel jeden Coefficienten durch die beiden Veränderlichen, welche er multiplicirt, und die wir hier als blosse Marken ansehen, also A durch pp, A' durch qq, B durch qr oder rq, C durch ps oder sp, und so weiter, so erhielten wir:

$$\begin{aligned}\Phi = {} & pp\,qq\,rr\,ss - \{pp\,qq\,(rs)^2 + pp\,rr\,(qs)^2 + pp\,ss\,(rq)^2 + qq\,rr\,(ps)^2 + qq\,ss\,(pr)^2 + rr\,ss\,(pq)^2\} \\ & + 2\{pp\,qr\,rs\,sq + qq\,pr\,rs\,sp + rr\,pq\,qs\,sp + ss\,pq\,qr\,rp\} \\ & - 2\{pq\,qr\,rs\,sp + pr\,rq\,qs\,sp + pr\,rs\,sq\,qp\} \\ & + \{(pq)^2(rs)^2 + (pr)^2(qs)^2 + (ps)^2(qr)^2\};\end{aligned}$$

ein Ausdruck, der unverändert derselbe bleibt, wie wir auch die vier Marken p, q, r und s unter einander vertauschen mögen.

$$\frac{d\Omega'_{,}}{dp''} = 0, \qquad \frac{d\Omega'_{,}}{dq''} = 0,$$

bestimmen. Da $\Omega'_{,}$ eine homogene Function des zweiten Grades von p'', q'' und r ist, so hat man überhaupt:

$$\Omega'_{,} \equiv \tfrac{1}{2}\left\{\frac{d\Omega'_{,}}{dp''}\cdot p'' + \frac{d\Omega'_{,}}{dq''}\cdot q'' + \frac{d\Omega'_{,}}{dr}\cdot r\right\},$$

und hier insbesondere, mit Berücksichtigung der vorstehenden beiden Gleichungen:

$$\Omega'_{,} = \tfrac{1}{2}\frac{d\Omega'_{,}}{dr}\cdot r.$$

Entwickeln wir, so kommt:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\Omega'_{,}}{dp''} = Ap'' + B''q'' + B'r,$$
$$\tfrac{1}{2}\frac{d\Omega'_{,}}{dq''} = B''p'' + A'q'' + Br,$$
$$\tfrac{1}{2}\frac{d\Omega'_{,}}{dr} = B'p'' + Bq'' + A''r,$$

folglich, wenn wir für p'' und q'' wiederum $\alpha' r$ und $\beta' r$ einsetzen, zunächst

$$A\alpha' + B''\beta' + B' = 0,$$
$$B''\alpha' + A'\beta' + B = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$\alpha' = -\frac{A'B' - BB''}{AA' - B''^2} = -\frac{\Psi_{13}}{\Xi_2},$$
$$\beta' = -\frac{AB - B'B''}{AA' - B''^2} = -\frac{\Psi_{03}}{\Xi_2}.$$

Dann ist ferner:

$$\Omega'_{,} = (B'\alpha' + B\beta' + A'')r^2 = \rho r^2,$$

indem wir

$$B'\alpha' + B\beta' + A'' = \rho$$

setzen. Substituiren wir in den vorstehenden Ausdruck von ρ für α' und β' die obigen Werthe, so kommt:

$$\rho = \frac{A''(AA' - B''^2) - (A'B' - BB'')B' - (AB - B'B'')B}{AA' - B''^2} \equiv \frac{\Theta_3}{\Xi_2}.$$

Wir erhalten hiernach statt der Function $\Omega_{,}$ nun die folgende:

$$\Omega_{,,} + \rho r^2,$$

in welcher der neue Coefficient ρ durch das Vorstehende, im Allgemeinen, vollkommen bestimmt ist.

5. Es sei endlich

$$\alpha'' q = p''',$$

und, indem wir

$$\Omega_{,,} = f(p, q)$$

setzen, insbesondere:

$$\Omega'_{,,} = f(p''', q).$$

Dann kommt:

$$f(p''' + p, q) \equiv \Omega'_{,,} + \frac{d\Omega'_{,,}}{dp'''}\cdot p + Ap^2.$$

Damit p in der ersten Potenz ausfalle, setzen wir:

$$\frac{d\Omega'_{''}}{dp'''} = 0.$$

Da $\Omega'_{''}$ eine homogene Function des zweiten Grades von p''' und q ist, so kommt überhaupt

$$\Omega'_{''} \equiv \tfrac{1}{2}\left\{\frac{d\Omega'_{''}}{dp'''}\cdot p''' + \frac{d\Omega'_{''}}{dq}\cdot q\right\},$$

und hier insbesondere, mit Berücksichtigung der vorhergehenden Gleichung,

$$\Omega'_{''} = \tfrac{1}{2}\frac{d\Omega'_{''}}{dq}\cdot q.$$

Entwickeln wir, so ergibt sich:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\Omega'_{''}}{dp'''} = Ap''' + B''q,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\Omega'_{''}}{dq} = B''p''' + A'q,$$

und also, wenn wir $\alpha''q$ für p''' schreiben:

$$A\alpha'' + B'' = 0,$$

mithin

$$\alpha'' = -\frac{B''}{A},$$

und

$$\Omega'_{''} = (B''\alpha'' + A')\,q^2 = \varkappa q^2,$$

indem wir

$$\varkappa = B''\alpha'' + A' = \frac{AA' - B''^2}{A} = \frac{\Xi_2}{A}$$

setzen. Wir haben hiernach also die Function $\Omega_{''}$ in die folgende:

$$Ap^2 + \varkappa q^2$$

verwandelt und zugleich den Coefficienten $\varkappa$ bestimmt.

6. Wenn wir die Entwickelungen der vorstehenden Nummern zusammenfassen, und uns, wie in der ersten Nummer dieses Paragraphen, zur Unterscheidung, der Buchstaben des grossen Alphabets bedienen, so kommt:

$$\Omega \equiv AP^2 + \frac{\Xi_2}{A}\cdot Q^2 + \frac{\Theta_3}{\Xi_2}\cdot R^2 + \frac{\Phi}{\Theta_3}\cdot S^2,$$

oder auch:

$$\Omega \equiv \pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 + \sigma S^2,$$

indem wir, der Kürze wegen,

$$\pi = A, \qquad \varkappa = \frac{\Xi_2}{A}, \qquad \rho = \frac{\Theta_3}{\Xi_2}, \qquad \sigma = \frac{\Phi}{\Theta_3},$$

setzen.

Für die Unterscheidung der verschiedenen Fälle, welche die Function Ω darbieten kann, sind die Zeichen der vier Coefficienten π, $\varkappa$, ρ und σ characteristisch. Zuvörderst bemerken wir, dass

$$\pi\varkappa\rho\sigma = \Phi.$$

Es treten uns hier zwei coordinirte Hauptfälle entgegen. Wenn nemlich

$$\Phi < 0,$$

so stimmen drei der vier Coefficienten im Zeichen überein, während der vierte im Zeichen abweicht. Dadurch wird der erste Hauptfall angezeigt, für den wir hier keine weitern Unterscheidungen erhalten.

Dem zweiten Hauptfalle entspricht:

$$\Phi > 0,$$

und umfasst zwei coordinirte Fälle. Es können erstens alle Coefficienten im Zeichen übereinstimmen. Dann ist nothwendig und hinreichend, dass das Product je zweier auf einander folgender Coefficienten positiv sei. Diess gibt, da

$$\pi\varkappa = \Xi_2, \qquad \varkappa\rho = \frac{\Theta_3}{A} = \frac{A\Theta_3}{A^2}, \qquad \rho\sigma = \frac{\Phi}{\Xi_2},$$

neben der vorstehenden, noch die folgenden beiden Bedingungen:

$$\Xi_2 > 0,$$
$$A\Theta_3 > 0. \text{ *)}$$

In diesem Falle wird die ursprüngliche Function bei keiner Annahme der vier Veränderlichen p, q, r und s gleich Null.

Wenn zweitens die beiden vorstehenden Bedingungen nicht beide zugleich Statt finden, so haben zwei der vier Coefficienten positive, und die beiden übrigen negative Werthe. Um diesen Fall besonders hervorzuheben, können wir die folgende Form wählen:

$$P^2 - \lambda^2 Q^2 + \mu(R^2 - \gamma^2 S^2),$$

und dann ferner

$$P + \lambda Q \equiv t, \qquad P - \lambda Q \equiv u,$$
$$R + \gamma S \equiv v, \qquad R - \gamma S \equiv w,$$

setzen, wonach

$$\Omega \equiv tu + \mu vw$$

sich ergibt.

7. Den Uebergang zwischen den in der vorigen Nummer bezeichneten beiden Hauptfällen bildet derjenige Fall, in welchem

$$\Phi = 0,$$

der dann Statt findet, wenn gleichzeitig die folgenden vier Gleichungen befriedigt werden können:

$$\frac{d\Omega}{dp} = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dq} = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dr} = 0, \qquad \frac{d\Omega}{ds} = 0.$$

Dann reducirt sich die ursprüngliche homogene Function von vier Veränderlichen auf eine homogene Function von drei Veränderlichen, und zwar ergibt sich bei unserer Umformungsweise

$$\Omega \equiv \pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2,$$

wobei die drei Coefficienten π, $\varkappa$ und ρ ihre bisherige Bedeutung beibehalten.

Wir begegnen hier zwei coordinirten Fällen. Es können erstens alle drei Coefficienten im Zeichen übereinstimmen und dann können wir die bezügliche Function Ω nur dadurch auf Null

---

*) Wenn wir allen Coefficienten der Function Ω entgegengesetzte Zeichen geben, so ändern wir dadurch nur das Zeichen der ganzen Function, nicht ihre Natur. Hierbei behalten Φ und Ξ_2 ihr Zeichen, während A und Θ_3 dasselbe wechseln. Darin liegt der Grund, dass, während das Zeichen der Ausdrücke Φ und Ξ_2 für die Unterscheidung der fraglichen Function characteristisch ist, das Zeichen von Θ_3 diess nicht sein kann, wohl aber das Zeichen von $A\Theta_3$ es wiederum wird.

bringen, dass wir P, Q und R zugleich verschwinden lassen. Diesem Falle entspricht, dass neben der obigen Bedingungs-Gleichung auch noch die folgenden beiden Bedingungen erfüllt werden:

$$\Xi_2 > 0,$$
$$A\Theta_3 > 0.$$

Wenn zweitens diese beiden Bedingungen nicht befriedigt werden, so stimmen nur zwei Coefficienten im Zeichen überein. Als allgemeine Form, die diesem Falle entspricht, können wir die nachstehende nehmen:

$$tu + \varrho v^2 = 0.$$

8. Wenn, bei fernerer Particularisirung, gleichzeitig die folgenden beiden Bedingungs-Gleichungen Statt finden:

$$\frac{\Phi}{\Theta_3} = 0, \qquad \Theta_3 = 0,$$

so reducirt sich die Function Ω auf:

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2,$$

und dieser Ausdruck lässt sich, je nachdem $\pi\varkappa$ positiv oder negativ ist, also je nachdem

$$\Xi_2 > 0,$$

oder

$$\Xi_2 < 0,$$

in zwei imaginäre oder reelle Factoren des ersten Grades auflösen. Wenn also die beiden vorstehenden Bedingungs-Gleichungen befriedigt werden, so ist die ursprüngliche Function ebenfalls in zwei lineare Factoren zerlegbar; nur ist nicht zu übersehen, dass die erste dieser Bedingungs-Gleichungen für zwei zu rechnen ist. Denn da Θ_3 in Folge der zweiten Bedingungs-Gleichung verschwindet, so muss Φ den Ausdruck Θ_3 zum Factor haben und dann muss überdiess auch noch der andere Factor für sich verschwinden, damit $\frac{\Phi}{\Theta_3}$ Null werde. Der fragliche Fall hängt also von drei Bedingungs-Gleichungen ab.

9. Wenn zugleich:

$$\frac{\Phi}{\Theta_3} = 0, \qquad \frac{\Theta_3}{\Xi_2} = 0, \qquad \frac{\Xi_2}{A} = 0,$$

und demnach zwischen den Coefficienten der ursprünglichen Function drei Bedingungs-Gleichungen befriedigt werden, so reducirt sich die fragliche Function auf

$$\pi P^2,$$

so dass sie das Quadrat einer linearen Function ist. Die obigen drei Bedingungs-Gleichungen sind für sechs verschiedene zu rechnen; denn zuvörderst muss Θ_3, in Folge der beiden letztern dieser Gleichungen, sich in zwei Factoren auflösen, welche beide für sich verschwinden, und hiernach, in Folge der ersten dieser Gleichungen, Φ in drei Factoren, die alle drei, einzeln für sich genommen, gleich Null sind. Wir können hiernach auch Φ, Θ_3 und Ξ_2 bezüglich als unendlich kleine Grössen der dritten, zweiten und ersten Ordnung betrachten.

10. Die Unterscheidung der beiden Hauptfälle der Function Ω, welche durch das Zeichen von Φ bestimmt sind, lässt nichts zu wünschen übrig und hierbei ist *a priori* ersichtlich, was früher direct nachgewiesen worden ist, dass Φ symmetrisch sein muss in Beziehung auf die den vier Veränderlichen gleichmässig entsprechenden Coefficienten, oder auch, was dasselbe heisst, unverändert bleiben, wenn wir in der gegebenen Function Ω die vier Veränderlichen beliebig unter einander vertauschen. Aber anders verhält es sich schon bei den beiden Unterscheidungen des zweiten Falles

in der 6. Nummer. Hier treten neue Bedingungen auf, die nicht in Beziehung auf alle vier Veränderlichen symmetrisch sind und nothwendigerweise also auch durch andere ersetzt werden können. Die Absicht der nächsten Entwickelungen ist, was hier noch unvollständig ist, zu ergänzen, um, was dadurch allein erreichbar ist, die möglichste Eleganz zu erreichen und zugleich alle Fragen, welche sich an die Form der entwickelten Ausdrücke knüpfen lassen, zu erledigen.

Zu diesem Zwecke wollen wir die einzuführenden neuen Abkürzungen, zugleich mit den bereits angewandten, übersichtlich zusammenstellen. Wir setzen:

$$\begin{array}{lll} AA' - B''^2 \equiv \Xi_2, & AA'' - B'^2 \equiv \Xi_1, & A'A'' - B^2 \equiv \Xi; \\ A''A''' - C''^2 \equiv Y_2, & A'A''' - C'^2 \equiv Y_1, & AA''' - C^2 \equiv Y; \text{*)} \end{array} \quad \text{I.}$$

ferner

$$\begin{array}{lll} AB - B'B'' \equiv \Psi_{03}, & A'B' - BB'' \equiv \Psi_{13}, & A''B'' - BB' \equiv \Psi_{23}; \\ AC' - CB'' \equiv \Psi_{02}, & A'C - C'B'' \equiv \Psi_{12}, & A'''B'' - CC' \equiv \Psi_{32}; \\ AC'' - CB' \equiv \Psi_{01}, & A''C - C''B' \equiv \Psi_{21}, & A'''B' - CC'' \equiv \Psi_{31}; \\ A'C'' - C'B \equiv \Psi_{10}, & A''C' - C''B \equiv \Psi_{20}, & A'''B - C'C'' \equiv \Psi_{30}; \end{array} \quad \text{II.}$$

wobei die Aufeinanderfolge der beiden dem Symbole Ψ beigefügten Marken nicht gleichgültig ist, und weiterhin:

$$\begin{array}{l} AA'A'' - (AB'^2 + A'B'^2 + A''B''^2) + 2BB'B'' \equiv \Theta_3, \\ AA'A''' - (AC'^2 + A'C^2 + A'''B''^2) + 2CC'B'' \equiv \Theta_2, \\ AA''A''' - (AC''^2 + A''C^2 + A'''B'^2) + 2CC''B' \equiv \Theta_1, \\ A'A''A''' - (A'C''^2 + A''C'^2 + A'''B^2) + 2C'C''B \equiv \Theta. \end{array} \quad \text{III.}$$

Es ergeben sich hier zuvörderst die nachstehenden zwölf identischen Gleichungen, von denen wir nur eine direct zu entwickeln brauchen, um dann durch Vertauschung alle zu erhalten:

$$\begin{array}{lll} \Xi_1\Xi_2 - (\Psi_{03})^2 \equiv A\Theta_3, & \Xi\Xi_2 - (\Psi_{13})^2 \equiv A'\Theta_3, & \Xi\Xi_1 - (\Psi_{23})^2 \equiv A''\Theta_3, \\ Y\Xi_2 - (\Psi_{02})^2 \equiv A\Theta_2, & Y_1\Xi_2 - (\Psi_{12})^2 \equiv A'\Theta_2, & YY_1 - (\Psi_{32})^2 \equiv A'''\Theta_2, \\ Y\Xi_1 - (\Psi_{01})^2 \equiv A\Theta_1, & Y_2\Xi_1 - (\Psi_{21})^2 \equiv A''\Theta_1, & YY_2 - (\Psi_{31})^2 \equiv A'''\Theta_1, \\ Y_1\Xi - (\Psi_{10})^2 \equiv A'\Theta, & Y_2\Xi - (\Psi_{20})^2 \equiv A''\Theta, & Y_1Y_2 - (\Psi_{30})^2 \equiv A'''\Theta. \end{array} \quad \text{IV.}$$

und dann auf ähnliche Weise auch die folgenden zwölf:

$$\begin{array}{lll} \Psi_{03}\Psi_{13} + \Xi_2\Psi_{23} \equiv B''\Theta_3, & \Psi_{03}\Psi_{23} + \Xi_1\Psi_{13} \equiv B'\Theta_3, & \Psi_{13}\Psi_{23} + \Xi\Psi_{03} \equiv B\Theta_3, \\ \Psi_{02}\Psi_{12} + \Xi_2\Psi_{32} \equiv B''\Theta_2, & \Psi_{02}\Psi_{32} + Y\Psi_{12} \equiv C\Theta_2, & \Psi_{12}\Psi_{32} + Y_1\Psi_{02} \equiv C'\Theta_2, \\ \Psi_{01}\Psi_{21} + \Xi_1\Psi_{31} \equiv B'\Theta_1, & \Psi_{01}\Psi_{31} + Y\Psi_{21} \equiv C\Theta_1, & \Psi_{21}\Psi_{31} + Y_2\Psi_{01} \equiv C''\Theta_1, \\ \Psi_{10}\Psi_{20} + \Xi\Psi_{30} \equiv B\Theta, & \Psi_{10}\Psi_{30} + Y_1\Psi_{20} \equiv C'\Theta, & \Psi_{20}\Psi_{30} + Y_2\Psi_{10} \equiv C''\Theta. \end{array} \quad \text{IV.a.}$$

Dann bestehen ferner die folgenden sechs Relationen, indem wir zugleich sechs neue Symbole Λ einführen:

$$\begin{array}{l} \Psi_{03}C' + \Psi_{13}C \equiv \Psi_{02}B + \Psi_{12}B' \equiv \Lambda_{23}, \\ \Psi_{03}C'' + \Psi_{23}C \equiv \Psi_{01}B + \Psi_{21}B'' \equiv \Lambda_{13}, \\ \Psi_{13}C'' + \Psi_{23}C' \equiv \Psi_{10}B' + \Psi_{20}B'' \equiv \Lambda_{03}, \\ \Psi_{02}C'' + \Psi_{32}B' \equiv \Psi_{01}C' + \Psi_{31}B'' \equiv \Lambda_{12}, \\ \Psi_{12}C'' + \Psi_{32}B \equiv \Psi_{10}C' + \Psi_{30}B'' \equiv \Lambda_{02}, \\ \Psi_{21}C' + \Psi_{31}B \equiv \Psi_{20}C + \Psi_{30}B' \equiv \Lambda_{01}. \end{array} \quad \text{V.}$$

Endlich wollen wir noch

*) Für A''' haben wir in den spätern Entwickelungen den Buchstaben D eingeführt.

$$\begin{aligned}
\Xi_2 C'' - \Lambda_{23} &\equiv \Delta_{23},\\
\Xi_1 C' - \Lambda_{13} &\equiv \Delta_{13},\\
\Xi C - \Lambda_{03} &\equiv \Delta_{03},\\
Y B - \Lambda_{12} &\equiv \Delta_{12},\\
Y_1 B' - \Lambda_{02} &\equiv \Delta_{02},\\
Y_2 B'' - \Lambda_{01} &\equiv \Delta_{01}
\end{aligned} \qquad \text{VI.}$$

setzen. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\Xi_2\Psi_{01} - \Psi_{02}\Psi_{03} \equiv A\Delta_{23}, && \Xi_1\Psi_{02} - \Psi_{01}\Psi_{03} \equiv A\Delta_{13}, && Y\Psi_{03} - \Psi_{01}\Psi_{02} \equiv A\Delta_{12},\\
&\Xi_2\Psi_{10} - \Psi_{12}\Psi_{13} \equiv A'\Delta_{23}, && \Xi\Psi_{12} - \Psi_{10}\Psi_{13} \equiv A'\Delta_{03}, && Y_1\Psi_{13} - \Psi_{10}\Psi_{12} \equiv A'\Delta_{02},\\
&\Xi_1\Psi_{20} - \Psi_{21}\Psi_{23} \equiv A''\Delta_{13}, && \Xi\Psi_{21} - \Psi_{20}\Psi_{23} \equiv A''\Delta_{03}, && Y_2\Psi_{23} - \Psi_{20}\Psi_{21} \equiv A''\Delta_{01},\\
&Y\Psi_{30} - \Psi_{31}\Psi_{32} \equiv A'''\Delta_{12}, && Y_1\Psi_{31} - \Psi_{30}\Psi_{32} \equiv A'''\Delta_{02}, && Y_2\Psi_{32} - \Psi_{30}\Psi_{31} \equiv A'''\Delta_{01},
\end{aligned} \qquad \text{VII.}$$

und schliesslich gelangen wir noch, indem wir den in der 3. Nummer für Φ gefundenen Werth:

$$\begin{aligned}
\Phi = {} & AA'A''A''' - \{AA'C''^2 + AA''C'^2 + A'A''C^2 + AA'''B^2 + A'A'''B'^2 + A''A'''B''^2\}\\
& + 2\{ABC'C'' + A'B'CC'' + A''B''CC' + A'''BB'B''\}\\
& - 2\{BB'CC' + BB''CC'' + B'B''C'C''\}\\
& + \{B^2C^2 + B'^2C'^2 + B''^2C''^2\},
\end{aligned} \qquad \text{VIII.}$$

berücksichtigen, zu den nachstehenden vier identischen Gleichungen, von denen wir wiederum nur eine direct zu entwickeln brauchen, um alle übrigen sogleich hinschreiben zu können:

$$\begin{aligned}
\Xi_1\Xi_2 Y - \Xi_1(\Psi_{01})^2 - \Xi_2(\Psi_{02})^2 - Y(\Psi_{03})^2 + 2\Psi_{01}\Psi_{02}\Psi_{03} &\equiv A^2\Phi,\\
\Xi\Xi_2 Y_1 - \Xi(\Psi_{10})^2 - \Xi_2(\Psi_{12})^2 - Y_1(\Psi_{13})^2 + 2\Psi_{10}\Psi_{12}\Psi_{13} &\equiv A'^2\Phi,\\
\Xi\Xi_1 Y_2 - \Xi(\Psi_{20})^2 - \Xi_1(\Psi_{21})^2 - Y_2(\Psi_{23})^2 + 2\Psi_{20}\Psi_{21}\Psi_{23} &\equiv A''^2\Phi,\\
YY_1Y_2 - Y(\Psi_{30})^2 - Y_1(\Psi_{31})^2 - Y_2(\Psi_{32})^2 + 2\Psi_{30}\Psi_{31}\Psi_{32} &\equiv A'''^2\Phi;
\end{aligned} \qquad \text{VIII, a.}$$

und ebenso zu den folgenden sechs:

$$\begin{aligned}
\Theta_3\Theta_2 - (\Delta_{23})^2 &\equiv \Xi_2\Phi,\\
\Theta_3\Theta_1 - (\Delta_{13})^2 &\equiv \Xi_1\Phi,\\
\Theta_3\Theta - (\Delta_{03})^2 &\equiv \Xi\Phi,\\
\Theta_2\Theta_1 - (\Delta_{12})^2 &\equiv Y\Phi,\\
\Theta_2\Theta - (\Delta_{02})^2 &\equiv Y_1\Phi,\\
\Theta_1\Theta - (\Delta_{01})^2 &\equiv Y_2\Phi.
\end{aligned} \qquad \text{IX.}$$

11. Wir haben in der 6. Nummer zur Bestimmung desjenigen Falles, wo die gegebene Function Ω durch keine Werthe der vier Veränderlichen auf Null gebracht werden kann, die folgenden drei Bedingungen erhalten;

$$\Phi > 0, \qquad A\Theta_3 > 0, \qquad \Xi_2 > 0.$$

Aus der zweiten Bedingung folgt, dass A und Θ_3 im Zeichen übereinstimmen, und da wir dieselbe, in Folge der ersten identischen Gleichung IV., auch unter der nachstehenden Form schreiben können:

$$\Xi_1\Xi_2 - (\Psi_{03})^2 > 0,$$

ferner auch, dass mit Ξ_2 zugleich auch Ξ_1 positiv ist. Hiernach ergibt sich aus den beiden ersten Gleichungen I., dass A, A' und A'' im Zeichen übereinstimmen, und ebenso aus den beiden ersten Gleichungen IX., dass Θ_3, Θ_2 und Θ_1 unter sich und also auch mit A, A' und A'' dasselbe Zeichen haben. Weiterhin folgt hieraus und etwa aus der ersten Gleichung der zweiten Vertical-Columne IV., dass mit Ξ_2 zugleich auch Ξ positiv ist, dann aus der dritten Gleichung IX., dass auch Θ mit Θ_3, Θ_2 und Θ_1 im Zeichen übereinstimmt, ferner aus den drei letzten Gleichungen der drei Vertical-

Columnen IV., dass auch Y, Y_1 und Y_2 positiv sind, und endlich aus einer beliebigen der drei letzten Gleichungen I., dass A''' mit A, A' und A'' dasselbe Zeichen hat. Hiernach entsprechen dem fraglichen Falle die nachstehenden Bedingungen:

$$\Phi > 0,$$
$$\Xi > 0, \quad \Xi_1 > 0, \quad \Xi_2 > 0,$$
$$Y > 0, \quad Y_1 > 0, \quad Y_2 > 0,$$

und überdiess stimmen die Ausdrücke

$$\Theta_3, \quad \Theta_2, \quad \Theta_1, \quad \Theta$$

unter sich und mit den Coefficienten

$$A, \quad A', \quad A'', \quad A'''$$

im Zeichen überein.

Nach dem Principe der Symmetrie hätten wir diese vollständigen Bedingungen aus den drei hinreichenden der 6. Nummer sogleich ableiten und hinschreiben können.

12. In dem Falle, dass die homogene Function von vier Veränderlichen Ω auf eine homogene Function von bloss drei Veränderlichen sich reduciren lässt, ist nach der 7. Nummer:

$$\Phi = 0,$$

und demnach stimmen, in Gemässheit der Gleichungen IX., die Werthe von

$$\Theta_3, \quad \Theta_2, \quad \Theta_1, \quad \Theta$$

im Zeichen überein.

Daneben bestehen die Bedingungen der vorigen Nummer, wenn die Function Ω nur durch das gleichzeitige Verschwinden der drei neuen Veränderlichen auf Null gebracht werden kann.

13. Wenn die homogene Function von vier Veränderlichen Ω auf eine homogene Function von bloss zwei Veränderlichen sich reduciren lässt, so bestehen nach der 8. Nummer die beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$\frac{\Phi}{\Theta_3} = 0, \qquad \Theta_3 = 0.$$

In Folge dieser beiden Gleichungen müssen zuvörderst Φ und Θ_3 gleichzeitig verschwinden. Dann gibt die erste der identischen Gleichungen IX.:

$$\Delta_{23} = 0.$$

Wenn $\frac{\Theta_3}{\Xi_2}$ ebenfalls verschwinden, oder, was dasselbe heisst, wenn Θ_3 ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung sein soll, so folgt aus derselben identischen Gleichung, dass überdiess auch:

$$\Theta_2 = 0.$$

Wir können also für die hinreichenden, in der eben angeführten Nummer angedeuteten, Bedingungs-Gleichungen die folgenden nehmen:

$$\Phi = 0, \quad \Theta_3 = 0, \quad \Theta_2 = 0.$$

Vollständig ergibt sich auf dem bisher eingeschlagenen Wege:

$$\Phi = 0,$$
$$\Theta_3 = 0, \quad \Theta_2 = 0, \quad \Theta_1 = 0, \quad \Theta = 0.$$

Zugleich ist

$$\Delta_{23} = 0, \quad \Delta_{13} = 0, \quad \Delta_{03} = 0, \quad \Delta_{12} = 0, \quad \Delta_{02} = 0, \quad \Delta_{01} = 0,$$

und aus den identischen Gleichungen IV. folgt, dass die Werthe der Ausdrücke:

$$\Xi_2, \quad \Xi_1, \quad \Xi, \quad Y, \quad Y_1, \quad Y_2,$$

im Zeichen übereinstimmen; und zwar sind nach der angezogenen Nummer alle positiv oder negativ, je nachdem die Factoren, in welche, der fraglichen Voraussetzung entsprechend, die Function Ω sich auflösen lässt, imaginär oder reell sind. Im ersteren dieser beiden Fälle stimmen, in Gemässheit der identischen Gleichungen I., die vier Coefficienten

$$A, \quad A', \quad A'', \quad A'''$$

im Zeichen überein.

Die obigen drei hinreichenden Bedingungs-Gleichungen können wir durch folgende drei einfachern ersetzen:

$$\Delta_{23} = 0, \quad \Delta_{13} = 0, \quad \Delta_{02} = 0. \text{ *)}$$

14. Wenn endlich die Function Ω auf das Quadrat einer einzigen linearen Function sich reduciren lässt, so ist nach der 9. Nummer:

$$\frac{\Phi}{\Theta_3} = 0, \quad \frac{\Theta_3}{\Xi_2} = 0, \quad \frac{\Xi_2}{A} = 0.$$

Nach den beiden letzten dieser drei Gleichungen verschwinden gleichzeitig Ξ_2 und Θ_3, was in Folge der ersten identischen Gleichung IV. mit sich bringt, dass

$$\Psi_{03} = 0,$$

und wenn überdiess auch $\frac{\Theta_3}{\Xi_2}$ verschwinden soll, wodurch Θ_3 zum unendlich Kleinen der zweiten Ordnung wird, ist nach derselben Gleichung nothwendig auch

$$\Xi_1 = 0.$$

Die erste der identischen Gleichungen IX. zeigt, dass gleichzeitig mit Θ_3 und Ξ_2 auch Δ_{13} verschwinden muss, dass ferner, wenn Φ, Θ_3 und Ξ_2 unendlich kleine Grössen bezüglich von der dritten, zweiten und ersten Ordnung sind, nothwendig auch Θ_2 und Δ_{23} unendlich kleine Grössen von der zweiten Ordnung sein müssen.

Hiernach geben die identischen Gleichungen IV. und IX. schrittweise die nachstehenden 23 Bedingungs-Gleichungen, die wir nach dem Princip der Symmetrie auch ohne Weiteres vollständig hinschreiben können:

$$\Phi = 0,$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & \Theta_3 = 0, & \Theta_2 = 0, & \Theta_1 = 0, & \Theta = 0, & \\
\Xi_2 = 0, & \Xi_1 = 0, & \Xi = 0, & Y = 0, & Y_1 = 0, & Y_2 = 0, \\
\Psi_{03} = 0, & \Psi_{13} = 0, & \Psi_{23} = 0, & \Psi_{02} = 0, & \Psi_{12} = 0, & \Psi_{32} = 0, \\
\Psi_{01} = 0, & \Psi_{21} = 0, & \Psi_{32} = 0, & \Psi_{10} = 0, & \Psi_{20} = 0, & \Psi_{30} = 0.
\end{array}$$

*) Die erste und zweite dieser Bedingungs-Gleichungen gibt nemlich, wenn wir die erste und zweite der identischen Gleichungen VII. und die erste identische Gleicenng IV. berücksichtigen: $\Theta_3 = 0$, die erste und dritte der drei Bedingungs-Gleichungen, unter Berücksichtigung der vierten und sechsten identischen Gleichung VII. und der fünften identischen Gleichung IV.: $\Theta_2 = 0$. In Folge der ersten identischen Gleichung IX. verschwindet hiernach Φ.

Ueberdiess stimmen die vier Coefficienten

$$A, \quad A', \quad A'', \quad A'''$$

im Zeichen überein.

Unter den vorstehenden 23 Bedingungs-Gleichungen können wir für diejenigen, welche wir in der 9. Nummer bereits als die zur Characterisirung des vorliegenden Falles hinreichenden sechs bezeichnet haben, die nachstehenden auswählen:

$$\Phi = 0, \quad \Theta_3 = 0, \quad \Theta_2 = 0, \quad \Xi_2 = 0, \quad Y = 0, \quad \Psi_{02} = 0,$$

oder auch als die möglichst einfachen:

$$\Psi_{03} = 0, \quad \Psi_{13} = 0, \quad \Psi_{23} = 0, \quad \Psi_{12} = 0, \quad \Psi_{32} = 0, \quad \Psi_{31} = 0,$$

welche sich in die folgenden auflösen (II):

$$\begin{aligned} AB &= B'B'', & A'B' &= BB'', & A''B'' &= BB', \\ A'C &= C'B'', & A'''B'' &= CC', & A'''B' &= CC''. \end{aligned}$$

Die jedesmaligen sechs Bedingungs-Gleichungen sind von einander unabhängig, und aus ihnen ergeben sich die übrigen 17 auf linearem Wege.*)

15. Es bleiben uns jetzt nur noch diejenigen Fälle zu discutiren übrig, in welchen die Form

$$AP^2 + \frac{\Xi_2}{A}.Q^2 + \frac{\Theta_3}{\Xi_2}.R^2 + \frac{\Phi}{\Theta_3}.S^2 \qquad (1)$$

dadurch, dass ein Coefficient in derselben unendlich gross wird, aufhört statthaft zu sein. Zuvörderst ist hier zu bemerken, dass wir, weil die obige Transformation in Beziehung auf die vier ursprünglichen Veränderlichen p, q, r und s nicht symmetrisch gewesen ist, zu einer Function von ganz derselben Form auf $1.2.3.4 = 24$ verschiedenen Wegen kommen können. Durch Vertauschung der Marken erhalten wir aus dem vorstehenden Ausdruck sogleich die 23 übrigen, und diese werden in der Regel ihre Geltung auch dann behalten, wenn die Form des vorstehenden Ausdrucks ihre Bedeutung verlieren sollte.

Wenn erstens:

$$\Theta_3 = 0,$$

---

*) Nehmen wir das letzte System von sechs Bedingungs-Gleichungen, so ergibt sich aus den drei ersten derselben, dass Ξ_2, Ξ_1 und Ξ verschwinden, aus den beiden folgenden, dass Y_1 gleich Null ist. Nach der 6. und 5. der identischen Gleichungen IV. folgt hiernach, dass auch Θ_2 und Ψ_{02} verschwinden. Aus dem Verschwinden des letzten Ausdrucks und der fünften Bedingungs-Gleichung folgt, dass auch Y gleich Null ist. Hieraus und aus der letzten Bedingungs-Gleichung ergibt sich, in Folge der zwölften identischen Gleichung IV., dass auch Θ_1 und dann, in Folge der beiden vorhergehenden identischen Gleichungen IV., dass Ψ_{01} und Ψ_{24} verschwinden.

Das Verschwinden von Ψ_{32}, Ψ_{31}, Ψ_{03} und Ξ_2 gibt die folgenden vier Gleichungen:

$$A'''B'' = CC', \quad CC'' = A'''B', \quad B'B'' = AB, \quad AA' = B''^2,$$

und, wenn wir diese Gleichungen gliedweise mit einander multipliciren und den gemeinschaftlichen Factor fortlassen,

$$A'C'' = C'B.$$

Es verschwindet also Ψ_{10} und folglich auch nach den drei letzten identischen Gleichungen IV. Θ, Ψ_{20} und Ψ_{30}.

Φ verschwindet in Folge der identischen Gleichungen IX.

ohne dass zugleich Φ verschwindet, so wird die vorstehende Functions-Form illusorisch. Wir wollen aber nachweisen, dass diess keineswegs seinen Grund in der Natur der Function Ω, sondern bloss in der ursprünglichen Annahme der Veränderlichen s hat, in der Art, dass das Illusorische sogleich fortfällt, sobald wir eine homogene lineare Function von p, q, r und s an die Stelle jener Veränderlichen s setzten. Wir wollen zu diesem Ende

$$\Omega \equiv \Omega_{,} + sh$$

setzen, indem wir $\Omega_{,}$ in derselben Bedeutung als in der 1. Nummer und, der Kürze halber,

$$A'''s + 2C''r + 2C'q + 2Cp \equiv h$$

nehmen. Nach der 4. Nummer bedeutet aber das Verschwinden von Θ_3 oder, was dasselbe ist, von ρ, dass die Function $\Omega_{,}$ sich auf eine homogene Function $\Omega_{,,}$ von bloss zwei Veränderlichen reduciren lässt, für welche wir, in Folge der 5. Nummer die nachstehende erhalten:

$$AP^2 + \frac{\Xi_2}{A} . Q^2 .$$

Hiernach kommt also:

$$\Omega \equiv AP^2 + \frac{\Xi_2}{A} . Q^2 + sh .$$

Auf unendlichfache Art können wir aber zwei neue lineare Veränderlichen M und N und zwei Coefficienten μ und ν so bestimmen, dass

$$\mu M + \nu N \equiv s ,$$
$$\mu M - \nu N \equiv h ,$$

und dann kommt:

$$\Omega \equiv AP^2 + \frac{\Xi_2}{A} . Q^2 + \mu^2 M^2 - \nu^2 N^2 ,$$

also die frühere Form (1), nur dass das ursprüngliche $s \equiv S$ nicht mehr in derselben vorkommen kann. Wir gelangen hier zum ersten Hauptfalle der 6. Nummer, wenn

$$\Xi_2 > 0 ,$$

und zum zweiten der beiden coordinirten Fälle des zweiten Hauptfalles, wenn

$$\Xi_2 < 0 ,$$

während der erste dieser beiden coordinirten Fälle nicht mehr Statt finden kann.
Wenn endlich

$$\Xi_2 = 0 ,$$

so lässt sich Ω auf eine homogene Function von bloss drei Veränderlichen zurückführen.

Der Ausdruck (1) wird zweitens auch dann illusorisch, wenn

$$\Xi_2 = 0 ,$$

ohne dass zugleich Θ_3 verschwindet. Wir erhalten hier zuvörderst, wie in der 2. Nummer, die folgende Form-Bestimmung:

$$\Omega \equiv \Omega_{,} + \frac{\Phi}{\Theta_3} . S^2 .$$

Dann wollen wir ferner die Function $\Omega_{,}$ auf folgende Weise schreiben:

$$\Omega_{,} \equiv \Omega_{,,} + rk ,$$

indem wir $\Omega_{''}$ in der frühern Bedeutung von

$$\Omega_{''} \equiv Ap^2 + A'q^2 + 2B''pq$$

nehmen und, der Kürze halber,

$$A''r + 2Bq + 2B'p \equiv k$$

setzen. In dem Falle, dass Ξ_2 verschwindet, kann nach der 5. Nummer $\Omega_{''}$ die Form AP^2 annehmen. Das Product rk können wir wiederum durch die Differenz zweier Quadrate, unter denen aber r^2 nicht vorkommen kann, ersetzen.*) Hiernach ergibt sich also wiederum die allgemeine Form:

$$AP^2 + \mu^2 M^2 - \nu^2 N^2 + \frac{\Phi}{\Theta_3} S^2,$$

die sich, wenn

$$\Phi < 0,$$

auf den ersten Hauptfall bezieht, weil alsdann das erste und letzte Glied im Zeichen übereinstimmen, in Folge davon, dass, wenn Ξ_2 verschwindet, nach der ersten der Gleichungen IV., der Ausdruck $A\Theta_3$ gleichzeitig mit Φ negativ wird. Wenn

$$\Phi > 0,$$

erhalten wir den zweiten der beiden coordinirten Fälle des zweiten Hauptfalls. Wenn endlich

$$\Phi = 0,$$

so reducirt sich hier, wie überhaupt, die ursprüngliche Function Ω auf eine homogene Function von bloss drei Veränderlichen.

Wenn drittens $A = 0,$

ohne dass zugleich Ξ_2 verschwindet, so wird ebenfalls die Form (1) illusorisch. Dann können wir aber

$$\Omega \equiv \Omega_{''} + \frac{\Theta_3}{\Xi_2} R^2 + \frac{\Phi}{\Theta_3} . S^2$$

setzen, wobei, weil A verschwindet,

$$\Omega_{''} \equiv (A'q + 2B''p)q \equiv lq,$$

indem wir, der Kürze halber,

$$Aq + 2B''p \equiv l$$

schreiben. Auf diesem Wege gelangen wir also wieder zur Form (1). **)

---

*) Es ist nicht zu übersehen, dass die Veränderlichen des Textes p, q, r nicht mehr die ursprünglichen sind, sondern dass, wenn wir dieselben zur Unterscheidung umklammern:

$$p = (p) + \alpha s,$$
$$q = (q) + \beta s,$$
$$r = (r) + \gamma s = R + \gamma S,$$

und endlich

$$p = P + \alpha''(q) + \alpha S.$$

**) Wenn wir auch hier die Veränderlichen des Textes zur Unterscheidung umklammern, ist

$$p = (p) + \alpha' R + \alpha S,$$
$$q = (q) + \beta' R + \beta S,$$

während (r) die bisherige Bedeutung behält.

Es ist somit vollständig nachgewiesen, dass in der 6. bis 9. Nummer alle Unterscheidungen der Function Ω erschöpft sind, vorausgesetzt nemlich, dass wir die vier Veränderlichen als willkührlich angenommene und von einander unabhängige betrachten.

16. Anders aber verhält es sich und neue Unterscheidungen treten hinzu, sobald eine der vier Veränderlichen, etwa s, eine gegebene lineare Function der drei übrigen ist. Dann geht die allgemeine homogene Function der vier Veränderlichen in die allgemeine, nicht homogene, Function von drei Veränderlichen über. Zu einer Function von derselben Form gelangen wir, wenn wir in der bisher behandelten Functions-Form für s eine Constante und insbesondere die Einheit setzen. Demnach sei für die nächsten Entwickelungen:

$$\Omega \equiv Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + 2B''pq + 2B'pr + 2Bqr + 2Cp + 2C'q + 2C''r + D,$$

wobei wir bloss D für A''' geschrieben haben. In dieser neuen Function ist die Coefficienten-Bezeichnung symmetrisch in Beziehung auf die drei übrig gebliebenen Veränderlichen. Diejenigen Ausdrücke, welche wir früher durch Ξ_2, Ξ_1 und Ξ bezeichnet haben, stehen unter sich in gleichmässiger Beziehung zur Function Ω, ebenso Y, Y_1 und Y_2, aber nicht mehr jene mit diesen. Θ, Θ_1 und Θ_2 stehen unter sich in gleicher, mit Θ_3 in verschiedener Beziehung zur Function Ω.

Indem wir auch $S \equiv s$ gleich Eins nehmen, erhalten wir, nach dem Vorhergehenden, mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung, die folgende Form-Bestimmung:

$$\Omega \equiv AP^2 + \frac{\Xi_2}{A}.Q^2 + \frac{\Theta_3}{\Xi_2}.R^2 + \frac{\Phi}{\Theta_3}. \qquad (1)$$

Dem ersten Hauptfalle der 6. Nummer, der dadurch bestimmt ist, dass

$$\Phi < 0,$$

entspricht, dass drei der vier Constanten:

$$A, \quad \frac{\Xi_2}{A}, \quad \frac{\Theta_3}{\Xi_2}, \quad \frac{\Phi}{\Theta_3}$$

im Zeichen übereinstimmen. Hier stellt sich nun aber eine zwiefache Unterscheidung heraus: es kann die im Zeichen abweichende Constante entweder die letzte sein oder eine der drei ersten.

In dem ersten dieser beiden Fälle, dem hiernach die characteristische Form:

$$\Omega = \pm(\pi^2P^2 + \varkappa^2Q^2 + \rho^2R^2 - \sigma^2)$$

entspricht, ist dadurch bestimmt, dass das Product der letzten Constanten mit jeder der drei vorhergehenden negativ ist. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen sind also:

$$\Phi < 0, \quad \Xi_2 > 0, \quad A\Theta_3 > 0. \qquad (2)$$

Vollständig ist

$$\Phi < 0,$$
$$\Xi_2 > 0, \quad \Xi_1 > 0, \quad \Xi > 0,$$

und überdiess stimmen A, A' und A'' unter sich und mit Θ_3 im Zeichen überein.

In dem zweiten Falle, dem die folgende Form entspricht

$$\Omega \equiv \pm(\pi^2P^2 + \varkappa^2Q^2 - \rho^2R^2 + \sigma^2),$$

in welcher das abweichende Zeichen eine dreifache Stelle haben kann, werden die beiden letzten der Bedingungen (2) nicht zugleich befriedigt.

Den beiden coordinirten Fällen des zweiten Hauptfalles der 6. Nummer entsprechen hier keine weitern Unterscheidungen.

17. Neue untergeordnete Fälle ergeben sich, wenn in dem Ausdrucke (1) das letzte Glied nicht unendlich wird, während die Coefficienten eines oder zweier der vorhergehenden Glieder Null werden.

Soll Θ_3 verschwinden, ohne dass zugleich das letzte Glied unendlich wird, so muss Φ den Ausdruck Θ_3 zum Factor haben. Diess bringt nach der ersten Gleichung IX. mit sich, dass

$$\Delta_{23} = 0,$$

und man erhält alsdann:

$$\frac{\Phi}{\Theta_3} = \frac{\Theta_2}{\Xi_2},$$

wonach sich

$$\Omega \equiv AP^2 + \frac{\Xi_2}{A}.Q^2 + \frac{\Theta_2}{\Xi_2} \tag{3}$$

ergibt. Hierbei treten uns drei coordinirte Fälle entgegen.

Es können erstens die beiden ersten Glieder entgegengesetzte Zeichen haben; dann ist

$$\Xi_2 < 0.$$

Das Princip der Symmetrie gibt uns für diesen Fall, welcher durch die Form:

$$\Omega \equiv \pm \{ \pm \pi^2 P^2 \mp \varkappa^2 Q^2 + \sigma^2 \},$$

characterisirt ist, die nachstehenden Bedingungen:

$$\begin{array}{ccccc} \Phi & = 0, & & & \\ \Theta_3 & = 0, & & & \\ \Delta_{23} = 0, & & \Delta_{13} = 0, & & \Delta_{03} = 0, \\ \Xi_2 < 0, & & \Xi_1 < 0, & & \Xi < 0. \end{array}$$

Es können zweitens alle drei Constanten im Zeichen übereinstimmen. Dann ist:

$$\Xi_2 > 0, \qquad A\Theta_2 > 0,$$

und vollständig ergeben sich die nachstehenden Bedingungen:

$$\begin{array}{ccccc} \Phi & = 0, & & & \\ \Theta_3 & = 0, & & & \\ \Delta_{23} = 0, & & \Delta_{13} = 0, & & \Delta_{03} = 0, \\ \Xi_2 > 0, & & \Xi_1 > 0, & & \Xi > 0, \end{array}$$

und überdiess stimmen A, A′ und A″ unter sich, so wie mit Θ, Θ_1 und Θ_2 im Zeichen überein. Die characteristische Form für diesen Fall ist:

$$\Omega \equiv \pm \{ \pi^2 P^2 + \varkappa^2 Q^2 + \sigma^2 \}.$$

Es können drittens die beiden ersten Glieder unter sich, aber nicht mit dem dritten im Zeichen übereinstimmen. Dann erhalten wir dieselben Bedingungen als im vorigen Falle, mit dem einzigen Unterschiede, dass zwar einerseits noch A, A′ und A″, und andrerseits Θ, Θ_1 und Θ_2 unter sich gleiches, in Beziehung auf einander aber entgegengesetztes Zeichen haben. Die characteristische Form ist:

$$\Omega \equiv \pm \{ \pi^2 P^2 + \varkappa^2 Q^2 - \sigma^2 \}.$$

18. Wenn aus der Form (3) auch noch das zweite Glied ausfallen soll, ohne dass das letzte Glied unendlich wird, so muss Ξ_2 Factor von Θ_2 sein. Diess fordert in Folge der fünften der Gleichungen IV.:

$$\Psi_{02} = 0,$$

wonach:

$$\frac{\Theta_2}{\Xi_2} = \frac{Y}{A},$$

so dass die noch weiter particularisirte Form (3) in die nachstehende übergeht:

$$\Omega \equiv AP^2 + \frac{Y}{A}.$$

Hier treten uns wieder zwei neue coordinirte Fälle entgegen, für welche beide

$$\begin{array}{lll} & \Phi = 0, & \\ & \Theta_3 = 0, & \\ \Theta_2 = 0, & \Theta_1 = 0, & \Theta = 0, \\ \Xi_2 = 0, & \Xi_1 = 0, & \Xi = 0, \\ \Psi_{01} = 0, & \Psi_{02} = 0, & \Psi_{12} = 0, \\ \Psi_{10} = 0, & \Psi_{20} = 0, & \Psi_{21} = 0. \end{array}$$

Im ersten dieser Fälle lässt sich die Function Ω in zwei reelle Factoren des ersten Grades zerlegen, wonach noch die folgenden Bedingungen hinzukommen:

$$Y > 0, \quad Y_1 > 0, \quad Y_2 > 0;$$

im zweiten Falle sind die beiden Factoren imaginär und wir erhalten die Bedingungen:

$$Y < 0, \quad Y_1 < 0, \quad Y_2 < 0.$$

19. Wir haben in der 15. Nummer diejenigen Fälle discutirt, wo die Form

$$AP^2 + \frac{\Xi^2}{A}.Q^2 + \frac{\Theta_3}{\Xi_2}.R^2 + \frac{\Phi}{\Theta_3}S^2$$

dadurch, dass ein Coefficient unendlich wird, ihre Bedeutung verliert. In dem zuerst discutirten Falle fiel das Illusorische dieser Form weg, sobald wir statt der vierten Veränderlichen $S \equiv s$ eine andere, von p, q, r und s linear abhängige, Veränderliche einführten. Wenn aber $S \equiv s$ auf eine Constante sich reducirt hat, so kann von einer solchen Vertauschung von S nicht mehr die Rede sein und darum müssen hier nothwendig neue Unterscheidungen der Function Ω hervortreten.

Es sei demnach:

$$\Theta_3 = 0,$$

ohne dass zugleich Φ verschwindet. Dann erhalten wir, wenn wir die Bezeichnung zu Anfang der 15. Nummer beibehalten und bloss $s \equiv 1$ setzen, und h mit H vertauschen:

$$\Omega \equiv AP^2 + \frac{\Xi_2}{A}.Q^2 + H.$$

Um die Bedingungen, die dem fraglichen Falle, der wiederum in zwei coordinirte zerfällt, die durch das Zeichen von Ξ_2 bestimmt werden, entsprechen, vollständig zu entwickeln, bemerken wir zuvörderst, dass in Folge davon, dass Θ_3 verschwindet, die erste der Relationen IX. auf:

$$\begin{aligned} \Xi_2\Phi &= -(\Delta_{23})^2 \\ &= -(C\Psi_{13} + C'\Psi_{03} - C''\Xi_2)^2, \end{aligned}$$

sich reducirt. Aus der ersten identischen Gleichung IV, a. ergibt sich, weil Θ_3 verschwindet:

$$\Xi_2 = -\frac{\Psi_{03}\Psi_{13}}{\Psi_{23}},$$

und wenn wir diesen Werth für Ξ_2 in die letzte Gleichung einsetzen, nach einfachen Reductionen:

$$\Phi = \Psi_{03}\Psi_{13}\Psi_{23}\left\{\frac{C}{\Psi_{03}} + \frac{C'}{\Psi_{13}} + \frac{C''}{\Psi_{23}}\right\}^2,$$

oder auch in Gemässheit der drei ersten identischen Gleichungen IV:

$$\Phi = -\left\{\pm C\sqrt{\Xi} \pm C'\sqrt{\Xi_1} \pm C''\sqrt{\Xi_2}\right\}^2.$$

Es sind vor C, C′ und C″ die obern oder untern Zeichen zu wählen, je nachdem bezüglich die Werthe von Ψ_{03}, Ψ_{13} und Ψ_{23} positiv oder negativ sind. Der Ausdruck für Φ bleibt übrigens derselbe, wenn wir in der Klammer gleichzeitig alle Zeichen ändern.

In Folge der letztgenannten drei Gleichungen und der drei ersten identischen Gleichungen IX. erhalten wir überdiess:

$$\Xi_2 : \Xi_1 : \Xi = (\Delta_{23})^2 : (\Delta_{13})^2 : (\Delta_{03})^2$$
$$= \frac{1}{(\Psi_{23})^2} : \frac{1}{(\Psi_{13})^2} : \frac{1}{(\Psi_{03})^2}.$$

Aus den vorstehenden Ausdrücken ist ersichtlich, dass Ξ_2, Ξ_1 und Ξ unter sich im Zeichen übereinstimmen, aber mit Φ das entgegengesetzte Zeichen haben müssen. Insbesondere folgt diess auch daraus, dass der letztgefundene Ausdruck für Φ nothwendig reell sein muss. Dem ersten der beiden schon erwähnten coordinirten Fälle, für welchen sich die characteristische Form

$$\Omega = \pm\{\pi^2P^2 - \varkappa^2Q^2 + H\},$$

oder auch die folgende ergibt:

$$\Omega \equiv tu + \mu v,$$

entsprechen also die nachstehenden Bedingungen:

$$\Phi > 0,$$
$$\Theta_3 = 0,$$
$$\Xi_2 < 0, \quad \Xi_1 < 0, \quad \Xi < 0;$$

dem zweiten Falle, characterisirt durch die Form:

$$\Omega \equiv \pm\{\pi^2P^2 + \varkappa^2Q^2 + H\},$$

entsprechen die folgenden Bedingungen:

$$\Phi < 0,$$
$$\Theta_3 = 0,$$
$$\Xi_2 > 0 \quad \Xi_1 > 0, \quad \Xi > 0,$$

wobei zugleich die Zeichen von A, A′ und A″ dieselben sind.

Endlich ergibt sich noch ein intermediärer, untergeordneter Fall, characterisirt durch die Form:

$$\Omega \equiv AP^2 + H,$$

welchem die folgenden Bedingungen entsprechen:

$$\Phi = 0,$$
$$\Theta_3 = 0,$$
$$\Xi_2 = 0, \quad \Xi_1 = 0, \quad \Xi = 0,$$
$$\Psi_{23} = 0, \quad \Psi_{13} = 0, \quad \Psi_{03} = 0,$$

und wo überdiess noch A, A′ und A″ unter sich im Zeichen übereinstimmen, aber entgegengesetztes Zeichen haben mit jedem der drei Ausdrücke Θ, Θ_1 und Θ_2. Wir können die drei letzten Bedingungs-Gleichungen für die drei hinreichenden nehmen.

20. Wir haben in den vorstehenden Erörterungen die an die Spitze dieses Paragraphen gestellte Aufgabe vollständig gelöset. Dennoch möchte es angemessen sein, zu zeigen, wie wir auf einem Wege, der von dem in der 1. Nummer bezeichneten und bisher verfolgten ganz verschieden ist, zu denselben Resultaten gelangen können.

Die allgemeine Function sei wiederum:

$$\Omega \equiv Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + A'''s^2 + 2B''pq + 2B'pr + 2Bqr + 2Cps + 2C'qs + 2C''rs.$$

Wir wollen

$$p = P - a''q - a'r - as$$

setzen und, nach dieser Substitution,

$$a'' = \frac{B''}{A}, \qquad a' = \frac{B'}{A}, \qquad a = \frac{C}{A}$$

nehmen. Alsdann fallen aus der umgeformten Function die mit der ersten Potenz von P behafteten Glieder aus, und mit Beibehaltung der Bezeichnung der 10. Nummer:

$$AA' - B''^2 \equiv \Xi_2, \qquad AA'' - B'^2 \equiv \Xi_1, \qquad AA''' - C^2 \equiv Y,$$
$$AB - B'B'' \equiv \Psi_{03}, \qquad A'C' - CB'' \equiv \Psi_{02}, \qquad AC'' - CB' \equiv \Psi_{01},$$

kommt:

$$A\Omega \equiv A^2P^2 + \Xi_2q^2 + \Xi_1r^2 + Ys^2 + 2\Psi_{03}qr + 2\Psi_{02}qs + 2\Psi_{01}rs.$$

Wir wollen weiter

$$q = Q - b'r - bs$$

setzen und, nach dieser Substitution,

$$b' = \frac{\Psi_{03}}{\Xi_2}, \qquad b = \frac{\Psi_{02}}{\Xi_2}$$

nehmen. Alsdann verschwinden aus der umgeformten Gleichung die mit der ersten Potenz von Q behafteten Glieder und wenn wir, wie früher:

$$\Xi_2\Xi_1 - (\Psi_{03})^2 \equiv A\Theta_3, \qquad \Xi_2Y - (\Psi_{02})^2 \equiv A\Theta_2,$$
$$\Xi_2\Psi_{01} - \Psi_{02}\Psi_{03} \equiv A\Delta_{23},$$

setzen, so kommt:

$$A\Xi_2\Omega \equiv A^2\Xi_2P^2 + \Xi_2{}^2Q^2 + A(\Theta_3r^2 + \Theta_2s^2 + 2\Delta_{23}rs).$$

Wir wollen endlich

$$r = R - cS$$

setzen, indem wir zugleich

$$s \equiv S$$

und, nach der Substitution,

$$c = \frac{\Delta_{23}}{\Theta_3}$$

nehmen. Alsdann verschwindet das mit R in der ersten Potenz behaftete Glied, und nehmen wir, wie früher:

$$\Theta_3\Theta_2 - (\Delta_{23})^2 \equiv \Xi_2\Phi,$$

so kommt:

$$\Theta_3r^2 + \Theta_2s^2 + 2\Delta_{23}rs \equiv \Theta_3R^2 + \frac{\Xi_2\Phi}{\Theta_3}.S^2,$$

mithin, wenn wir zugleich durch $A\Xi_2$ dividiren:

$$\Omega \equiv AP^2 + \frac{\Xi_2}{A}.Q^2 + \frac{\Theta_3}{\Xi_2}.R^2 + \frac{\Phi}{\Theta_3}.S^2:$$

dieselbe Form, wie früher.

Wenn wir die vorstehenden Verwandlungs-Formeln zusammenstellen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} P &= p + a''q + a'r + as, \\ Q &= q + b'r + bs, \\ R &= r + cs, \\ S &= s; \end{aligned}$$

und wenn wir umgekehrt die vier ursprünglichen Veränderlichen p, q, r und s durch die neuen P, Q, R und S ausdrücken:

$$\begin{aligned} s &= S, \\ r &= R - cS, \\ q &= Q - b'R - (b - b'c)S, \\ p &= P - a''Q - (a' - a''b')R - (a - a'c - a''b + a'b'c)S. \end{aligned}$$ *)

21. Nachdem wir hiermit von unserer eigentlichen Aufgabe eine zwiefache vollständige Lösung gegeben haben, wollen wir zum Schlusse dieses Paragraphen noch zeigen, wie das Vorstehende uns eine einfache Methode liefert, aus einer Function des zweiten Grades zwischen beliebig vielen Veränderlichen alle Producte je zweier derselben fortzuschaffen. Es wird hierbei genügend sein, die letzten Entwicklungen auf eine homogene Function von fünf Veränderlichen auszudehnen, um zu zeigen, wie wir sie auf alle Functionen dieses Grades unmittelbar ausdehnen können. Die fragliche Function sei:

$$\begin{aligned} \Omega \equiv\ & Ap^2 + A_1q^2 + A_2r^2 + A_3s^2 + A_4t^2 \\ & + 2B_{01}pq + 2B_{02}pr + 2B_{03}ps + 2B_{04}pt + 2B_{12}qr \\ & + 2B_{13}qs + 2B_{14}qt + 2B_{23}rs + 2B_{24}rt + 2B_{34}st. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir, indem wir durch die Gleichung:

$$p = P - a_1q - a_2r - a_3s - a_4t,$$

P statt p einführen, die vier Coefficienten a_1, a_2, a_3 und a_4 durch die Gleichungen:

$$a_1 = \frac{B_{01}}{A}, \quad a_2 = \frac{B_{02}}{A}, \quad a_3 = \frac{B_{03}}{A}, \quad a_4 = \frac{B_{04}}{A},$$

bestimmen und zugleich, der Kürze wegen:

---

*) Zwischen den sechs Coefficienten der Verwandlungs-Formeln der 1. Nummer und den sechs Coefficienten der eben entwickelten, bestehen die folgenden vollkommen gegenseitigen Beziehungen:

$$\begin{aligned} c &= -\gamma, & \gamma &= -c, \\ b' &= -\beta', & \beta' &= -b', \\ b &= -(\beta - \beta'\gamma), & \beta &= -(b - b'c), \\ a'' &= -\alpha'', & \alpha'' &= -a'', \\ a' &= -(\alpha' - \alpha''\beta'), & \alpha' &= -(a' - a''b'), \\ a &= -(\alpha - \alpha'\gamma - \alpha''\beta + \alpha'\beta'\gamma), & \alpha &= -(a - a'c - a''b + a'b'c). \end{aligned}$$

$$AA_1-(B_{01})^2\equiv\Xi_1,\quad AA_2-(B_{02})^2\equiv\Xi_2,\quad AA_3-(B_{03})^2\equiv\Xi_3,\quad AA_4-(B_{04})^2\equiv\Xi_4,$$
$$AB_{12}-B_{01}B_{02}\equiv C_{12},\quad AB_{13}-B_{01}B_{03}\equiv C_{13},\quad AB_{14}-B_{01}B_{04}\equiv C_{14},$$
$$AB_{23}-B_{02}B_{03}\equiv C_{23},\quad AB_{24}-B_{02}B_{04}\equiv C_{24},\quad AB_{34}-B_{03}B_{04}\equiv C_{34},$$

setzen, die folgende identische Gleichung:

$$\Omega\equiv AP^2+\frac{1}{A}\{\Xi_1q^2+\Xi_2r^2+\Xi_3s^2+\Xi_4t^2\}$$
$$+2C_{12}qr+2C_{13}qs+2C_{14}qt+2C_{23}rs+2C_{24}rt+2C_{34}st.$$

Indem wir weiter durch die folgende Gleichung:

$$q=Q-b_2r-b_3s-b_4t,$$

Q statt q einführen, die drei Coefficienten b_2, b_3 und b_4 durch die Gleichungen:

$$b_2=\frac{C_{12}}{\Xi_1},\quad b_3=\frac{C_{13}}{\Xi_1},\quad b_4=\frac{C_{14}}{\Xi_1},$$

bestimmen und zugleich, der Kürze wegen:

$$\Xi_1\Xi_2-(C_{12})^2\equiv A\Theta_2,\quad \Xi_1\Xi_3-(C_{13})^2\equiv A\Theta_3,\quad \Xi_1\Xi_4-(C_{14})^2\equiv A\Theta_4,$$
$$\Xi_1C_{23}-C_{12}C_{13}\equiv AD_{23},\quad \Xi_1C_{24}-C_{12}C_{14}\equiv AD_{24},\quad \Xi_1C_{34}-C_{13}C_{14}\equiv AD_{34}$$

setzen, so kommt:

$$\Omega\equiv AP^2+\frac{\Xi_1}{A}.Q^2+\frac{1}{\Xi_1}\{\Theta_2r^2+\Theta_3s^2+\Theta_4t^2\}$$
$$+2D_{23}rs+2D_{24}rt+2D_{34}st.$$

Indem wir ferner durch die folgende Gleichung:

$$r=R-c_3s-c_4t,$$

R statt r einführen, die beiden Coefficienten c_3 und c_4 durch die Gleichungen:

$$c_3=\frac{D_{23}}{\Theta_2},\qquad c_4=\frac{D_{24}}{\Theta_2},$$

bestimmen und zugleich, der Kürze wegen:

$$\Theta_2\Theta_3-(D_{23})^2\equiv\Xi_1\Phi_3,\qquad \Theta_2\Theta_4-(D_{24})^2\equiv\Xi_1\Phi_4,$$
$$\Theta_2D_{34}-D_{23}D_{24}\equiv\Xi_1E_{34},$$

setzen, so ergibt sich:

$$\Omega\equiv AP^2+\frac{\Xi_1}{A}.Q^2+\frac{\Theta_2}{\Xi_1}.R^2+\frac{1}{\Theta_2}\{\Phi_3s^2+\Phi_4t^2\}$$
$$+2E_{34}rs.$$

Indem wir endlich durch die folgenden Gleichungen:

$$s=S-d_4t,$$
$$t\equiv T,$$

S statt s einführen und t mit T vertauschen, den Coefficienten d_4 durch die folgende Gleichung bestimmen:

$$d_4=\frac{E_{34}}{\Phi_3},$$

und zugleich, der Kürze wegen:

$$\Phi_3\Phi_4-(E_{34})^2\equiv\Theta\Psi_4,$$

setzen, gelangen wir zuletzt zu der Form:

$$\Omega \equiv AP^2 + \frac{\Xi_1}{A}.Q^2 + \frac{\Theta_2}{\Xi_1}.R^2 + \frac{\Phi_3}{\Theta_2}.S^2 + \frac{\Psi_4}{\Phi_3}.T^2. \tag{1}$$

Die Zusammenstellung der verschiedenen Verwandlungs-Formeln gibt:

$$\begin{aligned} T &= t, \\ S &= s + d_4 t, \\ R &= r + c_3 s + c_4 t, \\ Q &= q + b_2 r + b_3 s + b_4 t, \\ P &= p + a_1 q + a_2 r + a_3 s + a_4 t, \end{aligned} \tag{2}$$

und, umgekehrt, erhalten wir Ausdrücke von derselben Form, um die ursprünglichen Veränderlichen durch die neuen auszudrücken. Setzen wir:

$$\begin{aligned} t &= T, \\ s &= S + \delta_4 T, \\ r &= R + \gamma_3 S + \gamma_4 T, \\ q &= Q + \beta_2 R + \beta_3 S + \beta_4 T, \\ p &= P + \alpha_1 Q + \alpha_2 R + \alpha_3 S + \alpha_4 T, \end{aligned} \tag{3}$$

so bestehen zwischen den 10 Coefficienten der fünf ersten Formeln und den 10 Coefficienten der fünf letzten die folgenden 10 Relationen:

$$\begin{aligned} \delta_4 &= -d_4, \\ \gamma_3 &= -c_3, \\ \gamma_4 &= -(c_4 - c_3 d_4), \\ \beta_2 &= -b_2, \\ \beta_3 &= -(b_3 - b_2 c_3), \\ \beta_4 &= -(b_4 - b_3 d_4 - b_2 d_3 + b_2 c_3 d), \\ \alpha_1 &= -a_1, \\ \alpha_2 &= -(a_2 - a_1 b_2), \\ \alpha_3 &= -(a_3 - a_2 c_3 - a_1 b_3 + a_1 b_2 c_3), \\ \alpha_4 &= -(a_4 - a_3 d_4 - a_2 c_4 - a_1 b_4 + a_3 c_3 d_4 + a_1 b_3 d_4 + a_1 b_2 c_4 - a_1 b_2 c_3 d_4). \end{aligned}$$

Die Beziehung der beiden Gruppen von Coefficienten zu einander ist eine durchaus gegenseitige, in der Art, dass wir in den vorstehenden 10 Gleichungen die griechischen und lateinischen Buchstaben gegenseitig mit einander vertauschen können.

22. Das in der 1. Nummer dieses Paragraphen angedeutete Verfahren gibt, wenn wir es auf fünf Veränderliche ausdehnen, auf directem Wege die Coefficienten der Formeln (3), welche wir anwenden müssen, um die ursprüngliche Function auf die einfachere Form (1) zurückzuführen. Und zwar erhalten wir, was man leicht einsieht, wenn wir in der ursprünglichen Form $t = 1$ setzen, diese Function dann durch Ω_0 unterscheiden, und ferner die vier partiellen Differential-Gleichungen:

$$\frac{d\Omega_0}{dp} = 0, \quad \frac{d\Omega_0}{dq} = 0, \quad \frac{d\Omega_0}{dr} = 0, \quad \frac{d\Omega_0}{ds} = 0,$$

entwickeln, vier diese Gleichungen befriedigende Werthe für p, q, r, s, welche bezüglich keine andern sind, als eben die Werthe von α_4, β_4, γ_4, δ_4.

Wenn wir ferner in der ursprünglichen Function

$$t = 0, \qquad s = 1$$

setzen und die neue Function durch $\Omega_,$ unterscheiden, so geben die drei partiellen Differential-Gleichungen:

$$\frac{d\Omega_,}{dp} = 0, \quad \frac{d\Omega_,}{dq} = 0, \quad \frac{d\Omega_,}{dr} = 0,$$

drei Werthe für p, q, r, welche bezüglich die Werthe von α_3, β_3 und γ_3 sind.

Wenn wir ferner

$$t = 0, \quad s = 0, \quad r = 1$$

setzen und die resultirende Function $\Omega_{,,}$ nennen, so sind diejenigen Werthe von p und q, welche durch die partiellen Differential-Gleichungen:

$$\frac{d\Omega_{,,}}{dp} = 0, \qquad \frac{d\Omega_{,,}}{dq} = 0,$$

bestimmt werden, die beiden Constanten α_2 und β_2. Und endlich gibt, wenn wir

$$t = 0, \quad s = 0, \quad r = 0, \quad q = 1$$

setzen und die resultirende Function durch $\Omega_{,,,}$ bezeichnen, die partielle Differential-Gleichung:

$$\frac{d\Omega_{,,,}}{dp} = 0,$$

einen Werth für p, welcher der Werth des letzten Coefficienten α_1 ist.

Nach der Verfahrungsweise der vorigen Nummer erhalten wir zuvörderst und unmittelbar die zehn Coefficienten der Gleichungen (2) und erst aus diesen die Coefficienten der Gleichungen (3). Aber wir gelangen hierzu durch eine blosse Vertauschung und vermeiden dann die weitläufigen Eliminations-Rechnungen, welche die eben angedeuteten Entwicklungen nothwendig verlangen. Wir haben unmittelbar:

$$\delta_4 = -d_4 = -\frac{E_{34}}{\Phi_3}.$$

Nachdem wir diesen Ausdruck entwickelt haben, brauchen wir bloss in demselben die Marke 4 successive mit den Marken 3, 2, 1 zu vertauschen, um die Ausdrücke für γ_4, β_4, α_4 zu erhalten. Wir haben ferner:

$$\gamma_3 = -c_3 = -\frac{D_{23}}{\Theta_2},$$

und erhalten aus diesem Ausdrucke, wenn wir entwickeln und dann die Marke 3 successive mit den Marken 2 und 1 vertauschen, sogleich die Ausdrücke für β_3 und α_3. Wir haben:

$$\beta_2 = -b_2 = -\frac{C_{12}}{\Xi_1},$$

und hieraus, wenn wir entwickeln und die Marken 2 und 1 vertauschen, den Ausdruck für α_2. Endlich ist:

$$\alpha_1 = -a_1 = -\frac{B_{01}}{A}.$$

§. 2.

Aufzählung der Flächen der zweiten Ordnung.

23. Wir wollen diesem Paragraphen die nachstehende Gleichung:

$$Ap^2+A'q^2+A''r^2+A'''s^2+2B''pq+2B'pr+2Bqr+2Cps+2C'qs+2C''rs=0, \qquad (1)$$

zu Grunde legen und alle Ausdrücke der 10. Nummer in ihrer bisherigen Bedeutung beibehalten, und nun, in der Voraussetzung, dass die vier Veränderlichen p, q, r und s lineare Punct-Coordinaten bedeuten, die verschiedenen Arten von Oertern der zweiten Ordnung aufzählen, welche durch diese Gleichung dargestellt werden können.

Es lässt sich diese Gleichung immer, so lange die Annahme der ursprünglichen Veränderlichen ganz allgemein bleibt, auf die folgende Form

$$\pi P^2+\varkappa Q^2+\rho R^2+\sigma S^2=0$$

bringen (15). Es kann aber der Fall eintreten, dass durch das Verschwinden eines oder mehrerer der Coefficienten Glieder dieser neuen Gleichung ausfallen.

Obgleich auch die letzte Gleichung noch 15 Constante, und unter diesen also 6 überzählige, enthält (die Annahme jeder der vier linearen Functionen fordert deren drei; einen der drei Coefficienten π, $\varkappa$, ρ, σ können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, von Vorne herein annehmen), so liefert sie doch schon, nach der 6. Nummer, eine coordinirte und allgemeinste dreifache Unterscheidung der Flächen zweiter Ordnung.

Wenn erstens

$$\Phi>0, \quad \Xi_2>0, \quad A\Theta_3>0,$$

so wird die allgemeine Gleichung (1) durch keine Coordinaten-Werthe irgendwie befriedigt: die Fläche ist eine imaginäre Fläche.

Wenn zweitens

$$\Phi>0,$$

aber nicht zugleich $\Xi_2>0$ und A und Θ_3 im Zeichen übereinstimmen, so lässt sich nach der 6. Nummer die allgemeine Gleichung auf folgende Form mit 13, und folglich noch vier überzähligen, Constanten bringen:

$$tu+\mu vw=0. \qquad (3)$$

Um diese Gleichung zu befriedigen, können wir, bei durchaus willkührlicher Annahme von δ, gleichzeitig:

$$t+\delta v=0,$$
$$\delta u-\mu w=0,$$

setzen. Die erste dieser beiden Gleichungen stellt irgend eine Ebene dar, welche durch die Durchschnittslinie (tv) der beiden Ebenen (t) und (v) geht; die zweite eine Ebene, welche durch die Durchschnittslinie (uw) der beiden Ebenen (u) und (w) geht. Wenn der Werth des unbestimmten Coefficienten δ sich ändert, so drehen sich die beiden Ebenen bezüglich um die geraden Linien (tv) und (uw) und ihre Durchschnittslinie beschreibt dann die durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellte Fläche. Wir werden auf diese Erzeugungs-Weise der Flächen zweiter Ordnung in einem besondern Paragraphen später ausführlich zurückkommen und wollen hier nur hervorheben, wie unmittelbar aus der Form der Gleichung (3) hervorgeht, dass die bezügliche Fläche durch eine gerade Linie beschrieben werden kann: dass sie eine geradlinige Fläche ist.

Wenn drittens

$$\Phi < 0,$$

so können wir, weil dann in der Gleichung (2) nur eines der vier Glieder derselben ein abweichendes Zeichen hat, die allgemeine Gleichung (1) nicht mehr auf die Form (3) bringen. Sie kann die folgende Form:

$$tu + \rho^2 R^2 + \sigma^2 S^2 = 0,$$

annehmen. Wir sehen aber zugleich hieraus, dass die beiden früher durch v und w bezeichneten linearen Functionen imaginär werden und mit ihnen die, im vorigen Falle die Fläche beschreibende, gerade Linie. Eine solche Beschreibungs-Weise fällt also hier fort; die Fläche ist eine nicht geradlinige Fläche.

24. Wenn

$$\Phi = 0,$$

so particularisirt sich die Gleichung (2) folgendergestalt:

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 = 0. \qquad (4)$$

Diese Form enthält eilf Constante, unter denen sich noch drei überzählige befinden; denn in Folge der obigen Bedingungs-Gleichung hat sich die Zahl der nothwendigen Constanten, von welchen die Fläche abhängt, von neun auf acht reducirt.

Wir begegnen hier zwei coordinirten Fällen. Wenn erstens

$$\Xi_2 > 0, \qquad A\Theta_3 > 0,$$

so wird die ursprüngliche Gleichung nur dann befriedigt, wenn gleichzeitig

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0.$$

Sie stellt also einen blossen Punct dar, und zwar denjenigen Punct, in welchem die drei Ebenen (P), (Q) und (R) sich schneiden.

Wenn zweitens die letzten beiden Bedingungen nicht zugleich befriedigt werden, so können wir der Gleichung (4) auch nachstehende Form geben:

$$tu + \mu v^2 = 0, \qquad (5)$$

und dieser, ähnlich wie früher, Genüge thun, indem wir, bei willkührlicher Annahme von δ, gleichzeitig

$$t + \delta v = 0,$$
$$\delta u - \mu v = 0,$$

setzen. Diejenige gerade Linie, welche durch diese beiden Gleichungen dargestellt wird, beschreibt, wenn δ allmählig alle möglichen Werthe erhält, die bezügliche Fläche, wobei sie indess in allen ihren Lagen durch einen festen Punct geht, in welchem sich die drei Ebenen (P), (Q) und (R) schneiden. Die Fläche ist ein Kegel.

25. Wenn ferner gleichzeitig

$$\Phi = 0, \quad \Theta_3 = 0, \quad \Theta_2 = 0,$$

wonach die Anzahl der nothwendigen Constanten sich um drei Einheiten, also auf sechs, reducirt, so zerfällt die gegebene Gleichung in zwei Gleichungen des ersten Grades, und diese sind reell oder imaginär, je nachdem

$$\Xi_2 < 0,$$

oder

$$\Xi_2 > 0.$$

Die dargestellte Fläche degenerirt alsdann in ein System von zwei Ebenen, die im ersten Falle

reell, im zweiten imaginär sind. Im letzten Falle nimmt die allgemeine Gleichung die folgende Form an:

$$\pi^2P^2+\varkappa^2Q^2\equiv(\pi P-\varkappa Q\sqrt{-1})(\pi P+\varkappa Q\sqrt{-1})=0,$$

woraus zugleich ersichtlich ist, dass die fraglichen beiden imaginären Ebenen:

$$\pi P-\varkappa Q\sqrt{-1}=0,$$
$$\pi P+\varkappa Q\sqrt{-1}=0,$$

in einer reellen geraden Linie, welche zugleich auch die Durchschnittslinie der beiden Ebenen (P) und (Q) ist, sich schneiden. Es ist also nur ein andrer Ausdruck für dieselbe Sache, wenn wir sagen, dass die allgemeine Gleichung in diesem Falle eine gerade Linie darstelle.

Wenn endlich (14):

$$\Phi=0,\quad \Theta_3=0,\quad \Theta_2=0,\quad \Xi_2=0,\quad \Upsilon=0,\quad \Psi_{01}=0,$$

so reducirt sich die Anzahl der Constanten auf drei und es stellt die allgemeine Gleichung zwei zusammenfallende Ebenen dar.

26. Die vorstehende Unterscheidung der Flächen zweiter Ordnung können wir als eine collineare bezeichnen, weil irgend zwei verschiedene Flächen, welche derselben Gleichungs-Form entsprechen, in der allgemeinen Verwandtschaft der Collineation stehen.*) Ob diese Flächen sich in's Unendliche erstrecken oder nicht, liegt in ihren Gleichungen unmittelbar nicht ausgedrückt, weil für unendlich weit entfernte Puncte zwar die verschiedenen linearen Functionen unendlich gross werden, ihre Quotienten aber (und nur auf die Bestimmung von diesen kommt es hier allein an) endliche Werthe erhalten. Es verbirgt sich das Unendliche noch unter den überzähligen Constanten der allgemeinen Coordinaten-Annahme. Anders verhält es sich aber, wenn wir die bisher unsern Erörterungen zu Grunde gelegte Gleichung (1) auf die Form

$$Ap^2+A'q^2+A''r^2+2B''pq+2B'pr+2Bqr+2Cp+2C'q+2C''r+D=0$$

bringen können, wo alsdann das unendlich weit Liegende als solches characteristisch hervortritt. Die hier sich anknüpfende speciellere Classificirung der Flächen zweiter Ordnung, als deren allgemeine Gleichung mit bloss drei überzähligen Constanten sich hier die folgende herausstellt:

---

*) Nehmen wir irgend zwei Flächen derselben Unterscheidung, zum Beispiel diejenigen beiden, welche durch die Gleichungen:

$$\pi^2P^2+\varkappa^2Q^2-\rho^2R^2-\sigma^2S^2=0,$$
$$\pi_1{}^2P_1{}^2+\varkappa_1{}^2Q_1{}^2-\rho_1{}^2R_1{}^2-\sigma_1S_1{}^2=0,$$

bei beliebiger Annahme der linearen Functionen und der Coefficienten, dargestellt werden, so drücken, wenn wir, der Kürze wegen,

$$\frac{\pi}{\sigma}\cdot\frac{P}{S}\equiv\vartheta,\qquad \frac{\varkappa}{\sigma}\cdot\frac{Q}{S}\equiv\eta,\qquad \frac{\rho}{\sigma}\cdot\frac{R}{S}\equiv\zeta,$$
$$\frac{\pi_1}{\sigma_1}\cdot\frac{P_1}{S_1}=\vartheta_1,\qquad \frac{\varkappa_1}{\sigma_1}\cdot\frac{Q_1}{S_1}\equiv\eta_1,\qquad \frac{\rho_1}{\sigma_1}\cdot\frac{R_1}{S_1}\equiv\zeta_1,$$

setzen, die Gleichungen:

$$\vartheta=\vartheta_1,\qquad \eta=\eta_1,\qquad \zeta=\zeta_1,$$

welche die allgemeinen Gleichungen der Collineation sind (Einl. 8), den Uebergang von der Gleichung einer Fläche zu der Gleichung der andern Fläche aus. Wenn die lineare Function S auf eine blosse Constante sich reducirt, so sind die letzten Gleichungen die allgemeinen der Affinität.

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 + \sigma = 0,$$

können wir eine affine nennen.

Imaginäre Flächen bestimmen sich hier wie früher; die allgemeine Form ihrer Gleichung ist:

$$\pi^2 P^2 + \varkappa^2 Q^2 + \rho^2 R^2 + \sigma^2 = 0. \qquad \text{I.}$$

Die geradlinigen Flächen bieten keine coordinirten Unterscheidungen dar. Sie heissen, so lange sie überhaupt durch eine vollständige Gleichung von der Form:

$$\pi^2 P^2 + \varkappa^2 Q^2 - \rho^2 R^2 - \sigma^2 = 0, \qquad \text{II.}$$

dargestellt werden können, hyperbolische oder geradlinige oder einschalige Hyperboloide. Um den Ausdruck „einschalig" schon hier zu rechtfertigen, ist es hinreichend zu bemerken, dass jede mit (R) parallele Ebene die Fläche in einer Ellipse schneidet, deren Dimensionen zunehmen, wenn die schneidende Ebene von der Ebene (R) sich weiter entfernt.

Die nicht geradlinigen Flächen zerfallen in zwei coordinirte Gruppen. Der ersten Gruppe entsprechen Gleichungen von der Form:

$$\pi^2 P^2 + \varkappa^2 Q^2 + \rho^2 R^2 - \sigma^2 = 0. \qquad \text{III.}$$

Dieser Fall wird dadurch bestimmt, dass

$$\Phi < 0, \qquad \Xi_{\bar{2}} > 0, \qquad A\Theta_3 > 0.$$

Die bezügliche Fläche hat in Gemässheit der vorstehenden Gleichungs-Form keine Puncte, die unendlich weit liegen; sie heisst Ellipsoid.

Der zweiten Gruppe entsprechen Gleichungen von der folgenden Form:

$$\pi^2 P^2 + \varkappa^2 Q^2 - \rho^2 R^2 + \sigma^2 = 0, \qquad \text{IV.}$$

und wird dadurch bestimmt, dass

$$\Phi < 0,$$

aber nicht zugleich $\Xi_2 > 0$ und $A\Theta_3 > 0$. Die bezügliche Fläche erstreckt sich in's Unendliche und zwar in zwei von einander abgesonderten Schalen, welche zu den beiden Seiten der Ebene (R) liegen, welche keinen Punct mit der Fläche gemein hat. Diese Fläche heisst elliptisches oder zweischaliges Hyperboloid.

Hiermit sind die allgemeinen Fälle von Flächen zweiter Ordnung, Fälle, die von neun Constanten abhangen, erschöpft.

27. Wenn

$$\Theta_3 = 0,$$

ohne dass Φ verschwindet, so reducirt sich die Anzahl der nothwendigen Constanten auf acht. Dann verlieren die Formen I.—IV. ihre Bedeutung und müssen, in Gemässheit der 19. Nummer, durch die folgenden ersetzt werden:

$$\pi^2 P^2 - \varkappa^2 Q^2 + H = 0, \qquad \text{V.}$$

$$\pi^2 P^2 + \varkappa^2 Q^2 + H = 0. \qquad \text{VI.}$$

Statt der ersten dieser beiden Formen können wir auch die folgende nehmen:

$$tu + \mu v = 0,$$

und um diese Gleichung zu befriedigen, bei willkührlicher Bestimmung von δ, gleichzeitig:

$$t + \delta = 0,$$

$$\delta u - \mu v = 0,$$

setzen. Das System dieser beiden Gleichungen stellt eine solche gerade Linie dar, welche, wenn wir δ nach einander alle möglichen Werthe geben, die fragliche Fläche beschreibt. Die beschreibende gerade Linie bleibt in allen ihren Lagen der Ebene (t) parallel und darin unterscheidet sich dieser Fall von der allgemeinern Beschreibung eines geradlinigen Hyperboloids. Die Fläche heisst hyperbolisches oder geradliniges Paraboloid und ist dadurch bestimmt, dass, neben der obigen Bedingungs-Gleichung, auch noch die beiden Bedingungen:

$$\Xi_2 < 0, \qquad \Phi > 0,$$

von welchen eine die andere mit sich bringt, erfüllt werden.

In dem zweiten Falle, wo

$$\Xi_2 > 0, \qquad \Phi < 0,$$

ist die Fläche keine geradlinige und heisst elliptisches Paraboloid.

Die Bestimmungen, dass die allgemeine Gleichung einen Kegel und einen Punct darstelle, sind dieselben als in der 24. Nummer. Die Anzahl der nothwendigen Constanten beträgt acht und die entsprechenden Formen sind:

$$\pi^2P^2 + \varkappa^2Q^2 - \rho^2R^2 = 0, \qquad \text{VII.}$$
$$\pi^2P^2 + \varkappa^2Q^2 + \rho^2R^2 = 0. \qquad \text{VIII.}$$

28. Den gleichzeitigen Bedingungs-Gleichungen

$$\Phi = 0, \qquad \Theta_3 = 0,$$

welche die Anzahl der nothwendigen Constanten auf sieben reduciren, entsprechen drei coordinirte Fälle. Je nachdem erstens

$$\Xi_2 < 0,$$

oder zweitens

$$\Xi_2 > 0, \qquad A\Theta_2 < 0,$$

oder endlich drittens

$$\Xi_2 > 0, \qquad A\Theta_2 > 0,$$

kann die allgemeine Gleichung bezüglich auf die folgenden drei Formen gebracht werden:

$$\pi^2P^2 - \varkappa^2Q^2 - \sigma^2 = 0, \qquad \text{IX.}$$
$$\pi^2P^2 + \varkappa^2Q^2 - \sigma^2 = 0, \qquad \text{X.}$$
$$\pi^2P^2 + \varkappa^2Q^2 + \sigma^2 = 0. \qquad \text{XI.}$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen können wir auch unter der folgenden Form schreiben:

$$u^2 \pm \lambda v(v+\varepsilon),$$

und dann befriedigen, indem wir, bei willkührlicher Annahme von δ, gleichzeitig

$$u \pm \delta v = 0,$$
$$\delta u + \lambda(v+\varepsilon) = 0,$$

setzen. Die durch diese beiden Gleichungen dargestellte gerade Linie beschreibt also die fragliche Fläche, wenn δ nach einander alle möglichen Werthe erhält. Diese gerade Linie bleibt in allen ihren Lagen mit sich selbst parallel und erzeugt also eine cylindrische Fläche, und zwar im ersten Falle einen hyperbolischen Cylinder und im zweiten Falle einen elliptischen Cylinder. Im dritten Falle wird die Fläche imaginär: wir müssen dieselbe consequenter Weise als einen imaginären Cylinder bezeichnen.

Es ergibt sich endlich noch ein vierter, aber untergeordneter Fall, der von sechs nothwendigen Constanten abhängt, dadurch bestimmt, dass

$$\Phi = 0, \quad \Theta_3 = 0, \quad \Xi_2 = 0.$$

Diesem Falle entspricht die characteristische Form:

$$P^2 + \xi H = 0. \qquad \text{XII.}$$

Die bezügliche Fläche ist ein parabolischer Cylinder.

29. Die Bestimmungen, dass die fragliche Fläche in ein System von zwei reellen oder zwei imaginären Ebenen, das ebenfalls von sechs nothwendigen Constanten abhängt, degenerire und demnach durch Gleichungen von folgender Form dargestellt werde:

$$\pi^2 P^2 - \varkappa^2 Q^2 = 0, \qquad \text{XIII.}$$

$$\pi^2 P^2 + \varkappa^2 Q^2 = 0, \qquad \text{XIV.}$$

bleiben dieselben als in der 25. Nummer, nemlich:

$$\Phi = 0, \quad \Theta_3 = 0, \quad \Theta_2 = 0,$$

wobei zugleich in dem ersten Falle

$$\Xi_2 < 0,$$

und in dem zweiten Falle:

$$\Xi_2 > 0.$$

Dann ergeben sich, in Gemässheit der 18. Nummer, zwei untergeordnete Fälle, die nur von vier Constanten abhangen und durch die Bedingungs-Gleichungen:

$$\Phi = 0, \quad \Theta_3 = 0, \quad \Theta_2 = 0, \quad \Xi_2 = 0, \quad \Psi_{01} = 0,$$

bestimmt werden. Die diesen Bedingungs-Gleichungen entsprechenden Formen sind die folgenden:

$$P^2 - \sigma^2 = 0, \qquad \text{XV.}$$

$$P^2 + \sigma^2 = 0, \qquad \text{XVI.}$$

je nachdem überdiess

$$Y < 0,$$

oder

$$Y > 0.$$

Die allgemeine Gleichung stellt alsdann ein System von zwei parallelen Ebenen, die im ersten Falle reell, im zweiten imaginär sind, dar.

Wenn endlich

$$\Phi = 0, \quad \Theta_3 = 0, \quad \Theta_2 = 0, \quad \Xi_2 = 0, \quad Y = 0, \quad \Psi_{01} = 0,$$

so wird dadurch die Anzahl der nothwendigen Constanten auf drei reducirt. Die allgemeine Gleichung stellt alsdann, da sie sich auf die Form

$$P^2 = 0 \qquad \text{XVII.}$$

bringen lässt, ein System zweier zusammenfallenden Ebenen dar. Die vorstehenden sechs Bedingungs-Gleichungen können wir, nach der 14. Nummer, auch mit einfachern vertauschen.

§. 3.

Aufzählung der Flächen der zweiten Classe.

30. Wir wollen, indem wir zuvörderst wieder die folgende Gleichungs-Form:

$$Ap^2+A'q^2+A''r^2+A'''s^2+2B''pq+2B'pr+2Bqr+2Cps+2C'qs+2C''rs=0,$$

zu Grunde legen, den veränderlichen Grössen p, q, r, s nun die Bedeutung von vier linearen Plan-Coordinaten beilegen, und auch hier die Abkürzungen der 10. Nummer beibehalten. Diese Gleichung stellt alsdann die Flächen zweiter Classe dar, welche, im Allgemeinen, mit den Flächen zweiter Ordnung einerlei sind. (Einl. 26) Sie lässt sich auf die Form:

$$\pi P^2+\varkappa Q^2+\rho R^2+\sigma S^2=0,$$

bringen, wobei wir durch P, Q, R und S neue lineare Plan-Coordinaten bezeichnen, und dann bietet diese Form wiederum, ohne dass eine Particularisation eintritt, drei coordinirte Fälle dar:

$$\begin{aligned}\pi^2P^2+\varkappa^2Q^2+\rho^2R^2+\sigma^2S^2&=0,\\ \pi^2P^2+\varkappa^2Q^2-\rho^2R^2-\sigma^2S^2&=0,\\ \pi^2P^2-\varkappa^2Q^2+\rho^2R^2+\sigma^2S^2&=0,\end{aligned}\qquad(1)$$

wobei wir die beiden letzten Gleichungen auch durch die nachstehenden ersetzen können:

$$\begin{aligned}tu+\mu vw&=0,\\ tu+\rho^2R^2+\sigma^2S^2&=0.\end{aligned}$$

Diesen drei Gleichungs-Formen entsprechen, auf ganz gleiche Weise, wie in der 23. Nummer, imaginäre Flächen, geradlinige Flächen, nicht geradlinige Flächen. Wir können diess direct nachweisen; sind aber zugleich einer solchen Nachweisung durch das Princip der Reciprocität überhoben.*) Je zwei geradlinige, so wie je zwei nicht geradlinige Flächen sind als zwei reciproke Flächen anzusehen. Dieselbe Fläche oder überhaupt Flächen aus derselben jener drei allgemeinen Abtheilungen werden einerseits in der allgemeinen Punct-Coordinaten-Bestimmung und andrerseits in der allgemeinen Plan-Coordinaten-Bestimmung durch zwei Gleichungen von genau derselben Form dargestellt.

31. Wenn

$$\Phi=0,$$

wodurch die Anzahl der nothwendigen Constanten sich auf acht reducirt, so ergeben sich die in der nachstehenden Gleichung zusammengezogenen Formen:

$$\pi^2P^2+\varkappa^2Q^2\mp\rho^2R^2=0.$$

---

*) Setzen wir nemlich

$$\frac{\pi}{\sigma}\cdot\frac{P}{S}\equiv\Theta,\qquad\frac{\varkappa}{\sigma}\cdot\frac{Q}{S}\equiv H,\qquad\frac{\rho}{\sigma}\cdot\frac{R}{S}\equiv Z,$$

$$\frac{\pi_1}{\sigma_1}\cdot\frac{P}{S}\equiv\vartheta,\qquad\frac{\varkappa_1}{\sigma_1}\cdot\frac{Q}{S}\equiv\eta,\qquad\frac{\rho_1}{\sigma_1}\cdot\frac{R}{S}\equiv\zeta,$$

indem wir ϑ, η und ζ als allgemeine Punct-Coordinaten nehmen, so sind die Gleichungen:

$$\Theta=\vartheta,\qquad H=\eta,\qquad Z=\zeta,$$

die Gleichungen der Reciprocität und diese führen alsdann von jeder der drei Gleichungen (1) zu einer Gleichung von ganz derselben Form in P, Q, R, S.

In dem Falle des negativen Zeichens stellt diese Gleichung eine ebene reelle Curve der zweiten Classe dar, welche ganz in der Ebene der drei Puncte (P), (Q) und (R) liegt; in dem Falle des positiven Zeichens stellt sie eine imaginäre Curve dieser Classe, oder, was dasselbe heisst, eine Ebene dar, nemlich die Ebene der drei Puncte (P), (Q) und (R).

Wenn zugleich

$$\Phi = 0, \quad \Theta_3 = 0, \quad \Theta_2 = 0,$$

wodurch die Anzahl der nothwendigen Constanten sich auf sechs reducirt, kann die allgemeine Gleichung auf eine von folgenden beiden Formen gebracht werden:

$$\pi^2 P^2 \mp \varkappa^2 Q^2 = 0,$$

und stellt alsdann ein System von zwei reellen oder zwei imaginären Puncten dar. Im letztern Falle können wir auch sagen, dass die gerade Linie (P, Q) durch die allgemeine Gleichung dargestellt werde.

Wenn endlich zugleich (wir nehmen die einfachsten Bedingungs-Gleichungen der 14. Nummer):

$$\Psi_{03} = 0, \quad \Psi_{13} = 0, \quad \Psi_{23} = 0, \quad \Psi_{12} = 0, \quad \Psi_{32} = 0, \quad \Psi_{31} = 0,$$

so erhalten wir, von drei Constanten abhängend, das System zweier zusammenfallenden Puncte:

$$P^2 = 0.$$

Auch diese Particularisationen sind der collinearen Classification des vorigen Paragraphen ganz analog.

32. Wir erhalten neue Unterscheidungen, wenn wir eine der vier ursprünglichen Veränderlichen, etwa s, mit einer blossen Constanten vertauschen, wonach:

$$Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + 2B''pq + 2B'pr + 2Bqr + 2Cp + 2C'q + 2C''r + D = 0.$$

Dann ist der, der frühern linearen Function s entsprechende, Punct nach gegebener Richtung unendlich weit gerückt, während wir den drei übrigen Veränderlichen p, q, r die Bedeutung geben können von drei mit unbestimmten Coefficienten multiplicirten Segmenten, welche auf drei, nach der gegebenen Richtung durch die drei Puncte:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0,$$

gehenden, geraden Linien zwischen diesen festen Puncten und der bezüglichen Ebene liegen. (Einl.) Hier können wir aber keine Analogie mehr mit der geometrischen Deutung der entsprechenden Entwickelungen des vorigen Paragraphen erwarten. Während nemlich bei derjenigen Coordinaten-Bestimmung, welche der Aufzählung der 17 Fälle dieses Paragraphen zu Grunde liegt, die Coordinaten-Ebene (s), dadurch, dass an die Stelle der Veränderlichen s eine blosse Constante getreten, unendlich weit gerückt ist, hat sie jede Spur ihrer frühern Richtung verloren und deshalb kann hier auch die Lage der Fläche durchaus nicht, sondern einzig und allein ihre eigene Natur den Eintheilungs-Grund abgeben. Anders verhält es sich hier, wo eine Ebene nicht unendlich weit zu liegen braucht, damit ihre drei Coordinaten unendlich gross werden; diess geschieht nemlich dann, wenn die fragliche Ebene der gegebenen Richtung parallel ist, und hört also auf zu geschehen, wenn die Ebene gedreht wird. Also muss nothwendig bei der fraglichen neuen Eintheilung die Lage der Fläche in Beziehung auf die gegebene Richtung maassgebend sein.

33. Wir begegnen keiner Schwierigkeit, wenn wir, in der neuen Coordinaten-Annahme, die 17 verschiedenen Gleichungs-Formen geometrisch deuten. Statt dessen wollen wir sogleich die Annahme machen, dass drei der vier, die Plan-Coordinaten-Bestimmung vermittelnden, Puncte nach drei

gegebenen Richtungen unendlich weit liegen. Dann erhalten wir das einfachste Plan-Coordinaten-System, und wenn wir die vier Coordinaten der Ebene, wie in der 7. Nummer der Einleitung, durch w, t, u und v bezeichnen, für die allgemeine Gleichung der Flächen zweiter Classe:

$$Aw^2 + A't^2 + A''u^2 + A'''v^2 + 2B''tw + 2B'uw + 2Btu + 2Cvw + 2C'tv + 2C''uv = 0. \quad (1)$$

Im Allgemeinen können wir dieser Gleichung, indem wir

$$\begin{aligned} V &\equiv v, \\ U &\equiv u + \gamma v, \\ T &\equiv t + \beta' u + \beta v, \\ W &\equiv w + \alpha t + \alpha' u + \alpha'' v, \end{aligned} \quad (2)$$

setzen und übrigens die bisherige Bezeichnung beibehalten, auf folgende Form bringen:

$$AW^2 + \frac{\Xi_2}{A}.T^2 + \frac{\Theta_3}{\Xi^2}.U^2 + \frac{\Phi}{\Theta_3}.V^2 = 0, \quad (3)$$

und erhalten alsdann, denselben Bedingungen als früher in der 26. Nummer entsprechend, die nachstehenden vier coordinirten allgemeinen Gleichungs-Formen:

$$\pi^2W^2 + \varkappa^2T^2 + \rho^2U^2 + \sigma^2V^2 = 0, \quad \text{I.}$$
$$\pi^2W^2 + \varkappa^2T^2 - \rho^2U^2 - \sigma^2V^2 = 0, \quad \text{II.}$$
$$\pi^2W^2 - \varkappa^2T^2 - \rho^2U^2 - \sigma^2V^2 = 0, \quad \text{III.}$$
$$\pi^2W^2 + \varkappa^2T^2 + \rho^2U^2 - \sigma^2V^2 = 0. \quad \text{IV.}$$

Diese vier Gleichungen stellen bezüglich eine imaginäre Fläche, ein einschaliges Hyperboloid, ein Ellipsoid und ein zweischaliges Hyperboloid dar. Bloss die Unterscheidung der beiden letzten, nicht geradlinigen, Flächen bleibt noch zu rechtfertigen übrig. Zu diesem Ende bemerken wir, dass, im Falle der Gleichung III., die umhüllende Ebene alle möglichen Richtungen haben, aber weder durch den Punct (W) gehen noch unendlich weit rücken kann, weil $\frac{U}{T}$ und $\frac{V}{T}$ zwar alle möglichen Werthe erhalten, aber $\frac{T}{W}, \frac{U}{W}, \frac{V}{W}$ weder zugleich unendlich gross werden, noch zugleich verschwinden können. Hiernach ist die dargestellte Fläche eine im endlichen Raume umschlossene, wie die durch die gleichnamige Gleichung der 26. Nummer dargestellte, mithin ein Ellipsoid.

Wenn wir $W \equiv 1$ setzen, so stellen die vorstehenden Gleichungen, bei derselben Form, dieselbe Flächen-Gattung als in der Voraussetzung ganzer und linearer Punct-Coordinaten dar.

Wenn $$\Phi = 0,$$

wonach die Anzahl der nothwendigen Constanten sich auf acht reducirt, so ergeben sich die folgenden drei coordinirten Gleichungs-Formen:

$$\pi^2W^2 + \varkappa^2T^2 + \rho^2U^2 = 0, \quad \text{V.}$$
$$\pi^2W^2 - \varkappa^2T^2 - \rho^2U^2 = 0, \quad \text{VI.}$$
$$\pi^2W^2 + \varkappa^2T^2 - \rho^2U^2 = 0, \quad \text{VII.}$$

welche ebene Curven zweiter Classe darstellen. Es stellen nemlich in Folge der identischen Gleichungen (2) auch die drei Gleichungen:

$$T = 0, \quad U = 0, \quad V = 0,$$

drei Puncte dar, die nach gegebenen Richtungen unendlich weit liegen. Von diesen Richtungen können wir annehmen, dass sie in dem Puncte

$$W = 0$$

sich schneiden, und sie dann als die Axen T, U und V bezeichnen. Die reciproken Werthe derjenigen Segmente, die eine gegebene Ebene von diesen drei Axen abschneidet, sind, mit entgegengesetzten Zeichen genommen, für die gegebene Ebene die Werthe der Coordinaten $\frac{T}{W}, \frac{U}{W}$ und $\frac{V}{W}$. Da aus den Gleichungen V.—VII. die dritte dieser Coordinaten ganz verschwunden ist, so bestimmen irgend zwei Werthe der beiden übrig gebliebenen Coordinaten, welche diese Gleichungen befriedigen, unendlich viele Ebenen, welche alle eine in der Ebene der beiden Axen T und U liegende gerade Linie zum gemeinschaftlichen Durchschnitte haben. Diese gerade Linie tritt, bei anderer Annahme der Coordinaten-Werthe nicht aus der Ebene dieser beiden Axen heraus, und umhüllt eine in derselben Ebene liegende Curve, die wir auch als von jeder Ebene, welche durch diese gerade Linie geht, umhüllt betrachten können. In diesem Sinne stellen die fraglichen drei Gleichungen eine in der Ebene der Axen T und U, die wir auch als Ebene (W, T, U) bezeichnen können, liegende Curve zweiter Classe dar, und zwar bezüglich, den Bedingungen

$$\Xi_2 < 0, \qquad A\Theta_3 > 0,$$
$$\Xi_2 > 0, \qquad A\Theta_3 > 0,$$
$$A\Theta_3 < 0,$$

entsprechend, eine imaginäre Curve der zweiten Classe, eine Ellipse, eine Hyperbel.

Wenn zugleich

$$\Phi = 0, \qquad \Theta_3 = 0, \qquad \Theta_2 = 0,$$

so ergeben sich je nach dem Zeichen von Ξ_2 zwei Gleichungs-Formen, die wir in die folgende zusammenziehen können:

$$A^2W^2 \pm \varkappa^2T^2 = 0, \qquad \text{VIII. IX.}$$

wonach die dargestellte Fläche in ein System von zwei imaginären oder zwei reellen Puncten ausartet. In dem Falle imaginärer Puncte können wir auch sagen, dass die Fläche in eine reelle gerade Linie degenerire, welche hier mit der Linie (W, T), oder der Axe T, zusammenfällt.

Wenn endlich, wie in der 29. Nummer:

$$\Phi = 0, \quad \Theta_3 = 0, \quad \Theta_2 = 0, \quad \Xi_2 = 0, \quad Y = 0, \quad \Psi_{01} = 0,$$

so geht die ursprüngliche Gleichung (1) in die folgende über:

$$W^2 = 0, \qquad \text{X.}$$

und stellt also ein System von zwei zusammenfallenden Puncten dar.

34. Es sind nun noch diejenigen Fälle zu betrachten übrig, in welchen die allgemeine Form:

$$\varkappa W^2 + \varkappa T^2 + \rho U^2 + \sigma V^2 = 0,$$

dadurch illusorisch wird, dass einer der Coefficienten in derselben einen unendlich grossen Werth erhält. Diess findet, in Gemässheit der 15. Nummer, erstens Statt, wenn Θ_3, nicht aber gleichzeitig Φ, verschwindet. Dann ergibt sich indess, indem wir

$$A'''v + 2C''u + 2C't + 2Cw \equiv H$$

setzen, die folgende Form:

$$AW^2 + \frac{\Xi_2}{A} . T^2 + HV = 0. \qquad (4)$$

Zweitens findet dieses Statt, wenn Ξ_2, nicht aber gleichzeitig Θ_3 verschwindet; dann kommt, wenn wir nach der eben angezogenen Nummer:

$$A''u + 2Bt + 2B'w \equiv K$$

setzen, die folgende Form:

$$AW^2 + KU + \frac{\Phi}{\Theta_3} . V^2 = 0. \qquad (5)$$

wobei $U \equiv u - \gamma v$.

Die vorstehenden Formen (4) und (5) sind zwar in den allgemeinen der beiden letzten Gleichungen (1) der 30. Nummer einbegriffen, lassen sich aber nicht auf die speciellern Formen I.—IV. bringen. Der Grund von diesem letztern Umstande ist aber bereits schon in der 15. Nummer angedeutet; er fällt, was die Gleichung (4) betrifft, fort, wenn wir statt der ursprünglichen Veränderlichen v eine andere, bei beliebiger Annahme von τ etwa $(v + \tau u)$, einführen, oder, was dasselbe heisst, die Richtung der Axe v ändern, indem wir diese Axe, etwa in der Ebene (w, u, v), um den Punct (w) sich drehen lassen. Dadurch erhalten nemlich die Constanten der ursprünglichen Gleichung andere Werthe, so dass im Allgemeinen Θ_3 dann nicht mehr verschwindet und die Form (3) von Neuem wieder möglich wird. Es erhellt hieraus, dass durch die Bedingung des Verschwindens von Θ_3 die Natur der dargestellten Fläche keiner Particularisation unterworfen wird, sondern dass dadurch bloss eine particuläre Lage gegen die Axe v angezeigt wird.

Ganz analog verhält es sich in dem Falle der Gleichungs-Form (5), wo wir nur den ursprünglichen Axen u und v eine andere Richtung zu geben brauchen, damit die allgemeine Gleichung auf die Form (3) gebracht werden könne.

Es bleibt hier nur noch die Frage zu beantworten übrig, zu welchen der Formeln I.—IV., bei veränderter Axen-Annahme, die Gleichungen (4) und (5) führen. Wir sehen zuvörderst, dass die Form I. ausgeschlossen ist, die Fläche also beidesmal nothwendig reell ist. Aus den Formen II.—IV. ist ferner ersichtlich, dass W nur in dem Falle der beiden Hyperboloide II. und IV. verschwinden kann, nicht aber in dem Falle des Ellipsoids III. Also können auch die Gleichungen (4) und (5) kein Ellipsoid darstellen. Beide Gleichungen stellen also entweder ein einschaliges oder ein zweischaliges Hyperboloid dar. Ersteres findet für die Gleichungs-Form (4) offenbar dann Statt, wenn neben der obigen Bedingungs-Gleichung $\Theta_3 = 0$:

$$\Xi_2 < 0,$$

und für die Gleichungs-Form (5), wenn neben der Bedingungs-Gleichung $\Xi_2 = 0$,

$$\Phi > 0;$$

denn alsdann erhalten das erste und letzte Glied dieser Gleichung entgegengesetzte Zeichen, weil, in Folge der 1. Gleichung IV. der 10. Nummer, durch das Verschwinden von Ξ_2, der Werth für $A\Theta_3$ gleich $-(\Psi_{03})^2$, also negativ wird. Werden diese Bedingungen nicht befriedigt, so ist die Fläche ein zweischaliges Ellipsoid.

Wenn endlich, im Falle der Gleichung (4),

$$\Xi_2 = 0,$$

und im Falle der Gleichung (5)

$$\Phi = 0,$$

so erhalten wir bezüglich die übereinstimmenden Gleichungs-Formen:

$$AW^2 + HV = 0, \qquad AW^2 + KU = 0,$$

welche eine Hyperbel darstellen, die bezüglich gegen die Axen V und U eine solche Lage hat, dass ihre Gleichung nicht mehr auf die Form VII. gebracht werden kann.

35. Zuletzt ist noch derjenige Fall zu betrachten, wo die allgemeine Gleichungs-Form dadurch unstatthaft wird, dass

$$A = 0.$$

Dann ergibt sich schon aus dem blossen Anblick der ursprünglichen Gleichung (1) eine charakteristische Eigenschaft der alsdann durch dieselbe dargestellten Fläche. Beliebig angenommenen Werthen von t, u, v entspricht in diesem Falle immer ein einziger Werth von w, weil der zweite durch das Verschwinden von A unendlich gross wird. Es gibt also auch immer nur eine einzige Lage der umhüllenden Ebene, in welcher sie irgend einer gegebenen Ebene parallel ist. In der zweiten Lage ist sie unendlich weit gerückt.

Wir erhalten, diesem Falle entsprechend, in Gemässheit der 15. Nummer, indem wir in der ursprünglichen Gleichung

$$\begin{aligned} v &= V, \\ u &= U + \gamma V, \\ t &= T + \beta' U + \beta V, \\ w &= W' + \alpha' U + \alpha V, \end{aligned}$$

setzen, und A Null nehmen:

$$(2B''W' + A'T)\,T + \frac{\Theta_3}{\Xi_2}.U^2 + \frac{\Phi}{\Theta_3}.V^2 = 0, \qquad (6)$$

wobei wir noch, der Kürze wegen,

$$2B''W' + A'T \equiv W$$

setzen wollen. Wir erhalten hier zwei verschiedene coordinirte Fälle, je nachdem Ξ_2 und Φ im Zeichen übereinstimmen oder nicht, oder, was in Folge der ersten der identischen Gleichungen IX. hiermit gleichbedeutend ist, je nachdem

$$\Theta_3\Theta_2 - (\Delta_{23})^2 > 0, \text{ oder } \Theta_3\Theta_2 - (\Delta_{23})^2 < 0.$$

Die beiden neuen, von acht nothwendigen Constanten abhängigen Gleichungs-Formen sind hiernach:

$$WT + \rho^2U^2 + \sigma'^2V^2 = 0, \qquad \text{XI.}$$
$$WT + \rho^2U^2 - \sigma'^2V^2 = 0, \qquad \text{XII.}$$

wobei wir die letzte Gleichungs-Form auch mit der folgenden vertauschen können:

$$WT + (\rho U + \sigma V)(\rho U - \sigma V) = 0.$$

Die durch diese Gleichungen dargestellten Flächen sind die beiden Paraboloide, das elliptische und hyperbolische. Um dies nicht bloss als Definition hinzustellen, sondern auch nachzuweisen, dass diese Benennung mit der, bereits im vorigen Paragraphen angewandten, übereinstimme, wird es hinreichen, bloss den zweiten der beiden coordinirten Fälle näher in's Auge zu fassen. Um die letzte Gleichung zu befriedigen, können wir, bei willkührlicher Annahme eines unbestimmtn Coefficienten δ, gleichzeitig

$$W - \delta(\rho U - \sigma U) = 0,$$
$$\delta T + (\rho U + \sigma V) = 0,$$

setzen. Die erste dieser beiden Gleichungen stellt einen Punct dar, der seine Lage bei einer andern Annahme von δ ändert, die zweite einen Punct, der nach bestimmter Richtung unendlich weit liegt. Diese Richtung ändert; sich mit δ, aber so, dass sie in allen ihren Lagen einer gegebenen Ebene, (derjenigen Ebene nemlich, welche durch die beiden Axen U und V geht) parallel bleibt. Das System der beiden letzten Gleichungen stellt also eine solche gerade Linie dar, welche durch den ersten Punct geht und dieser Ebene parallel ist, und die also, wenn der Werth von δ nach einander alle möglichen Werthe erhält, ein hyperbolisches Paraboloid beschreibt (27).

Wenn zugleich endlich

$$A = 0, \qquad \Phi = 0,$$

so artet die Fläche, indem ihre Gleichung die folgende Form mit sieben nothwendigen Constanten annimmt:

$$WT + \rho U^2 = 0, \qquad \text{XIII.}$$

in eine ebene Curve aus und diese Curve ist eine Parabel.

36. Wenn gleichzeitig

$$A = 0, \quad \Phi = 0, \quad \Theta_3 = 0, \quad \Theta_2 = 0,$$

so reducirt sich die Anzahl der nothwendigen Bedingungen auf fünf. Die umgeformte Gleichung stellt, indem sie alsdann die nachstehende Form annimmt:

$$WT = 0, \qquad \text{XIV.}$$

ein System von zwei Puncten dar, von welchen einer, nach gegebener Richtung, unendlich weit liegt.

Wenn gleichzeitig ferner:

$$A = 0, \qquad \Xi_2 = 0,$$

oder was, in Folge der ersten identischen Gleichung I. der 10. Nummer, hiermit identisch ist, wenn gleichzeitig:

$$A = 0, \qquad B'' = 0,$$

so wird die Gleichung (6) wiederum illusorisch, was aber nur in der besondern Lage der Fläche gegen die Axe t seinen Grund hat. Bei einer Vertauschung dieser Axe mit einer der beiden Axen u und v hört diese Form, im Allgemeinen, wieder auf, illusorisch zu sein. Dann aber bleibt sie es immer, wenn gleichzeitig

$$A = 0, \quad \Xi_2 = 0, \quad \Xi_1 = 0, \quad Y = 0,$$

oder, was hiermit gleichbedeutend,

$$A = 0, \quad B'' = 0, \quad B' = 0, \quad C = 0,$$

in welchem Falle die ursprüngliche Gleichung sich auf eine homogene zwischen den drei Veränderlichen t, u und v reducirt, und nach der Umformung in die folgende übergeht:

$$A'T^2 + \frac{\Xi}{A'} \cdot U^2 + \frac{\Theta}{\Xi} \cdot V^2 = 0. \qquad (7)$$

Um diese Form aus (6) abzuleiten, setzen wir zuvorderst B'' gleich Null, wonach das erste Glied sich auf $A'T^2$ reducirt. Ferner verschwindet $\Psi_{1,3}$ und demnach kommt, wenn wir das Quadrat dieses Ausdrucks vernachlässigen, in Folge der zweiten identischen Gleichung IV. der 10. Nummer:

$$\frac{\Theta_3}{\Xi_2} = \frac{\Xi}{A'}.$$

Ferner verschwindet Δ_{03} und wenn wir das Quadrat dieses Ausdrucks vernachlässigen, in Folge der 3. identischen Gleichung IX. der 10. Nummer

$$\frac{\Phi}{\Theta_3} = \frac{\Theta}{\Xi}.$$

Die Gleichungs-Formen V — VI. des gegenwärtigen Pragraphen stellen, statt einer Fläche, eine blosse Curve dar, und diese liegt in der Ebene der drei Puncte:

$$W = 0, \quad T = 0, \quad U = 0,$$

von welchen die beiden letzten nach bestimmten Richtungen unendlich weit liegen, oder, mit andern Worten, sie liegt in der Ebene der beiden Axen T und U. In dem Fall der Gleichungs-Form (7) ist, an der Stelle des Punctes W, der Punct V getreten, der ebenfalls unendlich weit liegt. Die Analogie rechtfertigt uns also, wenn wir sagen, dass diese Gleichung eine ebene Curve zweiter Classe darstellt, die in der Ebene der drei Puncte

$$T = 0, \quad U = 0, \quad V = 0,$$

oder, mit andern Worten, unendlich weit liegt. Einige nähere Erörterungen möchten hier wünschenswerth erscheinen.

Wenn gleichzeitig mit der Gleichung (7) die folgende:

$$W = 0$$

besteht, so stellt das System dieser beiden Gleichungen einen Kegel dar. Die Spitze desselben wird durch die letzte Gleichung, die Richtung der durch dieselbe gehenden Berührungs-Ebenen durch die Gleichung (7) bestimmt. Dieser Kegel wird durch eine, parallel mit sich selbst, immer weiter fortrückende Ebene von gegebener Richtung in einer Curve von immer wachsenden Dimensionen geschnitten. Vertauschen wir die letzte Gleichung mit der Gleichung irgend eines andern Punctes, so rückt jener Kegel, parrallel mit sich selbst, fort und die Durchschnitts-Curve in jener Schnitt-Ebene, ist um so mehr mit der frühern als identisch zu betrachten, je weiter diese Ebene liegt. Bei einer unendlich entfernten Lage der Schnitt-Ebene ist die Identität als vollständig zu betrachten, nach derselben Anschauung, wie zwei parallele Linie geraden in unendlicher Entfernung sich in einem Puncte, zwei parallele Ebenen sich in einer geraden Linie schneiden. Dann hat aber auch die schneidende Ebene jede Spur ihrer ursprünglichen Richtung verloren, wonach die Unterscheidung der Durchschnitts-Curve als Ellipse, Hyperbel und Parabel wegfällt und wir können nur, je nachdem der Kegel reell oder imaginär ist, eine in unendlicher Entfernung liegende reelle oder imaginäre Durchschnitts-Curve unterscheiden.

Nach dem Vorstehenden gewinnen wir die folgende Anschauung. Wenn wir einen gegebenen Kegel parallel mit sich selbst verrücken, so schneiden sich die parallelen Berührungs-Ebenen die den verschiedenen Lagen des Kegels entsprechen auf einer unendlich weit liegenden geraden Linie. Diese gerade Linie, oder auch die durch dieselbe in jeder ihrer verschiedenen Lagen gehenden parallelen Berührungs-Ebenen, umhüllen in unendlicher Entfernung eine Curve der zweiten Classe, die in dem Falle, dass der Kegel imaginär wird, oder, was dasselbe heisst, auf einen Punct sich reducirt, imaginär ist. Diesen beiden Fällen, entsprechen die folgenden beiden Gleichungs-Formen mit fünf nothwendigen Constanten:

$$\varkappa^2 T^2 + \rho^2 U^2 - \sigma^2 V^2 = 0, \qquad \text{XV.}$$

$$\varkappa^2 T^2 + \rho^2 U^2 + \sigma^2 V^2 = 0. \qquad \text{XVI.}$$

Die Curve ist imaginär, wenn der letzten Form entsprechend, gleichzeitig:

$$\Xi < 0, \quad A'\Theta > 0,$$

sonst ist sie reell.

Wenn insbesondere $\Theta = 0,$

so stellt die aus (7) resultirende Gleichung mit vier nothwendigen Constanten:

$$A'^2T^2 + \Xi U^2 = 0, \qquad \text{XVII. XVIII.}$$

ein System von zwei nach zwei bestimmten Richtungen unendlich weit liegenden Puncten dar, die reell oder imaginär sind, je nachdem

$$\Xi < 0 \quad \text{oder} \quad \Xi > 0.$$

Wenn neben der vorstehenden Bedingungs-Gleichung auch noch Ξ verschwindet, so wird die Gleichung (7) illusorisch, hört aber bei einer andern Annahme der ursprünglichen Richtung der Axe V wieder auf es zu sein. Wenn aber letztlich zugleich

$$\Theta = 0, \quad \Xi = 0, \quad Y = 0,$$

so folgt aus der 4. der identischen Gleichungen IV. der 10. Nummer (weil $\Psi_{10} = 0$ nicht aber A') dass $\frac{\Theta}{\Xi}$ verschwindet und mithin die Gleichung (7) auf

$$T^2 = 0, \qquad \text{XIX.}$$

sich reducirt, und bei bloss zwei nothwendigen Constanten ein System von zwei Puncten darstellt, die nach gegebener Richtung unendlich weit liegen.

§. 4.

Discussion der Gleichungs-Form $\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 + \sigma S^2 = 0$ in der zweifachen Coordinaten-Bestimmung.

37. Wir wollen zuvörderst den vier Veränderlichen die Bedeutung von vier linearen Punct-Coordinaten geben. Alsdann hängt die Bestimmung einer Fläche durch die Gleichung:

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 + \sigma S^2 = 0, \qquad (1)$$

von den vier gegebenen Ebenen

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0, \qquad (2)$$

und von drei Coefficienten, im Allgemeinen also von $4.3 + 3 = 15$ Constanten ab. Unter diesen befinden sich also sechs überzählige. Jene vier Ebenen stehen in einer symmetrischen Beziehung zu der dargestellten Fläche, die näher zu bestimmen uns zunächst obliegt. Der überzähligen Constanten wegen, kann diese Beziehung keine ausschliessliche sein.

Nach der 25. Nummer der einleitenden Betrachtungen können wir durch die Vermittelung einer Fläche der zweiten Ordnung die Reciprocität zweier Systeme construiren. Nehmen wir für diese Fläche die, durch die Gleichung (1) dargestellte, setzen der Kürze halber

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 + \sigma S^2 = \Omega,$$

und bezeichnen diejenigen Werthe der vier Veränderlichen, welche irgend einem gegebenen Puncte entsprechen, durch P', Q', R' und S', so stellt die folgende Gleichung:

$$P'.\frac{d\Omega}{dP} + Q'.\frac{d\Omega}{dQ} + R'.\frac{d\Omega}{dR} + S'.\frac{d\Omega}{dS} = 0,$$

die Polar-Ebene des gegebenen Punctes in Beziehung auf die Fläche Ω dar. Diese Gleichung geht, entwickelt, in die nachstehende über:

$$\pi P'P + \varkappa Q'Q + \rho R'R + \sigma S'S = 0. \qquad (3)$$

Fällt insbesondere der gegebene Punct in den gemeinschaftlichen Durchschnitt dreier der vier Ebenen (2), namentlich der drei ersten, so reducirt sich die vorstehende Gleichung, durch das Verschwinden von P', Q' und R', auf die Gleichung der vierten dieser Ebenen, auf:

$$S = 0.$$

Es sind also die Ebenen (2) die vier Polar-Ebenen der gegenüberliegenden Ecken des von ihnen gebildeten Tetraeders, und umgekehrt, diese Ecken die Pole der gegenüberliegenden Seiten-Ebenen. Es sind ferner, was hieraus folgt, die drei Paare gegenüberliegender Kanten drei Paare reciproker Polar-Linien.

Das von den vier Ebenen (2) gebildete Tetraeder wollen wir Pol-Tetraeder nennen.

38. Wenn eine Kante des Pol-Tetraeders gegeben ist, so erhalten wir, nach der Theorie der Pole, in der Voraussetzung, dass dieselbe die Fläche schneidet, unmittelbar die gegenüberliegende Kante, wenn wir in den beiden Durchschnittspuncten die beiden Tangential-Ebenen der Fläche construiren und die Durchschnitts-Linie dieser Ebenen nehmen. In der Voraussetzung, dass durch die gegebene Kante zwei Tangential-Ebenen an die Fläche sich legen lassen, erhalten wir die gegenüberliegende, wenn wir die beiden Berührungspuncte auf diesen Tangential-Ebenen durch eine gerade Linie verbinden. In dem Falle, dass keine der beiden gemachten Voraussetzungen Statt findet, bleibt nur übrig, die gegenüberliegende Kante als die Durchschnitts-Linie der Polar-Ebenen irgend zweier Puncte der gegebenen Kante, oder als die Verbindungs-Linie der Pole irgend zweier durch die gegebene Kante gehenden Ebenen zu construiren.

Wenn eine Ecke des Pol-Tetraeders gegeben ist, so erhalten wir die gegenüberliegende Seiten-Fläche, wenn wir durch die Ecke drei beliebige Tangential-Ebenen an die Fläche und durch die drei Berührungspuncte auf denselben eine Ebene legen. In derselben Ebene liegen alsdann die Berührungspuncte auf allen Tangential-Ebenen, welche durch die gegebene Ecke gehen. Diese Ebenen umhüllen einen Kegel, welcher der Fläche umschrieben ist, und diese Fläche nach der vorstehenden Bemerkung in einer ebenen Curve berührt. Wenn die gegebene Ecke innerhalb der Fläche liegt, das heisst, wenn durch dieselbe sich keine Ebene legen lässt, welche die Fläche berührt, so reducirt sich der fragliche Kegel auf einen Punct und die Berührungs-Curve wird, indem die gegenüberliegende Seiten-Ebene die Fläche nicht schneidet, imaginär. Um alsdann diese Seiten-Ebenen zu construiren, brauchen wir bloss durch die gegebene Ecke zwei beliebige die Fläche schneidende gerade Linien zu legen: die reciproken Polaren von diesen liegen alsdann beide in der verlangten Seiten-Ebene.

Auf analoge Weise bestimmt sich, wenn eine Seiten-Ebene des Pol-Tetraeders gegeben ist, die gegenüberliegende Ecke.

39. Die vorstehenden Resultate, die wir hier nicht weiter ausführen wollen, knüpfen sich, abgesehen von der Theorie der Pole, auch unmittelbar an die Form der Gleichung (1). Denn, um diese Gleichung zu befriedigen, können wir gleichzeitig, etwa

linien dieser drei Ebenen (P, Q), (P, R), (Q, R) drei zugeordnete Durchmesser der jedesmaligen Fläche sind, so behalten jene Ebenen und diese geraden Linien denselben Namen auch für den Fall des Kegels bei. Zunächst tritt uns hier die Bemerkung entgegen, dass irgend drei zugeordnete Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung mit drei zugeordneten Durchmessern des Asymptoten-Kegels zusammenfallen (48).

Setzen wir gleichzeitig:

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 = 0, \qquad S = 0,$$

wobei S eine durchaus beliebige lineare Function bedeutet, so stellt das System dieser beiden Gleichungen die Durchschnitts-Curve des Kegels mit der Ebene (S) dar. Die Durchschnittslinien dieser Ebene mit den drei Diamentral-Ebenen (P), (Q) und (R) bilden ein Pol-Dreieck in Beziehung auf die Durchschnitts-Curve, das heisst, ein solches Dreieck, in welchem die Winkelpuncte die Pole der gegenüberliegenden Seiten sind, und dessen Seiten drei zugeordnete Polaren, dessen Winkelpuncte drei zugeordnete Pole genannt werden. Es schneiden also irgend drei zugeordnete Diametral-Ebenen eines Kegels jede Schnitt-Ebene in drei zugeordneten Polaren der Durchschnitts-Curve dieser Ebenen und irgend drei zugeordnete Durchmesser des Kegels schneiden dieselbe Ebene in drei zugeordneten Polen der Curve.

Um also zugeordnete Durchmesser und zugeordnete Diametral-Ebenen eines Kegels zu construiren, brauchen wir bloss in irgend einer beliebigen Schnitt-Ebene irgend ein Polar-Dreieck der Durchschnitts-Curve zu construiren; diejenigen geraden Linien, welche die Spitze des Kegels mit den Winkelpuncten dieses Dreiecks verbinden, sind drei zugeordnete Durchmesser und diejenigen Ebenen, welche durch jene Spitze und die drei Seiten des Dreiecks gehen, drei zugeordnete Diametral-Ebenen des Kegels. Wenn wir ferner in einer gegebenen Ebene für irgend eine gegebene gerade Linie den Pol in Beziehung auf die Durchschnitts-Curve bestimmen, so ist die gerade Linie, welche die Spitze des Kegels mit diesem Pole verbindet, der zugeordnete Durchmesser derjenigen Ebene, welche zugleich die Spitze des Kegels und die gegebene gerade Linie enthält. Wenn insbesondere eine der zugeordneten Polaren einer Durchschnitts-Curve unendlich weit liegt und die beiden andern also zugeordnete Durchmesser derselben werden, so geht einer der drei entsprechenden zugeordneten Durchmesser des Kegels durch den Mittelpunct der Durchschnitts-Curve, während die beiden andern den zugeordneten Durchmessern dieser Curve parallel sind.

Es tritt uns aus dem Vorstehenden die Bemerkung entgegen, dass die Beziehung der Pole und Polaren eines Kegelschnittes, so wie der zugeordneten Durchmesser projectiver Art sind, das heisst, auch dann bestehen, wenn der Kegelschnitt in eine andere Ebene perspectivisch projicirt wird.

Nach einer frühern Bemerkung, dass irgend drei zugeordnete Durchmesser eines Kegels auch zugeordnete Durchmesser einer beliebigen Fläche zweiter Ordnung sind, die diesen Kegel zum Asymptoten-Kegel hat, erhalten wir neue Constructionen solcher Durchmesser. Begegnet zum Beispiel eine Diametral-Ebene eines Hyperboloids dem Asymptoten-Kegel desselben in zwei geraden Linien, so schneiden sich die Berührungs-Ebenen des Kegels in demjenigen Durchmesser der Fläche, welcher der Diametral-Ebene zugeordnet ist:

53. Wenn der Kegel durch das Verschwinden von ρ in ein System von zwei Ebenen:

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 = 0,$$

ausartet, so fällt eine der drei zugeordneten Diametral-Ebenen fort, die beiden übrigbleibenden:

$$P = 0, \qquad Q = 0$$

stehen alsdann mit den beiden gegebenen, deren Gleichung wir folgendergestalt auflösen können:

$$P+\lambda Q=0, \qquad P-\lambda Q=0,$$

in harmonischer Beziehung. Dass eine beliebige Schnitt-Ebene das System der vier Ebenen in vier harmonischen geraden Linien schneidet, ist sogleich ersichtlich, wenn wir mit den vorstehenden vier Gleichungen die Gleichung der Schnitt-Ebene zusammenstellen. Wenn wir gleichzeitig damit noch die Gleichung einer zweiten beliebigen Schnitt-Ebene zusammenstellen, so drücken dieselben vier Gleichungen aus, dass jede beliebige gerade Linie das System der vier Ebenen in vier harmonischen Theilungspuncten schneidet. *)

54. In dem Falle eines Cylinders, wo Φ und Θ_3 gleichzeitig verschwinden und $\frac{\Phi}{\Theta_3}=\frac{\Theta_2}{\Xi_2}=\sigma$, verschwinden überdiess auch Δ_{03}, Δ_{13}, Δ_{23}, wonach die Mittelpuncts-Coordinaten α, β, γ unter unbestimmter Form erscheinen und der Mittelpunct beliebig auf einer festen geraden Linie, der Axe des Cylinders, angenommen werden kann. Der Cylinder wird, bei jeder andern Annahme des Mittelpunctes, immer durch dieselbe Gleichung (2) der 45. Nummer dargestellt werden, welche sich auf die Form:

$$AP^2+\frac{\Xi_2}{A}.Q^2+\frac{\Theta_2}{\Xi_2}=0,$$

bringen lässt (17, 28). In dieser Gleichung entsprechen den linearen Functionen P und Q zwei zugeordnete Diametral-Ebenen des Cylinders, welche jede Ebene in zwei solchen geraden Linien schneiden, die zugeordnete Durchmesser der jedesmaligen Durchschnitts-Curve sind.

Betrachten wir endlich noch den Cylinder als einen Kegel, dessen Mittelpunct unendlich weit liegt, und stellen ihn, diesem entsprechend, in der Voraussetzung, dass

$$R\equiv\lambda P+\mu Q+\nu,$$

durch die Gleichung:

$$\pi P^2+\varkappa Q^2+\rho R^2=0,$$

dar, so sind die drei zugeordneten Durchmesser des Kegels in ein System von drei zugeordneten parallelen geraden Linien des Cylinders, und die drei zugeordneten Diametral-Ebenen in drei zugeordnete, in jenen parallelen geraden Linien sich schneidende Ebenen übergegangen. Jede beliebige Ebene schneidet die drei zugeordneten in einem Pol-Dreieck der Durchschnitts-Curve.

Ein System zweier parallelen Ebenen, das durch die Gleichung

$$P^2+\varkappa=0$$

dargestellt wird, hat (P) zur Diametral-Ebene, welche zugleich der geometrische Ort für die Mittelpuncte ist. Ein solches System können wir auch, in der Voraussetzung, dass

$$Q\equiv\lambda P+\mu,$$

*) Wir können nemlich, indem wir die Gleichungen der beiden Schnitt-Ebenen durch

$$s=0, \qquad r=0,$$

darstellen, P und Q als Functionen von s und r und einer beliebigen dritten linearen Function betrachten. In Verbindung mit $s=0$ reduciren sich alsdann P und Q auf Functionen bloss zweier Veränderlichen, wonach die vier Gleichungen des Textes nun die vier Durchschnittslinien in der Ebene S unmittelbar darstellen. Wenn s und r gleichzeitig verschwinden, reduciren sich P und Q auf Functionen einer einzigen Veränderlichen, und können alsdann für unsern Gesichtspunct als Abstände der Durchschnittspuncte der Ebene P und Q mit der Linie (r, s) von einem festen Puncte dieser Linie construirt werden.

durch die Gleichung

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 = 0$$

darstellen, und dann stehen die beiden Ebenen (P) und (Q), welche mit den gegebenen parallel sind, mit diesen in harmonischer Beziehung, so dass die vier Ebenen von einer beliebigen geraden Linie in vier harmonischen Theilungspuncten geschnitten werden.

55. Nach dem Principe der Reciprocität sind wir hier aller analytischen Entwicklungen in dem System der Plan-Coordinaten, die nichts Neues darbieten würden, überhoben. In der allgemeinen Gleichungs-Form:

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 + \sigma S^2 = 0, \qquad (1)$$

stellen die vier Gleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad S = 0,$$

die vier Eckpuncte eines Pol-Tetraeders der Fläche dar. Unmittelbar können wir durch die Coordinaten-Annahme in Evidenz bringen, dass einer, zwei oder drei dieser Puncte nach gegebener Richtung unendlich weit gerückt sind. Dem letztern Falle entspricht die Gleichung

$$\pi W^2 + \varkappa T^2 + \rho U^2 + \sigma V^2 = 0, \qquad (2)$$

wobei die drei Axen T, U und V drei zugeordnete Durchmesser der Fläche sind. Wenn die Fläche in eine ebene Curve übergeht, so erhalten wir, statt des Pol-Tetraeders ein blosses Pol-Dreieck, und indem zwei der drei Eckpuncte desselben unendlich weit rücken, zwei zugeordnete Durchmesser der Curve. Artet diese Curve endlich in ein System von zwei Puncten aus, so reducirt sich das Pol-Dreieck auf zwei Puncte, die mit jenen beiden vier harmonische sind. Von diesen zwei Puncten kann einer unendlich weit rücken; dann erhalten wir für den dritten die Mitte der beiden gegebenen.

In der allgemeinen Plan-Coordinaten-Annahme kann die Form (1), ganz ähnlich wie früher in der Voraussetzung von Punct-Coordinaten, durch eine solche ursprüngliche Functions-Bestimmung, in deren Folge ein Punct des Pol-Tetraeders (s), identisch mit (S), auf der Fläche selbst liegt oder eine Kante desselben (s, r), identisch mit (S, R), die Fläche berührt, illusorisch werden. Bei der zuletzt erwähnten besondern Coordinaten-Annahme particulasirt sich diese Bestimmung dahin, dass die Form (2) dann illusorisch wird, wenn die Axe v, die mit der Axe V zusammenfällt (33) eine Seite des Asymptoten-Kegels ist und demnach der Punct (v) auf der Fläche unendlich weit liegt, oder auch, wenn die Ebene der beiden Axen v und u, welche zugleich auch die beiden Axen V und U enthält (33), den Asymptoten-Kegel und hiernach auch die Fläche selbst in unendlicher Entfernung berührt. (35)

§. 5.

Discussion der Gleichungs-Form

$tu = \mu vw$

in der zweifachen Coordinaten-Bestimmung.

56. Die Gleichung

$$tu = \mu vw$$

ist, sowohl in dem Systeme der Punct-Coordinaten als auch in dem Systeme Plan-Coordinaten, die allgemeine Gleichung der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung (23, 30). Wir wollen, weil in ihr das

Characteristische dieser Flächen sich ausdrückt, der Discussion dieser Gleichungs-Form einen besondern Paragraphen widmen. Indem wir den unbestimmten Coefficienten μ in Evidenz bringen, hängt jeder der vier in dieser Gleichung vorkommenden linearen Functionen nur noch von drei Constanten ab. Die Gleichung enthält also $4.3+1 \equiv 13$ Constante und unter diesen vier überzählige.

Zur Unterscheidung wollen wir, wenn die drei linearen Functionen in der obigen Gleichung Plan-Coordinaten bedeuten sollen, uns der Cursiv-Buchstaben *t*, *u*, *v*, *w* bedienen, die gewöhnliche Schrift aber beibehalten, wenn wir den linearen Functionen die Bedeutung von Punct-Coordinaten geben.

57. Wenn wir hiernach, in der Voraussetzung von Punct-Coordinaten,

$$\mathrm{tu} = \mu\mathrm{vw} \qquad (1)$$

für die allgemeine Gleichung der geradlinigen Flächen nehmen, so bestimmen wir eine solche Fläche durch die vier, den vier linearen Functionen entsprechenden Ebenen:

$$\mathrm{t} = 0, \qquad \mathrm{u} = 0, \qquad \mathrm{v} = 0, \qquad \mathrm{w} = 0,$$

und überdiess durch den constanten Coefficienten μ. Wir wollen zuvörderst die Beziehung jener vier Ebenen zur Fläche betrachten, eine Beziehung, die keine ausschliessliche sein kann, weil die Bestimmung der vier Ebenen vier willkührliche Constante einschliesst.

Die Gleichung der Fläche wird befriedigt, wenn die beiden Gleichungen einer beliebigen der folgenden vier Zusammenstellungen gleichzeitig bestehen:

$$\begin{aligned} \mathrm{t} &= 0, & \mathrm{v} &= 0, \\ \mathrm{t} &= 0, & \mathrm{w} &= 0, \\ \mathrm{u} &= 0, & \mathrm{v} &= 0, \\ \mathrm{u} &= 0, & \mathrm{w} &= 0; \end{aligned}$$

also liegen die vier geraden Linien (t, v), (t, w), (u, v) und (u, w), in welchen die beiden Ebenen (t) und (u) von den beiden Ebenen (v) und (w) geschnitten werden, in ihrer ganzen Erstreckung auf der durch die Gleichung (1) dargestellten Fläche. Es bilden aber überhaupt vier Ebenen ein Tetraeder und die fraglichen vier Durchschnittslinien zweier derselben (t) und (u) mit den beiden andern (v) und (w) zwei Paare gegenüberliegender Kanten desselben. Als drittes Kanten-Paar erhalten wir alsdann die Durchschnittslinie (t, u) der beiden ersten und die Durchschnittslinie (v, w) der beiden andern Ebenen. Die Beziehung dieses dritten Kanten-Paares zur Fläche ergibt sich sogleich, wenn wir uns erinnern, dass die vorstehnnde Gleichungs-Form aus der folgenden

$$\mathrm{P}^2 - \lambda^2\mathrm{Q}^2 - \mu(\mathrm{R}^2 - \gamma^2\mathrm{S}) = 0,$$

hervorgegangen ist, indem wir

$$\begin{aligned} \mathrm{P} + \lambda\mathrm{Q} &\equiv \mathrm{t}, & \mathrm{P} - \lambda\mathrm{Q} &\equiv \mathrm{u}, \\ \mathrm{R} + \gamma\mathrm{S} &\equiv \mathrm{v}, & \mathrm{R} - \gamma\mathrm{S} &\equiv \mathrm{w}, \end{aligned}$$

gesetzt haben (7), wonach die Durchschnittslinie der beiden Ebenen (t) und (u), und die Durchschnittslinie der beiden Ebenen (v) und (w) bezüglich mit den Durchschnittslinien der beiden Ebenen (P) und (Q) und der beiden Ebenen (R) und (S) zusammenfällt. Es sind aber die beiden Durchschnittslinien (P, Q) und (R, S) zwei zugeordnete Polar-Linien in Beziehung auf die Fläche (37). Da wir überdiess noch keine Rücksicht auf den unbestimmten Coefficienten μ genommen haben, und dieser jeder beliebige sein kann, so ergibt sich der nachstehende Satz:

Durch zwei Paare gegenüberliegender Kanten eines gegebenen Tetraeders lassen sich unendlich viele Flächen der zweiten Ordnung legen: die beiden

Kanten des dritten Paares sind zugeordnete Polaren in Beziehung auf jede dieser Flächen.

58. Da irgend zwei Paare gegenüberliegender Kanten eines Tetraeders ein räumliches Viereck bilden, dessen beide Diagonalen das jedesmalige dritte Paar gegenüberliegender Kanten sind, so können wir den vorstehenden Satz auch auf folgende Weise ausdrücken:

Durch die vier Seiten eines gegebenen räumlichen Vierecks lassen sich unendlich viele Flächen der zweiten Ordnung legen: die beiden Diagonalen des Vierecks sind zugeordnete Polaren in Beziehung auf jede dieser Flächen.

In dieser neuen Aussage knüpft sich der Satz unmittelbar an die Bestimmung der Fläche durch eine Gleichung zwischen Plan-Coordinaten. Diese Gleichung sei:

$$tu = \mu vw. \qquad (2)$$

Dann stellen die vier Gleichungen

$$t = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

vier Puncte dar. Da die Gleichung (2), ähnlich wie früher die Gleichung (1), befriedigt wird, wenn gleichzeitig

$$\begin{aligned} t &= 0, & v &= 0, \\ v &= 0, & u &= 0, \\ u &= 0, & w &= 0, \\ w &= 0, & t &= 0, \end{aligned}$$

so folgt dass die geraden Linien (t, v), (v, u), (u, w) und (w, t) — Verbindungs-Linien der Puncte (t) und (u) mit den Puncten (v) und (w) —, welche ein räumliches Viereck bilden, ganz auf der Fläche (2) liegen. Wie oben, so ergibt sich auch hier, dass die Verbindungs-Linien der Puncte (t) und (u), so wie der Puncte (v) und (w), Diagonalen jenes Vierecks, in Beziehung auf die Fläche zugeordnete Polaren sind.

Um dieselbe Gruppe von unendlich vielen Flächen zweiter Ordnung durch die beiden Gleichungen (1) und (2) auszudrücken, brauchen wir bloss, indem wir μ unbestimmt lassen, die Symbole t, u, v, w so zu bestimmen, dass sie bezüglich denjenigen vier Puncten entsprechen, welche nach dem, der Beweisführung der 57. Nummer zu Grunde liegenden, Algorithums, durch die Symbole (t, v, w), (u, v, w), (v, t, u), (w, t, u) bezeichnet werden. Die vier Seiten des Vierecks werden alsdann in den beiden Coordinaten-Bestimmungen übereinstimmend durch (t, v) und (t, v), (v, u) und (v, u), (u, w) und (u, w), (w, t) und (w, t), die beiden Diagonalen desselben durch (t, u) und (t, u), (v, w) und (v, w) bezeichnet.

Durch ein und dieselbe analytische Beweisführung in den beiden Systemen der Punct- und Plan-Coordinaten gelangen wir, im Allgemeinen, zu zwei verschiedenen Sätzen, die durch das Princip der Reciprocität miteinander verknüpft sind. Daraus, dass hier derselben Beweisführung auch derselbe Satz entspricht, ziehen wir den Schluss, dass auch das Princip der Reciprocität von dem obigen Satze zu demselben Satze wieder zurückführt. Ueber den Grund hiervon wird uns das Folgende nähern Aufschluss geben.

59. Die vier Ebenen (t), (u), (v), (w) sind Tangential-Ebenen der durch die Gleichung (1) dargestellten Fläche und die Winkelpuncte (t), (u), (v), (w) des bezüglichen räumlichen Vierecks die Berührungspuncte auf denselben. Die Ebene (t) zum Beispiel wird von den beiden Ebenen (v) und (w) in solchen zwei geraden Linien geschnitten, (t, v) und (t, w), welche in ihrer ganzen Ausdehnung auf der Fläche liegen, woraus folgt, dass (t) eine Tangential-Ebene der Fläche ist und dass

der Berührungspunct in den Durchschnitt der beiden Linien (t, v) und (t, w), das heisst, in den Punct (t, v, w) oder nach der andern Bezeichnung (58) in den Punct (*t*) fällt.

Jede auf der Fläche liegende gerade Linie ist ihre eigene zugeordnete Polare in Beziehung auf die Fläche. Um überhaupt nemlich die zugeordnete Polare einer gegebenen geraden Linie zu bestimmen, brauchen wir nur die Durchschnittslinien der Polar-Ebenen irgend zweier Puncte derselben zu construiren, also, wenn die gegebene gerade Linie ganz auf der Fläche liegt, nur die Durchschnittslinie der Tangential-Ebenen in irgend zwei ihrer Puncte. Die gerade Linie (t, v) zum Beispiel geht durch die beiden Puncte (t, v, w) und (t, v, u). Durch den erstern dieser beiden Puncte geht auch die Linie (t, w) und durch den zweiten die Linie (u, v), welche beide ebenfalls ganz auf der Fläche liegen. Die Tangential-Ebenen in diesen beiden Puncten sind also diejenigen beiden Ebenen, welche einerseits durch (t, v) und (t, w), andrerseits durch (t, v) und (u, v) gehen und also in der gegebenen geraden Linie (t, v) sich schneiden.

60. Es möchte angemessen sein, die bisherigen Resultate, in so weit sie die Theorie der Pole und Polaren betreffen, auf analytischem Wege abzuleiten. Setzen wir, indem wir hier die Punct-Coordinaten-Bestimmung, bloss weil sie die gewöhnlichere ist, zu Grunde legen:

$$tu - \mu vw \equiv \Omega,$$

und bezeichnen wir die Werthe derjenigen vier Veränderlichen, welche sich auf irgend einen gegebenen Punct beziehen, durch t′, u′, v′ und w′, so ist die Gleichung der Polar-Ebene dieses Punctes:

$$t'.\frac{d\Omega}{dt} + u'.\frac{d\Omega}{du} + v'.\frac{d\Omega}{dv} + w'.\frac{d\Omega}{dw} = 0,$$

oder, wenn wir entwickeln,

$$t'u + u't = \mu\{v'w + w'v\}. \qquad (3)$$

Wenn insbesondere der gegebene Punct auf der Fläche liegt, so ist diese Gleichung die Gleichung der Tangential-Ebene in diesem Puncte.

Wenn der gegebene Punct auf der geraden Linie (t, u) liegt, so reducirt sich die vorstehende Gleichung, durch das Verschwinden von t′ und u′ auf:

$$v'w + w'v = 0.$$

Diese Gleichung stellt eine solche Ebene dar, welche durch die gerade Linie (v, w) geht und um diese Linie sich dreht, wenn v′ und w′ dadurch andere Werthe erhalten, dass der gegebene Punct auf der gegebenen geraden Linie fortrückt. Die beiden geraden Linien (t, u) und (v, w) sind zugeordnete Polaren (57).

Liegt der gegebene Punct auf der Fläche und zwar in dem Durchschnittspuncte der drei Ebenen (t), (v), (w), so reducirt sich die Gleichung (3) durch das Verschwinden von t′, v′ und w′ auf

$$t = 0.$$

Die Ebene (t) ist also eine Tangential-Ebene und der Punct (t′, v′, w′) der Berührungspunct auf ihr.

Wenn der gegebene Punct irgendwo auf der geraden Linie (t, v) liegt, so reducirt sich die Gleichung (3) durch das Verschwinden von t′ und v′ auf

$$u't = \mu w'v,$$

also auf die Gleichung einer Ebene, welche durch diejenige gerade Linie (t, v) geht, auf welcher der gegebene Punct angenommen wurde, und um diese gerade Linie sich ganz herumdreht, während dieser Punct dieselbe in ihrer ganzen Erstreckung durchläuft. Die gerade Linie (t, v) ist also ihre eigene Polare. Da der gegebene Punct auf der Fläche selbst liegt, so stellt die letzte Gleichung eine

Tangential-Ebene der Fläche dar. Jede Ebene also, welche durch eine gegebene, auf einer Fläche zweiter Ordnung liegende gerade Linie geht, ist eine Tangential-Ebene der Fläche, welche dieselbe noch in einer zweiten geraden Linie schneidet. Auf der gegebenen geraden Linie liegt der Berührungspunct.

61. Wir können nach dem Vorstehenden uns Rechenschaft über die vier willkührlichen Constanten geben, welche die allgemeinen Gleichungen (1) und (2) enthalten und die unbestimmte Aufgabe lösen, eine gegebene geradlinige Fläche in der zwiefachen Coordinaten-Bestimmung, durch eine Gleichung von der fraglichen Form auszudrücken. In dem Falle der Gleichung (1) handelt es sich zunächst darum, diejenigen vier Ebenen zu bestimmen, welche den vier linearen Functionen t, u, v und w entsprechen, in dem Falle der Gleichung (2) diejenigen vier Puncte, auf welche die vier linearen Functionen t, u, v und w sich beziehen.

Zu diesem Ende nehmen wir eine, die Fläche in irgend zwei Puncten (t) und (u) schneidende gerade Linie beliebig an. Eine solche gerade Linie hängt von vier willkührlichen Constanten ab. Dann ist durch die Fläche die zugeordnete Polare derselben vollkommen bestimmt und diese schneidet die Fläche nothwendig in zwei reellen Puncten (40). Die vier Durchschnittspuncte entsprechen alsdann den vier linearen Functionen der Gleichung (2), und die vier Ebenen, welche durch je drei dieser vier Puncte sich legen lassen und welche Tangential-Ebenen der Fläche sind, den vier linearen Functionen der Gleichung (1).

Zugleich ergibt sich hier als theilweise Umkehrung des Satzes der 57. Nummer der folgende Satz.

Wenn wir die beiden Durchschnitte einer gegebenen geraden Linie und einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung mit den beiden Durchschnitten ihrer zugeordneten Polare und der Fläche durch vier gerade Linien verbinden, so erhalten wir ein solches Viereck, dessen Seiten ganz auf der Fläche liegen. Wenn wir in den beiden Paaren von Durchschnittspuncten Tangential-Ebenen an die Fläche legen, so erhalten wir ein Tetraeder, von dem wir sagen können, dass es der Fläche zugleich ein- und umgeschrieben ist.

62. Der Coefficient μ in den allgemeinen Gleichungen (1) und (2) kann erst bestimmt werden, nachdem die bezüglichen vier linearen Functionen vollkommen bestimmt worden sind. Wir wollen, und zwar in der zwiefachen Coordinaten-Bestimmung diesen Functionen die Bedeutung kürzester Abstände geben (Einl. (6—7). Schreiben wir in dieser Voraussetzung die allgemeinen Gleichungen unter der folgenden Form:

$$\mu = \frac{vw}{tu}, \qquad \mu = \frac{vw}{tu},$$

so ergeben sich unmittelbar die nachstehenden geometrischen Deutungen.

Wenn man von irgend einem Puncte einer gegebenen geradlinigen Fläche zweiter Ordnung auf die vier Seiten-Ebenen eines ihr ein- und umgeschriebenen Tetraeders Perpendikel fällt, so steht das Produkt zweier dieser Perpendikel, die auf zwei, nicht auf der Fläche sich schneidenden Seiten-Ebenen gefällt werden, zu dem Producte der beiden übrigen in constantem Verhältnisse.

Wenn man von den vier Winkelpuncten eines auf einer Fläche zweiter Ordnung liegenden Vierecks auf eine beliebige Tangential-Ebene Perpendikel fällt, so steht das Product solcher zwei dieser Perpendikel, die durch zwei gegenüberliegende Winkelpuncte des Vierecks gehen, zu dem Producte der beiden übrigen in constantem Verhältnisse.

Durch Umkehrung erhalten wir hieraus die folgenden Orts-Bestimmungen:

Wenn ein Tetraeder gegeben ist, so ist der geometrische Ort solcher Puncte, für welche das Product der Abstände von zwei der vier Seiten-Ebenen zu dem Producte der Abstände von den beiden übrigen in constantem Verhältnisse steht, eine Fläche zweiter Ordnung, welche durch die vier Durchschnittslinien der beiden ersten Seiten-Ebenen mit den beiden übrigen geht. Wenn vier Puncte im Raume gegeben sind, so umhüllen diejenigen Ebenen, für welche das Product der Abstände von zwei dieser Puncte zu dem Producte der Abstände von den beiden übrigen in constantem Verhältnisse steht, eine Fläche zweiter Ordnung, welche durch diejenigen vier geraden Linien geht, die die beiden ersten Puncte mit den beiden andern verbinden.

63. In dem Falle der Gleichung (1) ist irgend ein Punct der Fläche, in dem Falle der Gleichung (2) irgend eine Tangential-Ebene derselben zur linearen Bestimmung von μ hinreichend, weil dadurch sowohl in dem einen Falle, als in dem andern, die vier linearen Functionen, bezüglich auf Punct und Ebene, bezogen, solche vollkommen bestimmte Werthe erhalten, welche die Gleichung der Fläche befriedigen. Eine geradlinige Fläche der zweiten Ordnung ist also auf einzige Weise bestimmt, wenn ein auf ihr liegendes Viereck und ausserdem entweder ein Punct oder eine Tangential-Ebene derselben gegeben ist.

Es kommen hierbei von den neun linearen Constanten, von denen überhaupt eine Fläche der zweiten Ordnung und der zweiten Classe abhängt, acht auf die Bedingung, dass eine solche Fläche durch die vier Seiten eines gegebenen Vierecks geht. Es ist nämlich die Bedingung, dass eine Fläche der zweiten Ordnung eine gegebene gerade Linie in ihrer ganzen Ausdehnung enthalte, damit als identisch zu betrachten, dass sie durch drei gegebene, auf dieser geraden Linie liegende Puncte gehe, weil eine gerade Linie, welche mehr als zwei Puncte mit einer Fläche dieser Ordnung gemein hat, nothwendig ganz auf derselben liegen muss. Hiernach geht eine solche Fläche durch die vier Seiten eines gegebenen räumlichen Vierecks, wenn sie durch vier Winkelpuncte desselben und ausserdem noch durch einen dritten Punct auf jeder Seite oder deren Verlängerung geht. Wenn also die Fläche zugleich noch durch einen gegebenen Punct gehen soll, so ist diess damit gleichbedeutend, dass sie durch neun gegebene Puncte gehe, von welchen acht zu drei auf vier sich schneidenden geraden Linien liegen.

Die Bedingung, dass eine Fläche zweiter Classe (und Ordnung) durch eine gegebene gerade Linie gehe, können wir auch dadurch umschreiben, dass wir sagen, sie berühre irgend drei in dieser geraden Linie sich schneidende Ebenen, weil, wenn durch eine gerade Linie mehr als zwei Tangential-Ebenen der Fläche gehen, diese Linie ganz auf derselben liegt. Die Fläche geht hiernach durch die vier Seiten eines gegebenen Vierecks, wenn sie die vier Seiten-Ebenen des dem Vierecke entsprechenden Tetraeders und ausserdem noch eine beliebige durch jede Seite des Vierecks gehende Ebene berührt. Wenn also eine Fläche der zweiten Classe durch die vier Seiten eines räumlichen Vierecks gehen und überdiess eine gegebene Ebene berühren soll, so ist diess damit gleichbedeutend, dass sie neun Ebenen berühre, von denen acht zu drei durch vier sich schneidende gerade Linien gehen.

64. Die Gleichung der Fläche in dem Systeme der Punct-Coordinaten:

$$tu = \mu vw, \tag{1}$$

wird zwiefach befriedigt, wenn wir bei beliebiger Annahme von $\varkappa$ und λ, einmal gleichzeitig:

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 = 0, \qquad S^2 = 0,$$

setzen. Die erste dieser beiden Gleichungen stellt einen Kegel dar (24), dessen Spitze (P, Q, R) der Durchschnittspunct der drei ersten Ebenen (2) ist, und welcher die Fläche im Durchschnitte derselben mit der Ebene (S) berührt. Denn weil diese Gleichung eine algebraische Folge aus der Gleichung der Fläche und der zweiten der beiden vorstehenden Gleichungen ist, geht der durch dieselbe dargestellte Kegel durch die beiden zusammmenfallenden Curven zweiter Ordnung, in welcher die Fläche und zwei in der Ebene S zusammenfallende Ebenen sich schneiden. Der fragliche Kegel reducirt sich auf einen Punct, wenn die drei Coefficienten seiner Gleichung im Zeichen übereinstimmen und dann liegt die Spitze desselben innerhalb der Fläche.

Wir können ferner die Gleichung (1) befriedigen, indem wir gleichzeitig etwa

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 = 0, \qquad R^2 = 0, \qquad S^2 = 0,$$

setzen. Das System der beiden letzten Gleichungen stellt eine in die Kante (R, S) zusammenfallende gerade Linie dar; die erste Gleichung, welche eine algebraische Folge aus den beiden letzten Gleichungen und der Gleichung der Fläche ist, stellt ein System von zwei Ebenen dar. Diese beiden Ebenen berühren die Fläche im Durchschnitte derselben mit der Kante (R, S), weil sie durch die zweimal vier Durchschnittspuncte der Fläche mit jenen vier in dieser Kante zusammenfallenden geraden Linien gehen muss. Sie können reell oder imaginär sein. Im letztern Falle, der analytisch dadurch ausgedrückt wird, dass π und $\varkappa$ im Zeichen übereinstimmen, wird die Fläche von der Kante (R, S) nicht geschnitten.

40. Nach der vorigen Nummer ergibt sich eine Unterscheidung der Flächen zweiter Ordnung in Beziehung auf ihre Pol-Tetraeder. Wie alle solche Flächen, so haben auch die imaginären ihre reellen Pol-Tetraeder, deren Betrachtung indess für uns kein besonderes Interesse hat. In dem Falle der nicht geradlinigen Flächen (des Ellipsoids, des elliptischen Hyperboloids und des elliptischen Paraboloids), denen die Gleichungs-Form:

$$\pi^2 P^2 + \varkappa^2 Q^2 + \rho^2 R^2 - \sigma^2 S^2 = 0,$$

entspricht, liegt immer nur eine Ecke des Pol-Tetraeders, nemlich (P, Q, R), innerhalb der Fläche, die drei übrigen (P, Q, S), (P, R, S) und (Q, R, S) liegen ausserhalb. Diesem entsprechend begegnet immer auch nur eine einzige der vier Seiten-Ebenen des Tetraeders, nemlich (S), der Fläche nicht, während die drei übrigen, (R), (Q) und (P), dieselbe in reellen Curven schneiden. Drei Kanten, (S, P), (S, Q) und (S, R), schneiden ferner die Fläche, während die drei gegenüberliegenden (Q, R), (P, R) und (P, Q) ihr nicht begegnen.

In dem Falle der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung (des hyperbolischen Hyperboloids und des hyperbolischen Paraboloids), denen die folgende Gleichungs-Form:

$$\pi^2 P^2 + \varkappa^2 Q^2 - \rho^2 R^2 - \sigma^2 S^2 = 0,$$

entspricht, liegen alle vier Ecken der Pol-Tetraeder ausserhalb, denn es reducirt sich die vorstehende Gleichung, welches ihrer vier Glieder auch ausfallen mag, immer auf die Gleichung eines reellen Kegels. Die vier Seiten-Ebenen der Pol-Tetraeder schneiden also auch die Fläche in reellen Curven. Von den sechs Kanten begegnen bloss zwei gegenüberliegende der Fläche nicht, nämlich (P, Q) und (R, S), während die beiden andern Paare gegenüberliegender Kanten, (P, R) und (Q, S), (P, S) und (Q, R), dieselbe schneiden.

41. Bevor wir weiter gehen, müssen wir die Bedeutung der sechs willkührlichen Constanten, welche die allgemeine Gleichung:

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 + \sigma S^2 = 0, \qquad (1)$$

einschliesst, näher in's Auge fassen.

Indem wir, wie in der 23. Nummer die Flächen zweiter Ordnung durch die allgemeine Gleichung mit neun unbestimmten Coefficienten:

$$Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + A'''s^2 + 2B''pq + 2B'pr + 2Bqr + 2Cps + 2C'qs + 2C''rs = 0, \qquad (2)$$

darstellen, können wir die vier, der Coordinaten-Bestimmung zu Grunde gelegten, Ebenen:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0,$$

von Vorne herein willkürlich annehmen; denn, wie wir sie auch angenommen haben mögen, wir können, bei gehöriger Bestimmung der neun Constanten, immer jede Fläche der zweiten Ordnung durch die allgemeine Gleichung (2) ausdrücken. Um von dieser ursprünglichen Coordinaten-Bestimmung zu derjenigen überzugehen, welche der Gleichung (1) zu Grunde liegt, haben wir nach der in der 1. Nummer bezeichneten Umformungsweise zunächst

$$s \equiv S$$

gesetzt, so dass also auch die Ebene (S) von Vorne herein immer noch durchaus willkürlich angenommen werden kann. Indem wir dann ferner in der ursprünglichen Gleichung r, q und p bezüglich mit

$$r + \gamma S, \quad q + \beta S, \quad p + \alpha S,$$

vertauschen, drehen wir die drei beliebigen Ebenen (r), (q) und (p) um ihre Durchschnittslinie mit der beliebig angenommenen Ebene (S) so lange, bis alle drei in dem Pole dieser Ebene sich schneiden. Die Ebene (r) in ihrer neuen Lage ist die Ebene (R). Diese Ebene ist also nur der Bedingung unterworfen, dass sie durch den Pol der Ebene (S) geht und übrigens willkührlich. Indem wir ferner das neue q und das neue p bezüglich mit

$$q + \beta' R, \qquad p + \alpha' R,$$

vertauschen, drehen wir die bezüglichen Ebenen um ihre Durchschnittslinie mit der Ebene (R) so lange, bis ihre eigene Durchschnittslinie die Polare der Kante (R, S) wird. Die Ebene (q) in der neuen Lage ist die Ebene (Q), und diese also bloss dadurch bestimmt, dass sie durch die Polar-Linie der Kante (R, S) geht, übrigens beliebig. Indem wir endlich das neue p mit

$$p + \alpha'' Q$$

vertauschen, drehen wir die bezügliche Ebene um ihre Durchschnittslinie mit der Ebene (Q) so lange, bis sie die Polar-Ebene des Punctes (Q, R, S) wird, in welchem die drei Ebenen (Q), (R) und (S) sich schneiden. Die Ebene (p) nach dieser letzten Drehung ist keine andere als die Ebene (P) und vollkommen durch die Fläche bestimmt, nachdem es die drei letztgenannten Ebenen sind.

Von den sechs überzähligen Constanten finden sich hiernach drei wieder in der willkührlichen Annahme der Ebene (S), zwei in der willkührlichen Annahme der Kante (R, S) in der Ebene (S) und eine endlich in der willkührlichen Annahme des Punctes (Q, R, S) auf dieser Kante (R, S).

42. Wenn wir, nach der zweiten in der 20. Nummer entwickelten Umformungsweise, statt p, durch die folgende Gleichung P einführen:

$$p = P - a''q - a'r - as,$$

so verrücken wir die ursprüngliche Coordinaten-Ebene (p) so, dass sie nach der Verrückung in die Polar-Ebene (P) des beliebig angenommenen Punctes (Q, R, S) fällt. Indem wir ferner, statt q, durch die nachstehende Gleichung Q einführen:

$$q = Q - b'r - bs,$$

drehen wir die ursprüngliche Coordinaten-Ebene (q) um ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunct mit den Ebenen (r) und (s) so, dass, nach der Drehung die Durchschnittslinie (P, Q) die Polare der durch den Punct (Q, R, S) willkührlich gelegten geraden Linie (R, S) ist. Indem wir endlich durch die folgende Gleichung:

$$r = R - cs,$$

R statt r einführen, drehen wir die ursprüngliche Ebene (r) um ihre Durchschnittslinie mit der Ebene s), bis sie eine solche Lage annimmt, dass ihr Durchschnittspunct (P, Q, R) mit der Kante (P, Q) der Pol einer willkührlich durch die gerade Linie (R, S) gelegten Ebene (S) ist. Letztlich ist (s) identisch mit (S).

Hier finden sich von den sechs überzähligen Constanten drei wieder in der willkührlichen Annahme des Punctes (Q, R, S), zwei in der willkührlichen Annahme der durch diesen Punct gelegten geraden Linie (R, S) und eine in der willkührlichen Annahme der durch diese gerade Linie gehenden Ebene (S).

43. Wenn wir durch die Kante (R, S), die wir als eine willkührlich angenommene gerade Linie betrachten können, irgend eine Ebene legen, die wir, indem λ einen unbestimmten Coefficienten bedeutet, durch die Gleichung:

$$R + \lambda S \equiv r = 0,$$

darstellen, so erhalten wir für die Gleichungen der Durchschnitts-Curve der Fläche (1) mit dieser Ebene:

$$r = 0, \qquad \pi P^2 + \varkappa Q^2 + (\rho\lambda^2 + \sigma) S^2 \qquad (2)$$

Hiernach sehen wir aus der Theorie der Curven zweiter Ordnung *), dass in Beziehung auf die Durchschnitts-Curve die gerade Linie (S, r) — identisch mit der geraden Linie (R, S) — den Durchschnittt der beiden geraden Linien (P, r) und (Q, r), also einen Punct der geraden Linie (P, Q) zum Pole hat. Zunächst erhalten wir hier also den Satz, dass, wenn wir um eine beliebige gerade Linie eine durch dieselbe gehende Ebene sich drehen lassen, der geometrische Ort für die Pole dieser geraden Linie, in Beziehung auf die verschiedenen in der sich drehenden Ebene liegenden Durchschnitts-Curven, eine gerade Linie ist, und zwar die zugeordnete Polare der gegebenen geraden Linie in Beziehung auf die Fläche.

Wenn wir insbesondere, was auf zweifache Art geschehen kann, λ so bestimmen, dass

$$\lambda^2\rho + \sigma = 0,$$

so werden, während die schneidende Ebene in eine Tangential-Ebene übergeht, die Gleichungen der Durchschnitts-Curve

$$r = 0, \qquad \pi P^2 + \varkappa Q^2 = 0.$$

Die Bestimmung von λ ist nur dann reell, wenn ρ und σ entgegengesetzte Zeichen haben, und in diesem Falle nur lassen sich durch die gegebene Kante (Q, R) reelle Tangential-Ebenen an die Fläche legen, was nach der 40. Nummer darauf hinauskommt, dass die Kante (P, S) die Fläche nicht schneidet. Je nachdem, in dieser Voraussetzung, π und $\varkappa$ im Zeichen übereinstimmen oder nicht, das heisst, je nachdem die Fläche eine nicht geradlinige oder eine geradlinige ist, geht die Durchschnitts-Curve in der Tangential-Ebene in einen Punct über oder in ein System von zwei

*) System, S. 107.

geraden Linien, worin also eine characteristische Unterscheidung der beiden Hauptclassen der reellen Flächen zweiter Ordnung liegt. Wenn wir erwägen, dass das letzte Glied der zweiten Gleichung der Durchschnitts-Curve (2) sein Zeichen ändert, wenn die schneidende Ebene durch die Lage der Tangential-Ebene hindurchgeht, so gewinnen wir ferner die folgende Anschauung. Wenn eine Tangential-Ebene einer Fläche der zweiten Ordnung sich um eine in ihr liegende gerade Linie dreht, so bildet, wenn die Fläche eine nicht geradlinige ist, der Berührungspunct in der ursprünglichen Lage der Ebene den Uebergang von reellen zu imaginären Durchschnitts-Curven, während, wenn die Fläche eine geradlinige ist, die Durchschnitts-Curven immer Hyperbeln bleiben, welche in der ursprünglichen Lage der Ebene, durch zwei gerade Linien hindurchgehend, auf die andere Seite der Asymptoten hinübertreten.

Diejenigen beiden Werthe von λ, die den beiden Tangential-Ebenen entsprechen, wollen wir durch $\pm \lambda'$ bezeichnen. Dann ist aus den nachstehenden Gleichungen:

$$R = 0, \quad S = 0, \quad R + \lambda' S = 0, \quad R - \lambda' S = 0,$$

ersichtlich, dass die bezüglichen Ebenen, nemlich zwei Seiten-Ebenen des Pol-Tetraeders und die beiden Tangential-Ebenen der Fläche, welche durch die Durchschnitts-Kante jener beiden Ebenen gehen, in einer solchen Beziehung zu einander stehen, die man eine harmonische genannt hat, wonach man, wenn drei der vier Ebenen gegeben sind, die vierte auf lineare Weise bestimmen kann. Auf diese Weise ergibt sich eine dritte Construction der Pol-Tetraeder einer gegebenen Fläche der zweiten Ordnung. Wir nehmen nemlich eine Kante desselben (R, S) willkührlich an, wodurch die gegenüberliegende (P, Q) als reciproke Polare bestimmt ist; wir legen ferner durch jede dieser beiden gegenüberliegenden Kanten eine beliebige Ebene (R), (P) und bestimmen zu jeder dieser beiden Ebenen und den durch die bezügliche Kante gehenden beiden Tangential-Ebenen die vierte harmonische, (S), (Q). Der willkührlichen Annahme einer der beiden Kanten entsprechen vier überzählige Constanten und jeder der beiden durch diese Kante willkührlich gelegten Ebenen entspricht eine Constante.

Nach dem Principe der Reciprocität können wir, statt die durch die beiden Kanten gehenden Seiten-Ebenen des Tetraeders zu bestimmen, die auf diesen Kanten liegenden Ecken desselben construiren; denn auf jeder Kante bilden die bezüglichen beiden Eckpuncte und die Durchschnittspuncte mit der Fläche vier harmonische Theilungspuncte.

44. Endlich wird es uns nach den vorstehenden Erörterungen leicht, diejenigen Fälle zu übersehen, wo in der ursprünglichen Coordinaten-Annahme der Grund davon liegt, dass die Verwandlung der allgemeinen Gleichung in eine Gleichung von derjenigen Form, mit der wir uns in diesem Paragraphen beschäftigen, unmöglich wird (15). Die neue Coordinaten-Bestimmung wird nemlich unzureichend, wenn die vier Ebenen (P), (Q), (R) und (S) in demselben Puncte sich schneiden, weil dann jede der vier entsprechenden Veränderlichen eine lineare homogene Function der drei übrigen ist; wonach homogene Gleichungen zwischen vier Veränderlichen sich auf homogene Gleichungen zwischen drei derselben reduciren.

Wenn wir uns zunächst an die Betrachtungsweise der 41. Nummer halten, so ist ersichtlich, dass die vier fraglichen Ebenen (P), (Q), (R) und (S) dann durch denselben Punct gehen, wenn

erstens die Ebene (S), welche keine andere ist als die ursprüngliche Coordinaten-Ebene (s), die dargestellte Fläche berührt, weil dann die gegenüberliegende Ecke des Pol-Tetraeders in dem Berührungspuncte auf dieser Fläche liegt;

zweitens: wenn die Ebene (S) die Fläche schneidet, aber die willkührlich in ihr anzunehmende Kante (R, S) die Fläche berührt. Dann wird die Ebene (R), welche zugleich durch den Pol der Ebene (S) geht, eine Tangential-Ebene der Fläche. Die Kante (R, S) ist aber in Folge der Verwandlungs-Formeln der 1. Nummer keine andere als die gerade Linie (r, s);

drittens: wenn die Kante (R, S) die Fläche schneidet, aber der willkührlich anzunehmende Punct (Q, R, S) auf der Fläche liegt, weil dann die Polar-Ebene desselben (P) eine Tangential-Ebene der Fläche ist. Der Punct (Q, R, S) ist aber, in Gemässheit der eben angezogenen Verwandlungs-Formeln, kein anderer als der Punct (q, r, s).

45. Da die Ebene (s) oder, was dasselbe ist, (S), durchaus willkührlich bestimmt werden kann, so können wir insbesondere auch annehmen, dass sie unendlich weit gerückt sei und demnach die entsprechende lineare Function auf eine Constante sich reducirt habe. Alsdann ist der gemeinschaftliche Durchschnitt der drei Ebenen (P), (Q) und (R), als Pol einer unendlich weit entfernten Ebene, ein ausgezeichneter Punct in Beziehung auf die Fläche: er heisst Mittelpunct. Wie überhaupt jede durch den Mittelpunct gehende Ebene Diametral-Ebene und jede durch denselben gehende gerade Linie Diameter oder Durchmesser heisst, so heissen insbesondere die drei Ebenen (P), (Q) und (R) drei zugeordnete Diametral-Ebenen und die drei geraden Linien (P, Q), (P, R) und (Q, R), in welchen diese Ebenen, paarweise genommen, sich schneiden, drei zugeordnete Durchmesser oder Diameter der Fläche.

Indem wir hier wiederum von den ursprünglichen Veränderlichen p, q, r und der Gleichung:

$$Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + 2B''pq + 2B'pr + 2Bqr + 2Cp + 2C'q + 2C''r + D = 0, \qquad (1)$$

ausgehen, und die Betrachtungsweise der 41. Nummer hier übertragen, so verwandelt sich die Drehung der diesen Veränderlichen entsprechenden Ebenen (p), (q) und (r) um ihre Durchschnittslinie mit der (nun unendlich weit gerückten) Ebene (s) in eine parallele Verschiebung derselben, bis sie durch den Mittelpunct der Fläche gehen. Es sind also

$$\alpha = \frac{\Delta_{03}}{\Theta_3}, \qquad \beta = \frac{\Delta_{13}}{\Theta_3}, \qquad \gamma = \frac{\Delta_{23}}{\Theta_3},$$

die Werthe der ursprünglichen Veränderlichen, welche den Mittelpunct der Fläche bestimmen. Auf diesen Mittelpunct als Anfangspunct der Coordinaten bezogen, wird hiernach die Gleichung der Fläche:

$$Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + 2B''pq + 2B'pr + 2Bqr + \frac{\Phi}{\Theta_3} \equiv \Omega_1 + \frac{\Phi}{\Theta_3} = 0. \qquad (2)$$

Da Ω_1 eine homogene Function des zweiten Grades von p, q, r ist, so erhält sie denselben Werth, wenn wir einmal für diese drei Veränderlichen irgend drei Werthe willkührlich annehmen und dann die Zeichen dieser drei Werthe gleichzeitig ändern. Hieraus folgt, dass jede durch den Mittelpunct gehende und von der Fläche begränzte gerade Linie im Mittelpuncte halbirt wird.

Die beiden Paraboloide lassen sich desshalb nicht durch eine Gleichung von der Form (2) ausdrücken, weil ihr Mittelpunct unendlich weit liegt.

46. Die der neuen Coordinaten-Annahme entsprechende Gleichungs-Form:

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 + \sigma = 0, \qquad (3)$$

enthält nur noch drei überzählige Constanten. Von diesen kommen, nach der 41. Nummer, zwei darauf, dass die Ebene (R) jede beliebige sein kann, die durch den Pol der Fläche (S), also durch den Mittelpunct geht, und eine darauf, dass wir in dieser Ebene einen Diameter beliebig annehmen und dann durch denselben die Ebene (Q) legen können. An die Stelle des Pol-Tetraeders ist hier

also eine dreiseitige körperliche Ecke getreten, deren Seiten-Flächen drei zugeordnete Diametral-Ebenen und deren Kanten drei zugeordnete Diameter sind. Einen dieser drei Durchmesser und eine der beiden durch denselben gehenden Diametral-Ebenen können wir von Vorne herein beliebig annehmen.

Nehmen wir eine der drei Veränderlichen, etwa R, gleich Null, so stellt das System der beiden Gleichungen:

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \sigma = 0, \qquad R = 0,$$

die in der Ebene (R) liegende Durchschnitts-Curve der Fläche dar, welche, wie diese, von der zweiten Ordnung ist. Nach der Theorie dieser Curven sind die Durchschnittslinien der Ebene (R) mit den beiden Ebenen (Q) und (P) zwei zugeordnete Diameter der Durchschnitts-Curve. Die drei zugeordneten Diameter einer Fläche sind also, paarweise genommen, auch zugeordnete Diameter derjenigen Curven zweiter Ordnung, in welchen die Fläche von Ebenen geschnitten wird, die die bezüglichen Paare von Diameter enthalten.

Es ergibt sich aus dem Vorstehenden, dass, wenn irgend drei zugeordnete Diameter einer Fläche der zweiten Ordnung gegeben sind, wir auch dann, wenn zwei derselben mit irgend zwei andern vertauscht werden, welche, wie die ursprünglichen, zugeordnete Diameter derselben Durchschnitts-Curve sind, ein System dreier zugeordneter Diameter der Fläche behalten. Hiernach können wir uns des Ausdrucks bedienen, dass ein Diameter einer gegebenen Diametral-Ebene, und umgekehrt, eine Diametral-Ebene einem gegebenen Diameter zugeordnet sei.

47. In dem Falle des Ellipsoids, dem die folgende Gleichungs-Form entspricht:

$$\pi^2 P^2 + \varkappa^2 Q^2 + \rho^2 R^2 - \sigma^2 = 0,$$

begegnet jeder Diameter der Fläche und jede Diametral-Ebene schneidet die Fläche in einer in sich geschlossenen Curve, einer Ellipse.

In dem Falle des zweischaligen Hyperboloids, dem die folgende Gleichungs-Form entspricht:

$$\pi^2 P^2 - \varkappa^2 Q^2 - \rho^2 R^2 - \sigma^2 = 0,$$

begegnet von irgend drei zugeordneten Durchmessern nur einer der Fläche, nemlich (Q, R), die beiden andern begegnen ihr nicht. In zweien von drei zugeordneten Diametral-Ebenen, (Q) und (R), ist die Durchschnitts-Curve eine Hyperbel, in der dritten (P) ist die Durchschnitts-Curve imaginär.

In dem Falle des einschaligen Hyperboloids, dem die folgende Gleichungs-Form entspricht:

$$\pi^2 P^2 + \varkappa^2 Q^2 - \rho^2 R^2 - \sigma^2 = 0,$$

begegnen von irgend drei zugeordneten Durchmessern zwei der Fläche, nämlich (P, R) und (Q, R), der dritte (P, Q) begegnet ihr nicht. Von irgend drei zugeordneten Diametral-Ebenen schneidet eine, nämlich (R), die Fläche in einer Ellipse, die beiden andern, (P) und (Q), schneiden dieselbe in Hyperbeln.

48. Die vier Ecken eines Pol-Tetraeders der Fläche sind die Spitzen von vier Kegeln, welche der Fläche umschrieben sind und dieselbe in solchen Curven berühren, die in den gegenüberliegenden Seiten-Ebenen des Tetraeders liegen (39). Der neuen Coordinaten-Bestimmung entsprechend, fällt die Spitze eines dieser Kegel, für welchen die Berührungs-Curve ursprünglich in der Ebene (S) lag, wenn diese Ebene unendlich weit rückt, mit dem Mittelpuncte der Fläche zusammen. Dieser, vollkommen bestimmte, Kegel, der von solchen Ebenen umhüllt wird, welche die Fläche in unend-

licher Entfernung berühren, heisst Asymptoten-Kegel. Seine Gleichung ist, indem wir die Gleichungen (2) und (3) zu Grunde legen, die folgende:

$$\Omega_1 \equiv \pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 = 0,$$

und also für den Fall der beiden Hyperboloide reell, während er für den Fall des Ellipsoids auf einen Punct sich reducirt, und auch für imaginäre Flächen ein reeller Punct bleibt.

Die drei übrigen Kegel, deren Spitzen in diejenigen drei Ecken des Pol-Tetraeders fielen, welche, der neuen Coordinaten-Bestimmung entsprechend, nun unendlich weit gerückt sind, gehen in Cylinder über, deren Gleichungen

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \sigma = 0, \qquad \pi P^2 + \rho R^2 + \sigma = 0, \qquad \varkappa Q^2 + \rho R^2 + \sigma = 0$$

sind. Jeder dieser drei Cylinder berührt die Fläche in einer Curve, welche in einer der drei zugeordneten Diametral-Ebenen liegt, während die Seiten desselben dem dieser Ebene zugeordneten Diameter parallel sind.

49. Die drei Paare gegenüberliegender Kanten eines Pol-Tetraeders sind drei Paare zugeordneter Polaren (37). Von je zwei Kanten eines solchen Paares ist, der neuen Coordinaten-Bestimmung entsprechend, eine, etwa (P, Q), in einen Durchmesser übergangen, während die andere (R, S) in der Ebene (R), das heisst, in der jenem Diameter zugeordneten Diametral-Ebene, unendlich weit gerückt ist. Es folgt hieraus, dass die Polar-Ebenen aller Puncte, die auf einem beliebigen Durchmesser der Fläche liegen, der diesem Durchmesser zugeordneten Diametral-Ebene parallel sind, und, umgekehrt, dass die Pole aller Ebenen von paralleler Richtung in gerader Linie und zwar auf demjenigen Durchmesser der Fläche liegen, dessen zugeordnete Diametral-Ebene in die Reihe jener parallelen Ebenen gehört. Im Allgemeinen gehören zu diesen Ebenen auch zwei Tangential-Ebenen der Fläche, und somit ergibt sich insbesondere, dass diejenige gerade Linie, welche die Berührungspuncte auf zwei parallelen Tangential-Ebenen verbindet, ein Durchmesser der Fläche ist, und zwar derjenige, welche der mit den Tangential-Ebenen parallelen Diametral-Ebene zugeordnet ist.

50. Wenn wir endlich noch eine gegebene Fläche der zweiten Ordnung durch eine Ebene, die irgend einer Diametral-Ebene, etwa (R), parallel ist, schneiden, so erhalten wir, wenn λ einen unbestimmten Coefficienten bezeichnet, für die Durchschnitts-Curve in einer solchen Ebene:

$$R = \lambda, \qquad \pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho\lambda^2 + \sigma = 0.$$

Wir sehen hieraus, dass alle Durchschnitts-Curven ähnliche und ähnlich liegende sind, und dass der Durchmesser (P, Q) der geometrische Ort für die Mittelpuncte derselben ist. Es ist also bewiesen, dass, wenn wir, nach gegebener Richtung, eine Fläche zweiter Ordnung durch parallele Ebenen schneiden, die Mittelpuncte der Durchschnitts-Curven dieser Ebenen in gerader Linie liegen und zwar auf demjenigen Durchmesser der Fläche, dessen zugeordnete Diametral-Ebene die gegebene Richtung hat. Zu jenen Mittelpuncten gehören insbesondere auch die Berührungspuncte auf zwei Tangential-Ebenen. Wenn die gegebene Richtung sich ändert, so dreht sich der Durchmesser um den Mittelpunct der Fläche, und dieser ist also durch zwei Paare paralleler Schnitt-Ebenen vollkommen bestimmt.

51. Wir sind in der 45. Nummer von dem allgemeinen Falle sogleich zu demjenigen Falle übergegangen, wo eine Seiten-Ebene des Pol-Tetraeders unendlich weit gerückt ist. Dann liegen gleichzeitig drei Ecken desselben unendlich weit. Diesen Uebergang können wir stufenweise machen, indem wir diese drei Ecken successive unendlich weit rücken lassen.

Wenn bloss ein Punct des Pol-Tetraeders nach gegebener Richtung immer weiter sich entfernt

so nähert sich die gegenüberliegende Seiten-Ebene immer mehr derjenigen Diametral-Ebene, deren zugeordneter Durchmesser die gegebene Richtung hat. Drei Kanten des Tetraeders haben eben diese Richtung, während die drei übrigen in der Diametral-Ebene drei zugeordnete Polaren in Beziehung auf die Durchschnitts-Curve sind. Um von der ursprünglichen Gleichung zwischen p, q, r und s unmittelbar zu der entsprechenden Gleichungs-Form zu gelangen, müssen wir, in Gemässheit der 42. Nummer, die Veränderliche s so particularisiren, dass

$$s \equiv q + \lambda r + \mu;$$

dann finden wir, in Folge der Verwandlungs-Formeln der 1. Nummer, für Q und R ähnliche Ausdrücke, wonach auch

$$S \equiv Q + \eta R + \Theta.$$

Es ergibt sich hiernach die folgende Gleichungs-Form:

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 + \sigma(Q + \eta R + \Theta)^2 = 0,$$

mit fünf überzähligen Constanten. Die den linearen Functionen q, r, s (≡ S), R, Q entsprechenden Ebenen sind alle der gegebenen Richtung parallel. Die Ebene (P) ist die in Rede stehende Diametral-Ebene.

Wenn zugleich mit (Q, R, S) noch eine zweite Ecke (P, R, S) des Pol-Tetraeders, also in der Diametral-Ebene (P) einer der drei zugeordneten Pole, nach gegebener Richtung unendlich weit rücken soll, so müssen die beiden übrigen Pole, (P, Q, R) und (P, Q, S), auf einem Durchmesser (P, Q) der Fläche der Durchschnitts-Curve liegen und zwar so, dass sie, nach bekanntem Satze, mit den Scheiteln des Durchmessers vier harmonische Theilungspuncte bilden. Dieser Durchmesser ist also eine Kante des Pol-Tetraeders, die ihr gegenüberliegende (R, S) ist unendlich weit gerückt und somit sind die beiden Ebenen (R) und (S) parallel, während die beiden übrigen in einem Durchmesser der Fläche sich schneiden. Die Kanten (P, R) und (P, S) sind parallel, ebenso die Kanten (Q, R) und (Q, S). Diesem allem entspricht:

$$S \equiv R + \zeta,$$

wonach sich die nachstehende Gleichungs-Form mit bloss vier überzähligen Constanten ergibt:

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 + \sigma(R + \zeta)^2 = 0.$$

Um zu dieser Form aus der ursprünglichen Gleichung unmittelbar zu gelangen, müssen wir in Folge der Verwandlungs-Formeln der 1. Nummer

$$r = R + \gamma S = (\gamma + 1) S - \gamma\zeta$$

setzen, wonach auch die Ebenen (r) und (s) parallel sind.

Wenn endlich auch noch eine dritte Ecke des Pol-Tetraeders (P, Q, S) immer weiter sich entfernt, so gelangen wir zu dem bereits ausführlich discutirten Falle, dass S (≡ s) auf eine Constante sich reducirt.

52. Die allgemeine Gleichung:

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 + \sigma = 0, \qquad (1)$$

stellt, wenn insbesondere σ verschwindet, wodurch sie in die folgende übergeht:

$$\pi P^2 + \varkappa Q^2 + \rho R^2 = 0, \qquad (2)$$

einen Kegel dar. So wie vor dem Verschwinden von σ, bei jedem beliebigen Werthe dieser Constanten, die drei Ebenen (P), (Q), (R) drei zugeordnete Diametral-Ebenen, und die Durchschnitts-

$$\begin{aligned} t &= \varkappa v, \\ \varkappa u &= \mu w, \end{aligned} \tag{4}$$

das andere Mal gleichzeitig

$$\begin{aligned} t &= \lambda w, \\ \lambda u &= \mu v, \end{aligned} \tag{5}$$

setzen.

Die beiden Gleichungen (4) stellen zwei Ebenen dar, welche durch zwei gegenüberliegende Seiten (t, v) und (u, w) eines auf der Fläche liegenden Vierecks gehen und sich in einer geraden Linie schneiden, welche ebenfalls ganz auf der Fläche (1) liegt und, wenn $\varkappa$ seinen Werth continuirlich ändert, durch eine continuirliche Bewegung die Fläche beschreibt.

Auf gleiche Weise stellen die beiden Gleichungen (5) zwei Ebenen dar, welche durch die beiden andern gegenüberliegenden Seiten (t, w) und (u, v) desselben Vierecks gehen und die sich ebenfalls in einer geraden Linie schneiden, welche ganz auf der Fläche liegt und diese Fläche, wenn λ seinen Werth continuirlich ändert, durch eine continuirliche Bewegung beschreibt. Wir erhalten also eine zweifache Erzeugung derselben Fläche durch eine gerade Linie. Bei der ersten Erzeugung schneidet die gerade Linie in allen ihren Lagen die gegenüberliegenden Seiten (t, v) und (u, w) und fällt in zwei besondern Lagen ($\varkappa = 0$ und $\varkappa = \infty$ entsprechend) mit den beiden andern gegenüberliegenden Seiten (t, w) und (u, v) zusammen. Bei der zweiten Erzeugung schneidet die gerade Linie in allen ihren Lagen die beiden gegenüberliegenden Seiten (t, w) und (u, v) und fällt in zwei besondern Lagen ($\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ entsprechend) mit (t, v) und (u, w) zusammen. Je zwei Linien der ersten Erzeugung bilden also mit je zwei Linien der zweiten Erzeugung ein Viereck, welches, wie das ursprüngliche, ganz auf der Fläche liegt. Jede Linie einer Erzeugung schneidet jede Linie der andern, aber zwei Linien derselben Erzeugung schneiden sich nicht.

Diese letzte doppelte Behauptung ergibt sich unmittelbar. Sollten nemlich zwei Linien derselben Erzeugung, etwa der ersten, sich schneiden, so müssten vier Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} t &= \varkappa v, & t &= \varkappa' v, \\ \varkappa u &= \mu w, & \varkappa' u &= \mu w, \end{aligned}$$

gleichzeitig bestehen können, was auf den ersten Blick sich als unstatthaft darstellt. Dagegen aber bestehen die vier Gleichungen (4) und (5), in Folge der Gleichung (1), gleichzeitig bei jeder Annahme von $\varkappa$ und λ.

Da die Bedingung, dass eine Fläche der zweiten Ordnung durch eine gegebene gerade Linie geht, von drei linearen Constanten abhängt, so ist eine solche Fläche auf lineare Weise bestimmt, wenn sie der Bedingung unterworfen wird, dass sie gleichzeitig durch drei gegebene gerade Linien geht. Nur dürfen, damit die Bestimmung nicht unvollständig sei, diese Linien sich nicht schneiden, oder mit andern Worten, sie müssen derselben Erzeugung angehören. Die geraden Linien der andern Erzeugung schneiden alsdann die drei gegebenen und sind dadurch bestimmt. Also:

Wenn eine gerade Linie sich so bewegt, dass sie, in allen ihren Lagen, drei gegebenen sich nicht schneidenden geraden Linien begegnet, so beschreibt sie eine geradlinige Fläche der zweiten Ordnung. Dieselbe Fläche wird auf anderem, ganz analogem Wege erzeugt, wenn wir, statt der drei ursprünglich gegebenen geraden Linien, irgend drei solche nehmen, mit welchen, bei der ersten Erzeugung, die beschreibende gerade Linie während ihrer Bewegung zusammengefallen ist. Bei dieser zweiten Erzeugung bezeichnen die drei ursprünglich gegebenen geraden Linien besondere Lagen der die Fläche beschreibenden geraden Linie, die wir beliebig

mit andern Lagen vertauschen können, ohne dass die erste Erzeugung dadurch irgendwie sich ändert. Es ist nur eine andere Ausdrucksweise, wenn wir eine gerade Linie, die drei gegebene schneidet, als eine solche bezeichnen, die mit diesen in denselben drei Ebenen liegt.

Durch jeden gegebenen Punct einer der drei gegebenen geraden Linien lässt sich eine einzige Linie legen, welche auch den beiden andern begegnet. Um diese zu construiren, brauchen wir bloss durch den gegebenen Punct und eine dieser beiden letztgenannten Linien eine Ebene zu legen, und den einzigen Punct, in welche diese Ebene die andere dieser beiden Linien schneidet, mit dem gegebenen Puncte durch eine gerade Linie zu verbinden.

Zugleich ist ersichtlich, dass es im Allgemeinen zwei gerade Linien gibt, welche vier gegebene gleichzeitig schneiden, weil eine Fläche zweiter Ordnung durch irgend drei der gegebenen vollständig bestimmt ist und dann von der vierten in zwei Puncten geschnitten wird, durch welche die beiden zu construirenden Linien auf einzige Weise sich legen lassen.

65. An die vorige Nummer knüpft sich auch die Lösung der folgenden Aufgabe:

Wenn drei Linien derselben Erzeugung eines einschaligen Hyperboloids gegeben sind, den Mittelpunct desselben zu finden.

Wenn drei Linien einer Erzeugung gegeben sind, so können wir diejenigen drei Linien der andern Erzeugung, welche denselben bezüglich parallel sind, unmittelbar construiren. Legen wir nemlich durch die zweite der drei gegebenen geraden Linien eine Ebene parallel mit der ersten, so schneidet diese Ebene die dritte in einem einzigen Puncte. Legen wir durch diesen Punct eine gerade Linie parallel mit der ersten gegebenen, so gehört dieselbe der andern Erzeugung an. Denn diese Construction ist bloss eine Modification der Construction derjenigen geraden Linie, welche durch einen gegebenen Punct der ersten gegebenen geraden Linie geht und die zweite und dritte gegebene schneidet (64); eine Modification, die dadurch bedingt wird, dass der gegebene Punct auf der ersten gegebenen geraden Linie unendlich weit rückt. Auf gleiche Weise erhalten wir die beiden andern gesuchten geraden Linien, und somit ein der Fläche aufgeschriebenes Sechseck, dessen je zwei auf einander folgende Seiten verschiedener Erzeugung angehören und dessen gegenüberliegende Seiten parallel sind. Durch die drei Paare gegenüberliegender Seiten lassen sich drei Ebenen legen und diese drei Ebenen schneiden sich in dem zu construirenden Mittelpuncte.

Um diese Construction zu rechtfertigen, brauchen wir bloss zu erwägen, dass überhaupt der Durchschnittspunct zweier Linien verschiedener Erzeugung eines Hyperboloids, in Beziehung auf dieses, der Pol (Berührungspunct) der durch dieselben beiden Linien gelegten (Berührungs-)Ebene ist. Der Durchschnittspunct der drei Ebenen, welche sich durch die drei Paare gegenüberliegender Seiten irgend eines der Fläche aufgeschriebenen Sechsecks legen lassen, ist also der Pol derjenigen Ebene, welche die drei Durchschnittspuncte der drei Paare gegenüberliegender Seiten enthält, insbesondere also der Mittelpunct der Fläche, wenn diese Ebene, wie im vorliegenden Falle, unendlich weit gerückt ist.

Der Mittelpunct der Fläche liegt offenbar auch zugleich auf denjenigen drei geraden Linien, welche in der Mitte zwischen je zwei parallelen Seiten hindurchgehen, und kann als der Durchschnitt je zweier derselben construirt werden. Diese drei geraden Linien sind zugleich Seiten des Asymptoten-Kegels des Hyperboloids.

66. Um auf analytischem Wege direct darzulegen, dass eine gerade Linie, welche in allen ihren Lagen drei gegebene gerade Linien schneidet, eine Fläche der zweiten Ordnung beschreibt, ist es hinreichend, nachzuweisen, dass diese drei geraden Linien sich immer durch drei Gleichungen-Paare von folgender Form darstellen lassen:

$$t = 0, \qquad v = 0,$$
$$u = 0, \qquad w = 0,$$
$$t = \lambda w, \qquad \lambda u = \mu v. \text{ *)}$$

Denn alsdann können wir den Gleichungen derjenigen geraden Linie, welche die drei gegebenen schneidet, die folgende Form geben:

$$t = \varkappa v, \qquad \varkappa u = \mu w.$$

Es bedeutet hierbei $\varkappa$ einen unbestimmten Coefficienten; durch Elimination desselben zwischen den vorstehenden Gleichungen ergibt sich für die Gleichung der durch die Bewegung dieser geraden Linie erzeugten Fläche:

$$tu = \mu vw.$$

67. Wir wollen uns nochmals zu der Construction der Fläche durch den Durchschnitt der beiden Ebenen (4) der 64. Nummer zurückwenden. Die eine dieser beiden Ebenen, etwa die erste derselben, geht, weil der unbestimmte Coefficient $\varkappa$ ganz willkührlich angenommen werden kann, nach beliebiger Richtung durch die Vierecks-Seite (t, v) und schneidet immer die Fläche in einer zweiten geraden Linie, welche auch mit der gegenüberliegenden Vierecks-Seite (u, w) in derselben Ebene, nemlich in der zweiten der beiden Ebenen (4), liegt. Ist also irgend ein Punct der Fläche gegeben, so können wir diese Ebenen beide durch diesen Punct legen und erhalten alsdann als Durchschnittslinie derselben eine ganz auf der Fläche liegende, durch den gegebenen Punct gehende gerade Linie. Diese gerade Linie gehört, weil sie mit jeder der beiden Vierecks-Seiten (t, v) und (u, w) in derselben Ebene liegt und diese Seiten also schneidet, mit den beiden andern gegenüberliegenden Seiten des Vierecks, mit (t, w) und (u, v), der ersten Erzeugung der Fläche an. Eine zweite durch den gegebenen Punct gehende, mit (t, v) und (u, w) der zweiten Erzeugung angehörige gerade Linie erhalten wir, wenn wir in den vorstehenden Erörterungen an die Stelle der beiden Ebenen (4) die beiden Ebenen (5) setzen.

---

*) Es ist klar, dass wir, bei gehöriger Functionen-Bestimmung, irgend drei gerade Linien durch die folgenden drei Paare von Gleichungen:

$$t + \varepsilon v = 0, \qquad v + \xi t = 0,$$
$$u = 0, \qquad v = 0,$$
$$(t + \varepsilon v) + \alpha(v + \xi t) + \beta w = 0, \qquad \gamma(t + \varepsilon v) + (v + \xi t) + \delta u = 0,$$

darstellen können, wobei ε und ξ zwei willkührlich anzunehmende Constante bedeuten. Setzen wir insbesondere:

$$\varepsilon = -\alpha, \qquad \xi = -\gamma,$$

so gehen die Gleichungen der dritten geraden Linie in die folgenden über:

$$(1-\alpha\gamma)t + \beta w = 0, \qquad \delta u + (1-\alpha\gamma)v = 0,$$

und wenn überdiess:

$$\beta = \mu\delta, \qquad \frac{-\beta}{1-\alpha\gamma} = \lambda,$$

in die folgenden:

$$t = \lambda w \qquad \lambda u = \mu v.$$

Die durch das erste Gleichungen-Paar dargestellte gerade Linie bleibt unverändert dieselbe, welche Werthe ε und ξ auch erhalten mögen. Indem wir in denselben beide unbestimmte Coefficienten gleich Null setzen, erhalten wir die Gleichungen des Textes.

Wenn ein auf einer Fläche der zweiten Ordnung liegendes Viereck und irgend ein Punct der Fläche gegeben sind, so erhalten wir also unmittelbar zwei neue gerade Linien, die auf der Fläche liegen und in dem gegebenen Puncte sich schneiden. Hiernach sind drei gerade Linien der einen und drei gerade Linien der andern Erzeugung bekannt, so dass wir, nach der 64. Nummer, die Fläche auf zweifache Weise durch die Bewegung einer geraden Linie beschreiben können.

68. Diejenige Ebene, welche zwei gerade Linien, die auf einer Fläche der zweiten Ordnung liegen und in einem gegebenen Puncte derselben sich schneiden, enthält, ist die Berührungs-Ebene in diesem Puncte. Hieran knüpft sich unmittelbar die Lösung der nachstehenden Aufgabe:

Wenn ein räumliches Viereck, dessen Seiten ganz auf einer Fläche der zweiten Ordnung liegen, und ausserdem ein Punct derselben gegeben sind, in diesem Puncte die Tangential-Ebene der Fläche zu construiren.

Man lege durch den gegebenen Punct und zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks zwei Ebenen, die sich in einer ersten, und durch denselben Punct und die beiden andern gegenüberliegenden Seiten ebenfalls zwei Ebenen, die sich in einer zweiten, durch den gegebenen Punct gehenden, geraden Linie schneiden. Diejenige Ebene, welche diese beiden geraden Linien enthält, ist alsdann die verlangte Tangential-Ebene.

Die beiden geraden Linien sind, wenn, umgekehrt, die Tangential-Ebene gegeben ist, dadurch bestimmt, dass sie bezüglich die beiden Paare gegenüberliegender Seiten des Vierecks schneiden, und somit erhalten wir die Lösung der neuen Aufgabe:

Wenn ein räumliches Viereck, dessen Seiten ganz auf einer Fläche der zweiten Ordnung liegen, und ausserdem eine Tangential-Ebene derselben gegeben ist, den Berührungspunct auf dieser Tangential-Ebene zu bestimmen.

Die gegebene Tangential-Ebene schneidet jedes Paar gegenüberliegender Seiten des Vierecks in zwei Puncten, die wir durch eine gerade Linie verbinden können. Die beiden hiernach sich ergebenden geraden Linien liegen ganz auf der Fläche und schneiden sich in dem verlangten Berührungspuncte.

Zugleich können wir, wie in dem Falle der vorigen Nummer, die Fläche durch eine gerade Linie auf zweifachem Wege beschreiben.

69. Wir brauchen, wie oben gezeigt worden ist, nur zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks, das heisst, zwei ganz auf der Fläche liegende und sich nicht schneidende Linien zu kennen, um sogleich durch jeden gegebenen Punct der Fläche eine neue ganz auf derselben liegende gerade Linie, welche jene beiden schneidet, legen zu können (67). Ebenso können wir, wenn statt des Punctes eine Tangential-Ebene der Fläche gegeben ist, in dieser Ebene eine gerade Linie bestimmen, welche die beiden gegebenen schneidet (68). Hieran knüpft sich unmittelbar eine Lösung der nachstehenden vier Aufgaben.

Eine Fläche zweiter Ordnung durch die Bewegung einer geraden Linie zu beschreiben, wenn, ein für alle Mal, zwei sich nicht schneidende gerade Linien gegeben sind, welche ganz auf der Fläche liegen sollen, und überdiess

erstens: drei Puncte der Fläche,

zweitens: zwei Puncte und eine Tangential-Ebene,

drittens: ein Punct und zwei Tangential-Ebenen,

viertens: vier Tangential-Ebenen der Fläche.

In allen Fällen erhalten wir nemlich, den gegebenen Puncten und Tangential-Ebenen entsprechend, drei gerade Linien, welche ganz auf der Fläche liegen und die beiden gegebenen geraden

Linien schneiden, und also derselben Erzeugung angehören. Ferner erhalten wir in jedem gegebenen Puncte eine Tangential Ebene, auf jeder gegebenen Tangential-Ebene den Berührungspunct.

Zugleich begegnen wir, bei der Betrachtungsweise der gegenwärtigen Nummer, der Bemerkung, dass alle Flächen der zweiten Ordnung, welche zwei gegebene gerade Linien in ihrer ganzen Ausdehnung enthalten und überdiess entweder durch einen gegebenen Punct gehen oder eine gegebene Ebene berühren, sich ausser in den beiden gegebenen geraden Linien noch in einer dritten, diesen begegnenden geraden Linie schneiden. Wenn alle Flächen überdiess noch durch zwei gegebene Puncte gehen, oder zwei gegebene Ebenen berühren, so gehen sie noch durch zwei feste gerade Linien, welche den gegebenen begegnen, also durch die Seiten ein und desselben räumlichen Vierecks.

Endlich ist ersichtlich, dass irgend zwei Flächen der zweiten Ordnung, welche durch zwei gegebene sich nicht schneidende gerade Linien gehen, auch ausserdem noch zwei andere sich nicht schneidende gerade Linien enthalten, so dass die Durchschnitts-Curve der beiden Flächen in ein räumliches Viereck ausartet.

70. Da wir, wenn zwei sich nicht schneidende gerade Linien, die ganz auf einer Fläche der zweiten Ordnung liegen, gegeben sind, durch jeden Punct der Fläche eine gerade Linie legen können, die ebenfalls ganz in dieselbe fällt, so ist klar, dass, wenn dieser Punct auf der Fläche eine Curve beschreibt, von der geraden Linie, welche durch denselben geht, die Fläche selbst beschrieben wird. Artet jene von dem Puncte beschriebene Curve in eine gegebene, auf der Fläche liegende dritte gerade Linie aus, welche die beiden ersten nicht schneidet, so erhalten wir den Satz der 64. Nummer. Wir können insbesondere für jene Curve auch denjenigen Kegelschnitt nehmen, in welchem eine beliebige Ebene die Fläche schneidet und der hiernach nothwendig auch durch die beiden gegebenen geraden Linien geht. Ein solcher Kegelschnitt ist insbesondere dann bestimmt, wenn ausser diesen beiden geraden Linien irgend drei Puncte der Fläche gegeben sind. Denn legen wir durch diese drei Puncte eine Ebene, so wird diese die beiden geraden Linien in zwei Puncten schneiden, wonach wir fünf Puncte und somit einen vollkommen bestimmten Kegelschnitt erhalten, durch welchen die fragliche Fläche geht.

Wenn man um zwei gegebene, sich nicht schneidende, gerade Linien zwei Ebenen sich so drehen lässt, dass ihre Durchschnittslinie einem gegebenen Kegelschnitte, welcher durch jene beiden geraden Linien geht, in allen ihren Lagen begegnet, so beschreibt diese Durchschnittslinie eine Fläche der zweiten Ordnung.

Die beschreibende gerade Linie ist, mit andern Worten, der Bedingung unterworfen, dass sie die gegebenen geraden Linien und den Kegelschnitt fortwährend schneidet.

Analoge Resultate, die mit den vorstehenden durch das Princip der Reciprocität verknüpft sind, ergeben sich, wenn ausser den beiden ganz in die Fläche fallenden geraden Linien, irgend eine Abwickelungsfläche, die durch eine die Fläche fortwährend berührende Ebene umhüllt wird, gegeben ist. Die umhüllende Ebene enthält alsdann, in allen ihren Lagen, eine der Fläche angehörige gerade Linie, welche die beiden gegebenen schneidet und dabei nicht aufhört, die Abwickelungs-Fläche zu berühren. Für diese können wir eine gerade Linie nehmen, und kommen dann auf den Satz der 64. Nummer wieder zurück, oder auch einen der Fläche umschriebenen Kegel. Wenn ausser den beiden gegebenen geraden Linien noch drei Tangential-Ebenen auf der Fläche gegeben sind, so ist dadurch auf lineare Weise ein der Fläche umschriebener Kegel der zweiten Ordnung bestimmt, dessen Mittelpunct der gemeinsame Durchschnitt der drei gegebenen Tangential-Ebenen ist und welcher ausserdem diejenigen beiden Ebenen berührt, die durch diesen Mittelpunct und durch die beiden gegebenen geraden Linien gelegt werden können.

Eine gerade Linie, welche sich so bewegt, dass sie zwei gegebenen, sich nicht schneidenden geraden Linien fortwährend begegnet und überdiess einen gegebenen Kegel zweiter Ordnung, welcher von jenen beiden geraden Linien berührt wird, ebenfalls berührt, erzeugt, in ihrer Bewegung, eine Fläche der zweiten Ordnung.

71. Bevor wir die bisherigen Erörterungen unter einem allgemeinen analytischen Gesichtspunct zusammenfassen und dadurch erst den einzelnen Resultaten in dem grössern Ganzen ihre richtige Stelle anweisen, wollen wir zuvor noch in dieser Nummer den Weg andeuten, auf dem wir zu denselben Constructionen und Sätzen mit derselben Leichtigkeit auch dann gelangen können, wenn wir die allgemeine Gleichung in Plan-Coordinaten:

$$tu = \mu vw \tag{2}$$

zu Grunde legen. Aehnlich wie in der 64. Nummer, können wir diese Gleichung auf doppelte Weise befriedigen, indem wir, bei beliebiger Bestimmung von $\varkappa$ und λ, gleichzeitig, einmal

$$\begin{aligned} t &= \varkappa v, \\ \varkappa u &= \mu w, \end{aligned} \tag{6}$$

das andere Mal

$$\begin{aligned} t &= \lambda w, \\ \lambda u &= \mu v, \end{aligned} \tag{7}$$

setzen. Die beiden Gleichungen (6) stellen zwei Puncte dar, welche auf den beiden gegenüberliegenden Vierecks-Seiten (t, v) und (u, w) liegen. Diejenige gerade Linie, welche diese beiden Puncte verbindet, beschreibt, wenn $\varkappa$ sich continuirlich ändert, die Fläche (2). Die zweite Erzeugung der Fläche ist durch die Gleichungen (7) bezeichnet, welche auf ganz analoge Weise zwei Puncte darstellen, die auf den beiden andern gegenüberliegenden Vierecks-Seiten (t, w) und (u, v) liegen und durch welche, in ihren verschiedenen durch $\varkappa$ bezeichneten Lagen, die erzeugende gerade Linie geht.

Die vier Puncte:

$$t = 0, \quad v = 0, \quad t = \varkappa v, \quad t = -\varkappa v,$$

die auf der Vierecks-Seite (t, v) liegen, sind vier harmonische Theilungspuncte. Die vier durch diese Puncte gehenden Linien der andern Erzeugung schneiden die gegenüberliegende Vierecks-Seite (u, w) in den vier Puncten:

$$w = 0, \quad u = 0, \quad \varkappa u = \mu w, \quad \varkappa u = -\mu w,$$

und diese sind wiederum vier harmonische Theilungspuncte.

Wenn vier Linien der ersten Erzeugung einer geradlinigen Fläche zweiter Classe (und Ordnung) eine Linie der zweiten Erzeugung in vier harmonischen Puncten schneiden, so wird jede Linie dieser Erzeugung von ihnen harmonisch geschnitten.

Aus diesem Satze ergibt sich unmittelbar, dass sechs Linien der ersten Erzeugung alle Linien der zweiten Erzeugung in den Puncten einer **Involution** schneiden, wenn dieses für eine dieser Linien stattfindet. (Vergl. **System**, Erster Abschnitt §. 1, 31—32) Wenn wir statt der Gleichung (2) die Gleichung der Fläche in Punct-Coordinaten (1) zu Grunde gelegt hätten, so wären wir auf gleichem Wege zu dem nachstehenden Satze gelangt, der mit dem obigen durch das Princip der Reciprocität verknüpft ist.

Vier harmonische Ebenen, welche beliebig durch eine Linie der ersten Erzeugung gelegt werden, schneiden die Fläche in solchen vier geraden Linien, die mit jeder andern Linie der ersten Erzeugung ebenfalls in vier harmonischen Ebenen liegen. *)

72. Das Characteristische der beiden Gleichungs-Formen (4) der 64. Nummer besteht, allgemein aufgefasst, darin, dass, wenn wir durch die erste dieser beiden Gleichungen eine beliebige, durch die gegebene gerade Linie (t, v) gehende Ebene darstellen, die zweite Gleichung eine solche Ebene darstellt, welche durch die gegebene gerade Linie (u, w) geht und durch die erste Ebene auf lineare Weise bestimmt ist. Und, umgekehrt, wenn zwei Systeme durch zwei gegebene, sich nicht schneidende gerade Linien (t, v) und (u, w) gehender Ebenen sich linear entsprechen, so können wir sie, indem wir $\varkappa$ als unbestimmten Coefficienten betrachten, durch die beiden Gleichungen (4) ausdrücken. Die Durchschnittslinie irgend zweier sich entsprechender Ebenen liegt auf einer Fläche der zweiten Ordnung.

Dieselben Gleichungs-Formen führen, wenn wir den Veränderlichen die Bedeutung von Plan-Coordinaten geben, zu dem Resultate, dass die Gleichungen (6) der vorigen Nummer, wenn $\varkappa$ einen unbestimmten Coefficienten bedeutet, irgend zwei Systeme von solchen Puncten, die auf den gegebenen beiden geraden Linien (t, v) und (u, w) liegen und sich linear entsprechen, darstellen. Verbinden wir je zwei sich entsprechende Puncte durch gerade Linien, so liegen diese auf einer Fläche zweiter Classe (und zweiter Ordnung). Hiernach ergeben sich die folgenden beiden, durch das Band der Reciprocität mit einander verknüpften allgemeinen Sätze.

Wenn zwei einander nicht schneidende gerade Linien gegeben sind, um welche man, als um feste Axen, zwei Ebenen sich so drehen lässt, dass in jeder Lage eine der beiden Ebenen durch die andere auf lineare Weise bestimmt ist, so beschreibt die Durchschnittslinie derselben eine Fläche der zweiten Ordnung.

Wenn zwei einander nicht schneidende gerade Linien gegeben sind, auf welchen zwei Puncte sich so bewegen, dass für jede Lage des einen Punctes die Lage des andern auf lineare Weise bestimmt ist, so beschreibt die Verbindungslinie der beiden Puncte eine Fläche der zweiten Classe.

Diese beiden allgemeinen Sätze lösen sich in eben so viele besondere auf, als es besondere Arten des linearen Entsprechens von Ebene und Ebene, von Punct und Punct gibt.

Wenn namentlich die beiden Ebenen dadurch bestimmt werden, dass sie durch einen gegebenen Punct gehen, und dieser Punct auf einer gegebenen dritten geraden Linie, oder auf einem gegebenen, die beiden ersten gegebenen geraden Linien schneidenden Kegelschnitt fortrückt, so sind dadurch die beiden Ebenen (4) auf lineare Weise durch einander bestimmt, und somit gibt die Particularisirung des ersten der beiden vorstehenden Sätze, sogleich den Satz der 64. Nummer und den ersten Satz der 70. Nummer. Auf analoge Weise gibt die Particularisation des zweiten der beiden vorstehenden Sätze den eben angezogenen Satz der 64. und den zweiten Satz der 70. Nummer. Geben wir namentlich dem erstgenannten dieser beiden Sätze die folgende Aussage:

---

*) Als vier harmonische Ebenen werden solche bezeichnet, die in derselben geraden Linie sich schneiden und durch Gleichungen, in beliebigen Punct-Coordinaten, von der Form:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad p = \varkappa q, \quad p = -\varkappa q,$$

dargestellt werden. Sie sind als die collineare Umgestaltung von solchen vier Ebenen anzusehen, von welchen zwei diejenigen Winkel halbiren, welche von den beiden andern gebildet werden (53).

Wenn zwei einander nicht schneidende gerade Linien und ausserdem noch eine dritte solche gerade Linie gegeben sind, und man dreht um die dritte gerade Linie eine durch dieselbe gelegte Ebene, so schneidet diese Ebene in allen ihren Lagen jede der beiden ersten geraden Linien. Diejenige gerade Linie, welche zwei entsprechende Durchschnittspuncte verbindet, beschreibt eine Fläche der zweiten Classe;

so sehen wir sogleich, wie er in dem zweiten der vorstehenden allgemeinen Sätze enthalten ist.

Wir können leicht noch neue Beispiele hinzufügen.

Zwei solche Ebenen, welche durch zwei gegebene gerade Linien gehen und überdiess auf einander senkrecht stehen, sind gegenseitig auf lineare Weise durch einander bestimmt, wonach der folgende Satz sich ergibt.

Wenn man durch zwei gegebene, sich nicht schneidende gerade Linien zwei Ebenen so sich drehen lässt, dass sie fortwährend auf einander senkrecht stehen, so beschreibt ihre Durchschnittslinie eine Fläche der zweiten Ordnung. *)

In eine nähere Discussion der beschriebenen Fläche können wir hier nicht eingehen, sehen aber, dass dieselbe besondern Beschränkungen unterworfen sein muss, weil sie nur von acht Constanten, die den beiden gegebenen geraden Linien entsprechen, abhängt.

73. Wenn wir die allgemeinen Gleichungen (1) und (2) folgendergestalt schreiben:

$$\frac{t}{v} = \mu . \frac{w}{u}; \quad (1) \qquad \frac{t}{v} = \mu . \frac{w}{u}, \quad (2)$$

so können wir sie als daraus hervorgegangen betrachten, dass wir den unbestimmten Coefficienten $\varkappa$ bezüglich aus den beiden Gleichungen (4) und (6) nehmen und einander gleich setzen. Dann

---

*) Wenn Zweifel darüber obwalten, ob die, aus der geometrischen Anschauung entnommenen, Bedingungen wirklich ein lineares Entsprechen einschliessen, so gibt die analytische Entwicklung die sicherste Auskunft. Im vorliegenden Falle wollen wir den Anfangspunct rechtwinkliger Coordinaten in der Mitte des kürzesten Abstandes (= 2a) der beiden gegebenen Linien nehmen und diejenige gerade Linie, in welche dieser Abstand fällt und welche die gegebenen rechtwinklig schneidet, zur Axe Y wählen, während wir den Axen Z und X eine solche Richtung geben, dass die von den Projectionen der beiden gegebenen geraden Linien auf die Ebene ZX gebildeten Winkel durch diese Axen halbirt werden. Alsdann erhalten wir für die beiden gegebenen geraden Linien Gleichungen von nachstehender Form:

$$\left.\begin{aligned} y - a &= 0, \\ z - mx &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} y + a &= 0, \\ z + mx &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Irgend zwei Ebenen, welche durch diese beiden geraden Linien gehen, werden, indem μ und μ' zwei unbestimmte Coefficienten bedeuten, durch nachstehende Gleichungen dargestellt:

$$z - mx = \mu(y - a),$$
$$z + mx = \mu'(y + a).$$

Sollen die Ebenen auf einander senkrecht stehen, so kommt:

$$1 - m^2 + \mu\mu' = 0,$$

und wenn wir μ' eliminiren,

$$(z - mx) = \mu(y - a)$$
$$\mu(z + mx) = (m^2 - 1)(y + a)$$

für die Gleichungen irgend zweier durch die gegebenen geraden Linien gehenden und auf einander senkrechten Ebenen. Diese Gleichungen haben die Form der Gleichungen (4).

drücken diese Gleichungen ein lineares Entsprechen bezüglich zweier durch (t, v) und (w, u) gehender Ebenen und zweier auf (t, v) und (w, u) liegender Puncte aus.

Betrachten wir aus diesem Gesichtspuncte zuvörderst die Gleichung (1), indem wir, wie früher, den vier linearen Functionen die Bedeutung kürzester Abstände geben, so ist $\frac{t}{v}$ das Verhältniss der Sinus derjenigen Winkel, welche die erste der beiden Ebenen (4) mit den gegebenen Ebenen (t) und (v) und ebenso $\frac{w}{u}$ das Verhältniss der Sinus derjenigen Winkel, welche die zweite der Ebenen (4) mit den gegebenen Ebenen (w) und (u) bildet. Wenn insbesondere die gegebenen Ebenen (t) und (v), so wie (w) und (u) auf einander senkrecht stehen, so bedeuten $\frac{t}{v}$ und $\frac{w}{u}$ die trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel, welche die beiden Ebenen (4) bezüglich mit den beiden festen Ebenen (t) und (w) bilden. Ist in dieser letzten Voraussetzung insbesondere $\mu = \pm 1$, so bilden die fraglichen Ebenen (4) in allen ihren Lagen gleiche Winkel mit den beiden letztgenannten. Hiernach ergeben sich die nachstehenden Constructionen.

Wenn zwei sich nicht schneidende gerade Linien (t, v) und (w, u) gegeben sind, so beschreibt die Durchschnittslinie zweier Ebenen, welche durch diese beiden geraden Linien gehen und um dieselben sich drehen, in den folgenden Fällen eine Fläche der zweiten Ordnung:

erstens, wenn die eine Ebene mit zwei gegebenen, ebenfalls durch (t, v) gelegten Ebenen (t) und (v) Winkel bildet, deren Sinus-Verhältniss ein gegebenes Vielfache des Sinus-Verhältnisses derjenigen Winkel ist, welche die andere Ebene mit zwei gegebenen, durch (w, u) gehenden Ebenen (w) und (u) bildet;

zweitens, wenn das Verhältniss der trigonometrischen Tangenten derjenigen Winkel, welche die beiden Ebenen mit zwei gegebenen, durch die beiden Umdrehungs-Axen gehenden Ebenen bilden, gegeben ist;

drittens, wenn die beiden Ebenen von beliebigen ursprünglichen Lagen mit derselben Geschwindigkeit, in dem einen oder andern Sinne, um die beiden gegebenen geraden Linien sich drehen.

Betrachten wir ferner die Gleichung (2), so können wir $\frac{t}{v}$, auf eine beliebige Ebene bezogen, als das Verhältniss der Abstände des Durchschnittspunctes der Ebene mit der geraden Linie (t, v) von den beiden Puncten (t) und (v) construiren, und dann auch $\frac{w}{u}$ in einer analogen Bedeutung nehmen. Wir erhalten also den folgenden Satz:

Wenn zwei sich nicht schneidende gerade Linien (t, v) und (u, w), und auf jeder derselben zwei feste Puncte (t) und (v), (u) und (w) gegeben sind, so beschreibt eine gerade Linie, welche in allen ihren Lagen die beiden gegebenen geraden Linien in zwei Puncten M und N so schneidet, dass

$$\frac{\mathrm{M}(t)}{\mathrm{M}(v)} = \mu \frac{\mathrm{N}(w)}{\mathrm{N}(u)},$$

eine Fläche der zweiten Ordnung.

Wenn μ insbesondere gleich Eins ist, so geht die vorstehende Bedingungs-Gleichung, wenn wir berücksichtigen, dass

$$\mathrm{M}(t) = \mathrm{M}(v) + (t)(v), \qquad \mathrm{N}(w) = \mathrm{N}(u) + (w)(u),$$

und überdiess, der Kürze wegen,

$$\frac{(u)(w)}{(t)(v)} = \delta$$

setzen, in die folgenden über:

$$N(u) = \delta . M(v).$$

Dann können wir also die successiven Lagen der beschreibenden geraden Linie MN dadurch einfacher bestimmen, dass wir die beiden Puncte M und N als solche betrachten, die beide, mit gegebener Geschwindigkeit, auf den beiden gegebenen geraden Linien sich fortbewegen. Wir sehen indess sogleich, dass die erzeugte Fläche hier insbesondere ein hyperbolisches Paraboloid ist, weil, der Voraussetzung gemäss, die beschreibende gerade Linie einer festen Ebene parallel bleibt (27), oder auch daraus schon, dass sie in einer Lage unendlich weit liegt.

74. Die beiden allgemeinen Sätze der 72. Nummer können wir auch, nach rein analytischer Methode, aus der allgemeinen Gleichungs-Form, die wir in diesem Paragraphe zu Grunde gelegt haben, ableiten. Indem wir die vierte der linearen Functionen t, u, v und w als lineare Function der drei ersten betrachten und demnach setzen:

$$w \equiv u + \alpha v + \beta t + \gamma, \tag{8}$$

geht diese Gleichungs-Form in folgende über:

$$tu = \mu(u + \alpha v + \beta t + \gamma)v,$$

und wenn

$$u + \alpha v \equiv s$$

genommen wird, in die folgende:

$$t(s - \alpha v) = \mu(s + \beta t + \gamma)v. \tag{9}$$

Diese Gleichung wird befriedigt, wenn gleichzeitig:

$$s = 0 \quad \text{und} \quad v = 0, \tag{10}$$
$$v = 0 \quad „ \quad t = 0, \tag{11}$$
$$t = 0 \quad „ \quad s + \gamma = 0, \tag{12}$$
$$s - \alpha v = 0 \quad „ \quad s + \beta t + \gamma = 0; \tag{13}$$

wir erhalten somit ein räumliches Viereck, welches ganz auf der Fläche liegt.

Nehmen wir:

$$\alpha + \mu\beta = \delta, \tag{14}$$

so können wir, vorausgesetzt dass diese Bedingungs-Gleichung erfüllt wird, α und β willkührlich annehmen, ohne dass die Gleichung (9) irgendwie sich ändert. Bei dieser Constanten-Aenderung bleiben die drei ersten Seiten des der Fläche aufgeschriebenen Vierecks, nemlich (s, v), (v, t) und (t, $s + \gamma$), unverändert dieselben, während die vierte Seite, ihre Lage ändernd, die Fläche beschreibt. Indem wir diese vierte Seite durch die beiden Gleichungen (13) darstellen, ist sie als der Durchschnitt zweier Ebenen bestimmt, welche bezüglich durch die erste und dritte Vierecks-Seite gehen, und, in Folge der Bedingungs-Gleichung (14), sich linear entsprechen. Somit ist der erste allgemeine Satz der 72. Nummer bewiesen.

Wenn wir α und β, in Uebereinstimmung mit (14), beide unendlich gross nehmen, so fällt die vierte Vierecks-Seite mit der zweiten zusammen, wobei die Gleichungs-Form (9) illusorisch wird.

Wenn insbesondere:

$$\alpha = 0, \qquad \mu\beta = \delta,$$

so dass die allgemeine Gleichung der Fläche, indem sie eine überzählige Constante verliert, die folgende Form annimmt:

$$ts = \mu(s+\beta t+\gamma)v, \tag{15}$$

wird die vierte Vierecks-Seite, die wir nun durch folgende Gleichungen darstellen können:

$$s = 0, \qquad \beta t+\gamma = 0 \quad \text{oder} \quad \delta t+\mu\gamma = 0,$$

mit der dritten parallel. Eine Linie, welche in der Mitte zwischen diesen beiden parallelen Seiten hindurchgeht, ist ein Durchmesser der Fläche. Zur Bestimmung desselben erhalten wir die Gleichungen:

$$s+\tfrac{1}{2}\gamma = 0, \qquad \delta t+\tfrac{1}{2}\mu\gamma = 0.$$

Ebenso können wir

$$\beta = 0, \qquad \alpha = \delta,$$

setzen, dann wird die allgemeine Gleichung der Fläche

$$t(s-\delta v) = \mu(s+\gamma)v, \tag{16}$$

während die vierte Vierecks-Seite, deren Gleichungen:

$$s+\gamma = 0, \qquad \delta v+\gamma = 0,$$

der ersten Seite parallel wird. In der Mitte zwischen diesen beiden parallelen Seiten geht ein neuer Durchmesser der Fläche hindurch, dessen Gleichungen hiernach die folgenden sind:

$$s+\tfrac{1}{2}\gamma = 0, \qquad \delta v+\tfrac{1}{2}\gamma = 0.$$

Die beiden vorstehend bestimmten Durchmesser schneiden sich in dem Mittelpuncte der Fläche, für welchen also:

$$s = -\tfrac{1}{2}\gamma, \qquad t = -\tfrac{1}{2}\frac{\mu\gamma}{\delta}, \qquad v = -\tfrac{1}{2}\frac{\gamma}{\delta}. \tag{17}$$

Unbeschadet der Allgemeinheit, können wir t, s, v als gewöhnliche schiefwinklige Parallel-Coordinaten x, y, z betrachten. Nehmen wir alsdann Fig.

$$OR = -\gamma, \qquad \beta = -\frac{\sin RPX}{\sin PRY}, \qquad \alpha = \frac{\sin QOZ}{\sin QOY},$$

so ist PORQ ein der Fläche aufgeschriebenes Viereck. Nehmen wir ferner

$$OP' = -\frac{\mu\gamma}{\delta}, \qquad RQ' = -\frac{\gamma}{\delta},$$

so sind P′q und Q′p die beiden besondern Lagen der vierten die Fläche erzeugenden Vierecks-Seite, in welchen dieselbe bezüglich mit RQ und PO parallel ist, wonach wir den Mittelpunct der Fläche C unmittelbar construiren können.

Wenn wir $\delta = 0$ setzen, so particularisirt sich dadurch die lineare Bedingungs-Gleichung (7) in die folgende:

$$\alpha+\mu\beta = 0, \tag{18}$$

wonach die Gleichung der Fläche sich auf die folgenden Formen bringen lässt:

$$ts = \mu(s+\gamma)v,$$
$$s(t-\mu v) = \mu\gamma v.$$

Die Fläche ist also in ein hyperbolisches Paraboloid übergegangen, dessen Mittelpunct (17) nach derjenigen Richtung, welche durch die nachstehenden Gleichungen bestimmt wird:

$$s = 0, \qquad t-\mu v = 0,$$

unendlich weit liegt.

Andrerseits können wir aber auch die Bedingungs-Gleichung (7) noch erweitern. Wenn wir zwischen dieser Bedingungs-Gleichung und den beiden Gleichungen der vierten Vierecks-Seite:

$$s - \alpha v = 0, \qquad s + \beta t + \gamma = 0,$$

die beiden Constanten α und β eliminiren, so erhalten wir die Gleichung der Fläche. Die resultirende Gleichung bleibt aber auch dann vom zweiten Grade, wenn jedem Werthe einer der beiden Constanten nur ein einziger Werth der andern entspricht, was, allgemeiner als durch die lineare Gleichung (7), durch eine Gleichung von folgender Form:

$$a\alpha + b\beta + c\alpha\beta + d = 0, \tag{19}$$

in der die Coefficienten a, b, c und d als gegeben zu betrachten sind, ausgedrückt wird. Dieser allgemeinere Fall unterscheidet sich von dem zu Anfange dieser Nummer betrachteten dadurch, dass, weil nun α und β nicht mehr gleichzeitig unendlich werden, die zweite Seite (11) nicht mehr auf der Fläche liegt.

Ein hieher gehöriges Beispiel liefert der letzte Satz der 72. Nummer. Um nemlich in dem frühern schiefwinkligen Parallel-Coordinaten-Systeme auszudrücken, dass die beiden Ebenen

$$y - \alpha z = 0, \qquad y + \beta x + \gamma = 0,$$

auf einander senkrecht stehen, erhalten wir (Magnus, Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Raumes. S 33) die vorstehende Bedingungs-Gleichung, wenn wir

$$a = -(\cos XOY \cos YOZ - \cos YOZ), \qquad b = \cos YOZ \cos XOZ - \cos XOY,$$
$$c = -(\cos YOZ \cos XOY - \cos XOZ), \qquad d = \sin^2 XOZ,$$

setzen. Unbeschadet der Allgemeinheit, können wir die Axe Y senkrecht auf beiden gegebenen geraden Linien annehmen, wonach XOY und YOZ rechte Winkel werden.

Nehmen wir statt der Gleichungen (13), indem wir die Plan-Coordinaten-Bestimmung der 3. Nummer der Einleitung zu Grunde legen, die folgenden:

$$w + \alpha t = 0, \qquad w + \beta u + \gamma v = 0,$$

so stellen dieselben nun zwei Puncte ($x = \alpha$, $y = z = 0$) und ($x = 0$, $y = \beta$, $z = \gamma$) dar, die, wenn α und β sich ändern, auf zwei geraden Linien, von welchen die erste in die Axe X fällt und die andere, in der Ebene YZ, der Axe Y parallel ist, fortrücken. Entspricht jeder Lage jedes der beiden Puncte eine einzige Lage des andern, was in allgemeinster Weise wiederum durch die Bedingungs-Gleichung (19) ausgedrückt wird, so ist der geometrische Ort für diejenige gerade Linie, welche die beiden gegebenen Puncte in jeder ihrer entsprechenden Lagen verbindet, eine Fläche zweiter Classe.

75. So lange die Gleichung

$$tu = \mu vw \tag{1}$$

durch die willkührliche Bestimmung der vier linearen Functionen ihre Allgemeinheit behält, stehen auch die vier Vierecks-Seiten (t, v), (v, u), (u, w), (t, w) in keiner ausschliesslichen Beziehung zur Fläche, und wir können, indem wir über die vier überzähligen Constanten beliebig disponiren, zugleich mit der vorstehenden Gleichung auch das Viereck particularisiren.

Einer solchen Particularisation entspricht zum Beispiel die folgende Gleichungs-Form:

$$tu = \mu(v + \lambda)(v - \lambda),$$

die nur noch zwei überzählige Constanten einschliesst. Sie geht aus der frühern dadurch hervor, dass eine Diagonale des frühern Vierecks unendlich weit liegt und also die andere (t, u) ein Durch-

messer der Fläche geworden ist. Der Durchschnitt der drei Ebenen (t), (u) und (v) ist der Mittelpunct der Fläche. Von den vier Seiten $(t, v+\lambda)$, $(u, v+\lambda)$, $(t, v-\lambda)$, $(u, v-\lambda)$ liegen die beiden ersten und die beiden letzten bezüglich in den beiden parallelen Tangential-Ebenen $(v+\lambda)$ und $(v-\lambda)$, und schneiden sich in den beiden Scheiteln des in (t, u) fallenden Durchmessers, den Berührungspuncten auf den beiden parallelen Tangential-Ebenen. Die erste und dritte Seite liegen in der Ebene (t) und sind einander parallel: diese Ebene ist also eine Tangential-Ebene, auf welcher der Berührungspunct unendlich weit liegt, und somit auch eine Tangential-Ebene des Asymptoten-Kegels, der von ihr in derjenigen geraden Linie, welche die Mitte zwischen jenen beiden parallelen Seiten bildet, berührt wird. Ebenso sind die beiden andern Seiten parallel und liegen in der Ebene (u), die die Fläche ebenfalls in unendlicher Entfernung berührt.

An das Vorstehende knüpft sich zunächst die Bemerkung, dass es für jede Lage der geraden Linie in der einen Erzeugung eines gegebenen einschaligen Hyperboloids eine parallele Lage der geraden Linie in der andern Erzeugung gibt.

Wenn man ferner durch den Mittelpunct der Fläche gerade Linien legt, welche den Linien jeder der beiden Erzeugungen parallel sind, so ist der Ort dieser geraden Linie beidesmal ein und derselbe Kegel zweiter Ordnung, und zwar der Asymptoten-Kegel der Fläche. Jede Ebene, welche den Asymptoten-Kegel in einer geraden Linie berührt, schneidet die Fläche in zwei geraden Linien, die unter sich und mit dieser Berührungslinie parallel sind und von derselben gleich weit abstehen.

Durch neue Particularisationen können wir auch über die beiden letzten überzähligen Constanten der vorstehenden Gleichungs-Form disponiren und zu diesem Ende etwa die Voraussetzung machen, dass der Durchmesser (t, u) auf den beiden parallelen Ebenen $(v+\lambda)$ und $(v-\lambda)$ senkrecht stehe. Dadurch sind dann alle überzähligen Constanten erschöpft. Ob diese Annahme allgemein statthaft ist (worauf näher einzugehen hier der Ort noch nicht ist), hängt davon ab, ob es für jedes einschalige Hyperboloid immer einen solchen Durchmesser gibt, der auf den Tangential-Ebenen in seinen beiden Scheiteln, also auch auf der zugeordneten Diametral-Ebene, senkrecht steht.

76. Ausführlicher wollen wir den besondern Fall behandeln, der bisher in den allgemeinen Untersuchungen noch eingeschlossen war, dass die geradlinige Fläche ein hyperbolisches Paraboloid ist. Dieser Fall ist leicht auch durch die Particularisation der allgemeinen Gleichungs-Form zu unterscheiden.

Wenn wir in der allgemeinen Gleichung (1) die lineare Function v auf eine blosse Constante reduciren, wonach sich die folgende Gleichungs-Form ergibt:

$$tu = \mu w, \tag{20}$$

so ist die dargestellte Fläche ein hyperbolisches Paraboloid. Die frühere Berührungs-Ebene v, welche bisher die Fläche in den beiden geraden Linien (t, v) und (u, v) schnitt, ist nun, mit diesen beiden geraden Linien, unendlich weit gerückt, wodurch das bisherige ganz auf der Fläche liegende Viereck sich auf zwei einander schneidende gerade Linien (t, w) und (u, w) reducirt hat. Ohne irgend einer Schwierigkeit zu begegnen können wir hiernach diejenigen Modificationen verfolgen, welche die früheren Entwickelungen, die sich gleichmässig auf das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid bezogen, dann erleiden, wenn sie sich nun lediglich auf die letztgenannte Fläche beziehen sollen.

77. Während ein Paraboloid nur von acht Constanten abhängt, schliesst die Gleichung (20) deren

zehn ein. Von diesen können wir also zwei von Vorne herein willkührlich annehmen, was wir auch in der geometrischen Deutung bestätigt finden.

Wir können nemlich durch Einführung zweier neuen willkührlichen Constanten, α und β, die vorstehende Gleichung (20) auch folgendergestalt schreiben:

$$(t + \alpha)(u + \beta) = \mu w + \beta t + \alpha u + \alpha\beta;$$

und wenn wir dann

$$t + \alpha \equiv t',$$
$$u + \beta \equiv u',$$
$$\mu w + \beta t + \alpha u + \alpha\beta \equiv \mu' w',$$

setzen, gelangen wir zu der Gleichung:

$$t'u' = \mu' w',$$

also zu der ursprünglichen Gleichungs-Form zurück. Die beiden Ebenen (t) und (u) stehen also in keiner ausschliesslichen Beziehung zur Fläche; in gleicher Beziehung zu derselben stehen irgend zwei andere (t′) und (u′), die mit ihnen parallel sind: aber die Richtung von solchen zwei Ebenen, und also auch die Richtung ihrer Durchschnittslinie, hat eine ausschliessliche Beziehung zur Fläche, so dass mit dieser Fläche auch jene Richtung gegeben ist (die Richtung der Durchmesser des Paraboloids). Wenn wir irgend eine Lage der beiden Ebenen (t′) und (u′) annehmen, so sind dadurch α und β bestimmt, und somit ist es auch die Lage der Ebene w′ und der Coefficient μ'. Umgekehrt, können wir auch α und β von Vorne herein auf lineare Weise dadurch bestimmen, dass wir der Ebene (w′) eine beliebige Richtung geben, und können insbesondere auch die Annahme machen, dass diese Ebene auf der durch die Fläche bestimmten Richtung der geraden Linie (t′, u′) oder (t, u) senkrecht steht — dann ist die gerade Linie (t′, u′) vollkommen bestimmt.

Um also ein gegebenes hyperbolisches Paraboloid durch eine Gleichung von der fraglichen Form (20) darzustellen, brauchen wir bloss irgend eine Tangential-Ebene (w′) der Fläche beliebig anzunehmen (in dieser beliebigen Annahme sind zwei willkührliche Constante eingeschlossen), dann durch die beiden Durchschnittslinien dieser Tangential-Ebene mit der Fläche zwei Ebenen (t′), (u′) zu legen, welche sich in einem (durch den Berührungspunct gehenden) Durchmesser (t′, u′) schneiden. Durch die Annahme, dass die Tangential-Ebene auf der Durchmesser-Richtung senkrecht steht, verschwinden die beiden überzähligen Constanten aus der Gleichung der Fläche, und dann ist die Darstellung derselben durch die Gleichungs-Form (20) eine einzige und vollkommen bestimmte, so wie dann auch die Tangential-Ebene und der durch den Berührungspunct gehende Durchmesser auf einzige Weise bestimmt sind.

Wenn wir die allgemeine Gleichungs-Form (1) zu Grunde legen, so sind (t), (u), (v) und (w) vier Tangential-Ebenen der Fläche. Wenn wir, um zur Gleichungs-Form (20) zu gelangen, v mit einer blossen Constanten vertauschen, so rückt die bezügliche Tangential-Ebene unendlich weit, und somit können wir als Definition hinstellen, dass ein hyperbolisches Paraboloid eine solche geradlinige Fläche zweiter Ordnung ist, die eine unendlich weit liegende Ebene berührt. Die Ebene (w) oder überhaupt (w′) bleibt immer eine eigentliche Tangential-Ebene der Fläche, und ist nach dem Vorstehenden immer auf lineare Weise bestimmt, wenn sie der Richtung nach gegeben ist. Es ist diess damit im Einklange, dass eine Fläche zweiter Ordnung überhaupt von zwei Ebenen berührt wird, die einer gegebenen parallel sind, dass aber, wenn die Fläche eine unendlich weit liegende Ebene berührt, diese, weil sie als jeder gegebenen Ebene parallel zu betrachten ist, immer eine jener zwei Ebenen ist, wonach nur eine einzige und reelle eigentliche Tangential-Ebene übrig bleibt. Die Ebenen (t) und (u) und überhaupt (t′) und (u′) haben von den frühern Eigenschaften der Tangential-

Ebene, das übrig behalten, dass sie die Fläche in zwei geraden Linien schneiden, von denen aber die eine mit der Ebene (v) unendlich weit gerückt ist, wonach also im eigentlichen Sinne jede der fraglichen Ebenen die Fläche nur in einer einzigen geraden Linie schneidet. Es folgt hieraus zugleich, dass die gerade Linie (t, u), und jede andere mit ihr parallele gerade Linie, das Paraboloid nur in einem einzigen Puncte schneidet und demnach ein Durchmesser desselben ist.

78. Wir können die Gleichung (20) auf zwiefache Weise befriedigen, indem wir einmal, bei willkührlicher Bestimmung von $\varkappa$, gleichzeitig

$$\begin{aligned} t &= \varkappa, \\ \varkappa u &= \mu w, \end{aligned} \tag{21}$$

das andere Mal, bei willkührlicher Bestimmung von λ, gleichzeitig

$$\begin{aligned} u &= \lambda, \\ \lambda t &= \mu w, \end{aligned} \tag{22}$$

setzen. Die erste der Gleichungen (21) stellt eine solche Ebene dar, die, bei beliebiger Annahme von $\varkappa$, in allen ihren Lagen mit sich selbst parallel bleibt, während die zweite dieser Gleichungen eine Ebene ausdrückt, welche fortwährend durch die gerade Linie (u, w) geht. Die Durchschnitts-Linie dieser Ebenen, in allen demselben Werthe von $\varkappa$ entsprechenden Lagen, beschreibt die bezügliche Fläche.

Dieselbe Fläche kann auch, in Gemässheit der Gleichungen (22), durch die Durchschnittslinie zweier Ebenen beschrieben werden, von welchen die eine mit der Ebene (u) parallel bleibt, und die andere fortwährend durch die gerade Linie (t, w) geht.

Wir erhalten hiernach den folgenden Satz, der dem Satze der 72. Nummer entspricht.

Wenn zwei Ebenen, von welchen die eine um eine in ihr liegende gerade Linie sich dreht und die andere parallel mit einer gegebenen Ebene sich fortbewegt, in ihren gleichzeitigen Lagen einander auf lineare Weise entsprechen, so beschreibt ihre Durchschnittslinie ein hyperbolisches Paraboloid.

Bleiben wir bei den Gleichungen (21) stehen, so ist ein solches lineares Entsprechen dadurch geometrisch bestimmt, dass die Durchschnittslinie der beiden Ebenen (21) ausser der gegebenen geraden Linie (u, w) fortwährend auch noch eine zweite gegebene gerade Linie schneidet. Eine geometrische Umschreibung des Satzes der folgenden Nummer ist hiernach in der folgenden Aussage enthalten.

Wenn eine gerade Linie sich so bewegt, dass sie in allen ihren Lagen zwei gegebenen, einander nicht schneidenden geraden Linien begegnet, und überdies immer einer gegebenen Ebene parallel bleibt, so beschreibt sie ein hyperbolisches Paraboloid.

Es ist nur eine andere Auffassungsweise desselben Satzes, wenn wir sagen, das fragliche Paraboloid werde beschrieben, erstens durch die Durchschnittslinie zweier Ebenen, die sich um zwei gegebene, einander nicht schneidende gerade Linien so drehen, dass diese Durchschnittslinie in allen ihren Lagen mit einer gegebenen Ebene parallel bleibt, zweitens durch die Verbindungslinie derjenigen beiden Puncte, in welchen zwei gegebene, einander nicht schneidende gerade Linien von einer parallel mit sich selbst fortrückenden Ebene in den verschiedenen Lagen derselben geschnitten werden.

Wir können uns auch das Paraboloid durch eine gerade Linie beschrieben denken, die in allen ihren Lagen drei gegebene gerade Linien fortwährend schneidet; nur sind diese drei Linien, nach dem Vorstehenden, der Bedingung unterworfen, dass sie einer und derselben Ebene parallel sein müssen.

79. Um den allgemeinen Satz der vorigen Nummer zu verificiren, wollen wir wiederum zu den Gleichungen (13) der 74. Nummer:

$$s - \alpha v = 0, \qquad s + \beta t + \gamma = 0, \tag{13}$$

zurückgehen, nun aber α und γ veränderlich nehmen und so bestimmen, dass sie die folgende Bedingungs-Gleichung:

$$a\alpha + b\gamma + c\alpha\gamma + d = 0, \tag{23}$$

befriedigen. Wenn wir alsdann zwischen den vorstehenden drei Gleichungen α und γ eliminiren, so erhalten wir die Gleichung eines hyperbolischen Paraboloids, als des geometrischen Ortes für die gerade Linie (13). Die vorstehende Bedingungs-Gleichung ist aber die allgemeinste, um auszudrücken, dass die beiden Ebenen (13), von welchen die erste um die gerade Linie (s, v) als Axe, bei veränderlichem Werthe von α, sich dreht, und die zweite, bei veränderlichem Werthe von γ, parallel mit sich selbst fortrückt, auf einzige Weise einander entsprechen.

80. In Folge der Gleichung (20) bestehen gleichzeitig die vier Gleichungen (21) und (22): dem entsprechend schneiden alle Linien der ersten Erzeugung alle Linien der zweiten. Zwei Linien der ersten und zwei Linien der zweiten Erzeugung bilden ein ganz auf der Fläche liegendes Viereck, worin wir zunächst den Grund erblicken, warum auch ein Paraboloid durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellt werden kann. Irgend ein Punct oder irgend eine Tangential-Ebene braucht nur noch zugleich mit jenem Viereck gegeben zu sein, um die Fläche durch die allgemeine Gleichungs-Form (1) auszudrücken. Ein solcher Punct oder eine solche Ebene kann aber nicht mehr, wie in dem Falle des Hyperboloids, willkührlich angenommen werden; denn eine solche Ebene ist für den vorliegenden Fall in der Tangential-Ebene, die unendlich weit liegt, schon als gegeben anzusehen, und dadurch die Fläche durch das gegebene Viereck allein auf lineare Weise schon bestimmt.

Wirklich erhalten wir, wenn irgend zwei Linien der ersten Erzeugung, die einer zwiefachen willkührlichen Annahme des Coefficienten $\varkappa$ in den Gleichungen (21) entsprechen, gegeben sind, sogleich die Richtung der Ebene (t), wenn wir durch die Richtungen jener beiden geraden Linien eine Ebene legen, und somit die Fläche selbst, wenn wir ausserdem zwei gerade Linien der zweiten Erzeugung kennen. Und andrerseits ist die Richtung der Ebene (u) durch irgend zwei Linien der zweiten Erzeugung, und hiernach die Fläche selbst gegeben, wenn wir ausserdem noch zwei Linien der ersten Erzeugung kennen. Hieraus erhält man die Lösung der Aufgabe:

Ein hyperbolisches Paraboloid durch die vier Seiten eines räumlichen gegebenen Vierecks zu legen.

Durch die Richtung je zweier gegenüberliegender Seiten des gegebenen Vierecks ist eine Ebene, der Richtung nach, bestimmt; bewegen wir eine gerade Linie parallel mit dieser Ebene so, dass sie fortwährend die jedesmaligen beiden andern gegenüberliegenden Seiten des gegebenen Vierecks schneidet, so beschreibt dieselbe das geforderte Paraboloid. Wir erhalten hiermit sogleich eine zweifache Beschreibung dieser Fläche.

Die Richtung der Durchmesser des hyperbolischen Paraboloids ist hierbei durch die, der Richtung nach, gegebenen Ebenen (t) und (u) unmittelbar gegeben. (77).

81. Ein hyperbolisches Paraboloid zu beschreiben, das zwei gegebene, einander nicht schneidende, gerade Linien in ihrer ganzen Ausdehnung enthält und überdiess eine von folgenden drei Bedingungen erfüllt:

erstens, durch zwei gegebene Puncte geht,

zweitens, durch einen gegebenen Punct geht und eine gegebene Ebene berührt,
drittens, zwei gegebene Ebenen berührt.

Wie in der 68. Nummer erhalten wir, wenn zwei auf der Fläche liegende gerade Linien gegeben sind, für jeden ausserdem noch gegebenen Punct der Fläche eine neue solche durch diesen Punct gehende gerade Linie, und für jede ausserdem noch gegebene Tangential-Ebene der Fläche eine neue solche in der Tangential-Ebene liegende gerade Linie. Die neuen geraden Linien schneiden die beiden gegebenen, so dass wir, nach dem Vorstehenden, ein auf der zu construirenden Fläche liegendes Viereck erhalten. Die vorstehende dreifache Aufgabe ist also auf die Aufgabe der vorigen Nummer zurückgeführt. —

82. Wir wollen in den nächstfolgenden Nummern die allgemeine Gleichung

$$tu = \mu vw, \tag{2}$$

in der Voraussetzung von Plan-Coordinaten, dadurch particularisiren, dass wir Puncte des auf der Fläche liegenden Vierecks unendlich weit rücken lassen.

Ist der Punct (v) nach gegebener Richtung unendlich weit gerückt, so können wir, indem wir der Gleichung (2) folgende Form geben:

$$\frac{t}{v} \cdot \frac{u}{v} = \mu \cdot \frac{w}{v},$$

unbeschadet der Allgemeinheit, den Quotienten $\frac{t}{v}, \frac{u}{v}$ und $\frac{w}{v}$ die Bedeutung von Segmenten geben, welche auf drei, durch die festen Puncte (t), (u) und (w) gehenden, parallelen geraden Linien (t, v), (u, v) und (w, v) zwischen diesen drei Puncten und der bezüglichen Tangential-Ebene der Fläche liegen. Das Product der beiden ersten solcher drei Segmente, getheilt durch das dritte, ist also constant. Es knüpft sich hieran eine Bestimmung der Fläche durch ihre Tangential-Ebenen, die wir hier nicht weiter verfolgen wollen.

83. Wenn zwei der vier Winkelpuncte des Vierecks unendlich weit rücken sollen, so müssen wir einen doppelten Fall unterscheiden. Entweder sind diese beiden Winkelpuncte zwei gegenüberliegende oder zwei auf einander folgende. Dem ersten Falle entspricht, dass etwa die beiden Puncte (t) und (u) nach zwei gegebenen Richtungen unendlich weit sich entfernen. Dann ist, ähnlich wie in der 77. Nummer, weil die gerade Linie (t, u) unendlich weit liegt, (v, w) ein Durchmesser der Fläche. Die vier Seiten des Vierecks gehen durch die Endpuncte dieses Durchmessers und sind paarweise, (v, t) und (w, t), (v, u) und (w, u), parallel. Schreiben wir die Gleichung (2) unter folgender Form:

$$\frac{v}{t} \cdot \frac{w}{u} = \frac{1}{\mu},$$

so können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, $\frac{v}{t}$ und $\frac{w}{u}$ als Segmente construiren, die auf den beiden nicht parallelen, durch die Endpuncte des Durchmessers (v, w) gehenden geraden Linien (v, t) und (w, u) durch die bezügliche Ebene abgeschnitten und von diesen Endpuncten an gerechnet werden.

Wir können die obige Gleichung auch folgendergestalt schreiben:

$$\frac{w}{t} \cdot \frac{v}{u} = \frac{1}{\mu};$$

dann treten, bei der geometrischen Deutung, die beiden geraden Linien (w, t) und (v, u), welche

durch die Endpuncte desselben Durchmessers gehen, an die Stelle der frühern (v, t) und (w, u). Sie sind diese frühern Linien selbst mit vertauschter Richtung, und gehören wie diese derselben Erzeugung an.

Hiernach können wir, wenn irgend zwei gerade Linien, auf jeder derselben ein Punct und überdiess noch eine Constante gegeben sind (dem Gegebenen entsprechen zusammen eilf, also zwei überzählige, Constanten) ein geradliniges Hyperboloid beschreiben, das die beiden gegebenen geraden Linien enthält und diejenige gerade Linie, welche die beiden gegebenen Puncte verbindet, zu einem Durchmesser hat. Durch jeden Punct einer der beiden gegebenen geraden Linien lassen sich nämlich unendlich viele Tangential-Ebenen der Fläche legen, die alle die zweite dieser geraden Linien in einem bestimmten Puncte schneiden, und also auch eine gerade Linie, welche durch eben diesen Punct geht und in ihrer ganzen Ausdehnung auf der Fläche liegt. Zugleich begegnen wir hierbei dem nachstehenden Satze.

Wenn zwei Linien der einen Erzeugung eines einschaligen Hyperboloids und ein dieselben schneidender Durchmesser desselben gegeben sind, so schneidet jede Linie der andern Erzeugung die beiden gegebenen so, das das Product der auf dieser zwischen dem Durchmesser und der Linie der andern Erzeugung liegenden Segmente constant ist.

Wenn wir auf einem gegebenen einschaligen Hyperboloid irgend zwei gerade Linien derselben Erzeugung beliebig annehmen, so gibt es immer einen einzigen vollkommen bestimmten Durchmesser der Fläche, der diesen geraden Linien beiden zugleich begegnet. Um dies zu zeigen und zugleich den fraglichen Durchmesser zu construiren, brauchen wir bloss eine Ebene durch den Mittelpunct der Fläche und eine der beiden Erzeugenden zu legen. Diese Ebene schneidet die andere Erzeugende in einem einzigen Puncte, und diejenige gerade Linie, welche diesen Punct mit dem Mittelpuncte verbindet, ist der zu construirende Durchmesser der Fläche. Es ist hiernach augenscheinlich, dass er der einzige ist, welcher beiden Erzeugenden begegnet.

Wenn ein einschaliges Hyperboloid so bestimmt ist, dass es durch die Bewegung einer geraden Linie beschrieben werden kann, so können wir, nach dem Vorstehenden, den Mittelpunct desselben finden. Es seien zum Beispiel zwei Linien derselben Erzeugung und drei Tangential-Ebenen der Fläche gegeben. Diese drei Tangential-Ebenen schneiden die erste der beiden gegebenen Linien in drei Puncten, die wir A, A′ und A″, und die zweite in drei Puncten, die wir B, B′ und B″ nennen wollen. AB, A′B′ und A″B″ sind alsdann Linien der andern Erzeugung (67). Ferner schneide derjenige Durchmesser, der beiden Linien begegnet, die erste in M und die zweite in N. Alsdann besteht nach dem vorstehenden Satze, die folgende Doppel-Gleichung:

$$MA.NB = MA'.NB' = MA''.NB''.$$

Setzen wir $MA = -AM = -x$, $NB = -BN = -y$,

$AA' = a'$, $AA'' = a''$, $BB' = b'$, $BB'' = b''$,

so erhalten wir, statt der obigen, die nachstehende Doppel-Gleichung:

$$xy = (a'-x)(b'-y) = (a''-x)(b''-y),$$

welche in die folgenden beiden sich auflöset:

$$\begin{aligned} a'y + b'x &= a'b', \\ a''y + b''x &= a''b''. \end{aligned} \qquad (24)$$

Durch diejenigen Werthe von x und y, welche durch diese Gleichungen auf lineare Weise be-

stimmt werden, sind die Puncte M und N gegeben und auch leicht geometrisch zu construiren. Bringen wir zu diesem Ende die beiden gegebenen geraden Linien irgendwie in eine solche gegenseitige Lage, dass die beiden Puncte A und B zusammenfallen, und betrachten sie dann als die Axen eines gewöhnlichen Parallel-Coordinaten-Systems (x, y), so stellen die beiden letzten Gleichungen, wenn wir in denselben x und y als veränderlich betrachten, zwei solche gerade Linien dar, welche in der Ebene der beiden Axen liegen und dieselbe bezüglich in den Puncten A' und B', A'' und B'' schneiden. Die Coordinaten des Durchschnitts dieser beiden geraden Linien sind alsdann die zu construirenden Werthe von x und y, die nur dann unendlich werden, wenn $\frac{b'}{a'} = \frac{b''}{a''}$ und demnach die letztgenannten geraden Linien parallel sind: ein Fall, in welchem, nach der 74. Nummer, das Hyperboloid in ein hyperbolisches Paraboloid übergeht.

Wenn noch eine vierte Linie der zweiten Erzeugung gegeben wäre, so müsste diese, etwa an die Stelle von $A''B''$ gesetzt, denselben Werth für x und y geben, und also müsste auch, in der eben bezeichneten Umformung, die zweite der beiden geraden Linien (24) durch eine solche vertreten werden, die durch den Durchschnitt der beiden bisherigen geht. Wir können hiernach durch eine höchst einfache Construction, nach dem obigen Satze dieser Nummer, das einschalige Hyperboloid dadurch bestimmen, dass wir beliebig viele Linien der zweiten Erzeugung construiren. Zugleich gewinnen wir die folgende Anschauung über die Entstehung eines einschaligen Hyperboloids und über die Umgestaltung einer solchen Fläche in eine andere.

Wenn in einer Ebene zwei gerade Linien und ein Punct, durch welchen nach allen Richtungen gerade Linien gehen, gegeben sind, so können die beiden gegebenen Linien in irgend eine andere gegenseitige Lage gebracht werden, ohne dass auf ihnen die Puncte, in welchen sie von den übrigen Linien geschnitten werden, eine andere Lage erhalten: alsdann verwandelt sich, wenn die beiden gegebenen geraden Linien nicht mehr in derselben Ebene liegen, diese Ebene in ein einschaliges Hyperboloid, und jene beiden geraden Linien gehören der einen, die übrigen der andern Erzeugung dieser Fläche an. Wenn diese Linien der andern Erzeugung ursprünglich unter einander parallel waren, so entsteht statt des einschaligen Hyperboloids ein hyperbolisches Paraboloid. Dasselbe findet Statt, wenn die beiden gegebenen geraden Linien ursprünglich parallel waren.

Legen wir, in dem Falle des Hyperboloids, durch den gegebenen Punct zwei gerade Linien parallel mit den beiden gegebenen, so erhalten wir auf diesen letztgenannten Linien zwei Durchschnittspuncte, die wir als unverrückbar auf denselben ansehen können. Nach der Lagen-Aenderung ist die Mitte zwischen diesen beiden Puncten der Mittelpunct der Fläche. In dem Falle des Paraboloids, sei es nun, dass die beiden gegebenen geraden Linien oder die Linien der andern Erzeugung ursprünglich parallel waren, ist die Richtung der ursprünglichen Parallelen zugleich die Richtung der Durchmesser der Fläche.

Wenn man die beiden gegebenen geraden Linien so fortrückt, dass sie einander fortwährend schneiden, wobei insbesondere auch diese Linien bloss ihrer Länge nach verschoben werden können, so umhüllen die ursprünglich durch den gegebenen Punct gehenden geraden Linien, nach der Lagen-Aenderung, einen Kegelschnitt, der von den beiden gegebenen Linien berührt wird, und der insbesondere in eine Parabel übergeht, wenn entweder die beiden gegebenen, oder auch alle durch den gegebenen Punct gehenden geraden Linien unter einander parallel sind. Wie vorher der Mittelpunct der Fläche, so bestimmt sich hier der Mittelpunct des Kegelschnittes; die Durchmesser-Richtung

des frühern Paraboloids wird hier die Durchmesser-Richtung der Parabel. Der Kegelschnitt artet in ein System von zwei Puncten aus, wenn die beiden gegebenen geraden Linien bloss um ihren ursprünglichen Durchschnittspunct sich drehen oder überhaupt in den Durchschnittspunct nach der Lagen-Aenderung zwei solche Puncte dieser beiden Linien zusammenfallen, in welchen dieselben ursprünglich von einer beliebigen, durch den gegebenen Punct gehenden, geraden Linie geschnitten wurden. Einer der beiden Puncte des Systems ist derjenige Punct, in welchem nach der Lagen-Aenderung die beiden gegebenen geraden Linien sich schneiden.

Wenn wir von einer gegebenen geradlinigen Fläche ausgehen, so gelangen wir zu der folgenden modificirten Aussage desselben Satzes.

Wenn man auf einem einschaligen Hyperboloid oder einem hyperbolischen Paraboloid zwei Linien der einen Erzeugung beliebig annimmt, und sich dieselben — der uneigentliche Ausdruck sei uns hier gestattet — von den Linien der andern Erzeugung so durchbohrt denkt, dass diese letztern Linien in den Durchbohrungen zwar festgehalten werden, aber durch dieselben frei fortgleiten können: so verwandelt sich die Fläche, bei jeder beliebigen Lagen-Aenderung der beiden auf ihr angenommenen Linien in eine andere Fläche derselben Art. Wenn insbesondere nach der beliebigen Lagen-Aenderung diese beiden Linien sich schneiden, so umhüllen die Linien der zweiten Erzeugung einen Kegelschnitt; diese Linien gehen alle durch denselben Punct, wenn insbesondere die einer beliebigen dieser Linien entsprechenden beiden Durchbohrungen nach der Lagen-Aenderung in den Durchschnitt zusammenfallen.

84. Die in der vorigen Nummer abgeleitete Beschreibungsweise der geradlinigen Flächen zweiter Ordnung ist durch die allgemeine Auffassung der 74. Nummer begründet, nach welcher eine, die Fläche erzeugende, gerade Linie dadurch bestimmt wird, dass sie zwei solche Puncte verbindet, die auf zwei gegebenen geraden Linien liegen und sich auf einzige Weise entsprechen. Und so ergeben sich denn auch analoge Constructionen, die wir in der gegenwärtigen Nummer einschalten wollen, wobei die erzeugende gerade Linie als durch zwei sich entsprechende Ebenen bestimmt angesehen wird.

Wenn zwei gerade Linien A und A' gegeben sind, die durch einen gegebenen Punct C gehen, so können wir durch diese beiden geraden Linien unendlich viele Systeme zweier Ebenen legen, deren Durchschnittslinie F in eine durch den Punct C gehende gegebene Ebene B fällt und auch selbst durch C geht. Bringen wir die beiden Linien A und A' in irgend eine andere gegenseitige Lage, während die durch jede derselben gehenden und mit ihr als fest verbunden betrachteten Ebenen sich gleichzeitig mit fortbewegen, so verwandelt sich der geometrische Ort für die Linie F, der ursprünglich die Ebene B war*), in eine geradlinige Fläche der zweiten Ordnung. Diese Fläche wird einerseits durch die Linie F er-

*) Analytisch betrachtet müssen wir für diesen Ort das System der Ebene B und derjenigen Ebene nehmen, welche die beiden Linien A und A' enthält, und dem entspricht, geometrisch genommen, dass jede durch C gehende gerade Linie der letztgenannten Ebene als der Durchschnitt zweier durch A und A' gehenden, zusammenfallenden Ebenen betrachtet werden kann. Eine ganz analoge Bemerkung gilt auch in Beziehung auf die allgemeine Construction der vorigen Nummer.

zeugt, während die Linien A und A', in ihrer neuen Lage, Linien der andern Erzeugung sind.

Particularisationen ergeben sich hier unmittelbar. Bewegen sich die beiden geraden Linien A und A' parallel mit sich selbst fort, so bleibt auch die Linie F parallel mit sich selbst und also auch in allen ihren Lagen parallel mit der Ebene B. Die Fläche wird alsdann ein hyperbolisches Paraboloid. Die Durchmesser-Richtung dieses Paraboloids ist dadurch gegeben, dass sie einerseits der Ebene B und andrerseits derjenigen Ebene, welche die beiden Linien A und A' in ihrer ursprünglichen Lage enthält, parallel ist.

Drehen sich die beiden geraden Linien A und A' mit den beiden Ebenen-Systemen um sich selbst, so ist, nach der Drehung, der geometrische Ort für die Linie F ein Kegel zweiter Ordnung, und bleibt immer ein solcher Kegel, wenn in der neuen Lage die Linien A und A' sich schneiden. Nur wenn in diesem Falle irgend zwei sich entsprechende Ebenen zusammenfallen, artet der Kegel in ein System von zwei Ebenen aus.

Wenn die beiden geraden Linien A und A' parallel sind, so liegt der Punct C nach der Richtung derselben unendlich weit, und auch die Ebene B ist mit ihnen parallel. Im Allgemeinen erhalten wir hier wiederum ein einschaliges Hyperboloid. Verschiebt man aber bloss die beiden geraden Linien A und A' parallel mit der Ebene B, so bleiben diejenigen beiden parallelen Ebenen, die sich ursprünglich durch A und A' legen lassen und auf der Ebene B in unendlicher Entfernung sich schneiden, auch in der neuen Lage parallel; auf der entstandenen Fläche liegt in einer Lage die Linie F auf der Ebene B unendlich weit: die Fläche ist daher ein hyperbolisches Paraboloid. Die Linien derjenigen Erzeugung der Fläche, welcher auch A und A' in der neuen Lage angehören, sind der Ebene B parallel. Alle Linien F sind einer zweiten Ebene parallel, die sich durch irgend zwei Lagen derselben sogleich bestimmt. Drehen sich die beiden parallelen geraden Linien um sich selbst, oder bleiben sie auch nur, nach der Lagen-Aenderung, parallel, so artet die Fläche in einen Cylinder aus. Insbesondere kann auch die Ebene B der die beiden Linien A und A' enthaltenden Ebene parallel sein, und endlich auch unendlich weit rücken. In diesem letztern Falle sind also je zwei durch A und A' gehende, sich entsprechende Ebenen parallel; die beiden Ebenen-Systeme sind, abgesehen von ihrer Lage, als identische anzusehen; es decken sich die entsprechenden Ebenen der beiden Systeme, wenn man diese so lange parallel mit sich selbst fortschiebt, bis die beiden Linien A und A' zusammenfallen. Bei einer blossen Drehung der beiden Linien A und A' um sich selbst ist die erzeugte Fläche offenbar ein Cylinder, dessen Seiten diesen Linien parallel sind und der von der Ebene, die auf denselben senkrecht steht, in einem Kreise geschnitten wird. Rücken die beiden Linien A und A', ohne dass sie sich um sich selbst drehen, parallel mit einer beliebigen Ebene, die auch ihre Richtung enthält, fort, so wird die Fläche wiederum ein hyperbolisches Paraboloid, was sich an einen früher betrachteten Fall anknüpft, wenn wir erwägen, dass eine Ebene, die unendlich weit gerückt ist, als mit der gegebenen Ebene parallel angesehen werden kann.

Wenn wir von einer gegebenen geradlinigen Fläche zweiter Ordnung ausgehen, so können wir diese in andere Flächen dieser Art umformen, und dieselbe auch applaniren.

Wenn man auf einer geradlinigen Fläche zwei Linien derselben Erzeugung A und A' beliebig annimmt, so lassen sich durch diese beiden geraden Linien Systeme von solchen Ebenen legen und mit ihnen als fest verbunden denken, welche sich paarweise in den Linien F der andern Erzeugung schneiden. Drehen und verrücken wir die beiden Linien A und A' mit ihren Systemen von Ebenen, so bilden die

Durchschnittslinien F eine neue geradlinige Fläche zweiter Ordnung. Diese artet in einen Kegel aus, wenn, nach der Drehung und Verrückung, die beiden Linien A und A' sich schneiden, und particularisirt sich weiter in eine Ebene, wenn überdiess zwei sich ursprünglich in einer beliebigen Linie F schneidende Ebenen beider Systeme zusammenfallen.

Wir würden den Character der vorstehenden Erörterungen verwischen, wenn wir durch directe analytische Entwickelungen die particulären Fälle discutiren und, gegen unsere Absicht, in speciellere Bestimmungen eingehen wollten.

85. Wenn zwei auf einander folgende Winkelpuncte des der Fläche aufgeschriebenen Vierecks, etwa (t) und (v), unendlich weit gerückt sind, so liegt die Vierecks-Seite (t, v) in ihrer ganzen Ausdehnung auf der Fläche unendlich weit. Dann ist diese Fläche ein hyperbolisches Paraboloid, das durch die drei geraden Linien (u, w), (u, v) und (w, t) geht. Wenn wir die Gleichung derselben folgendergestalt schreiben:

$$\frac{u}{v} = \mu . \frac{w}{t},$$

so können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, $\frac{u}{v}$ und $\frac{w}{t}$ in der Bedeutung von Segmenten nehmen, die durch die Tangential-Ebenen von zwei festen geraden Linien, welche bezüglich durch die Puncte (u) und (w) gehen und diejenige Richtung haben, nach welcher die beiden Puncte (t) und (u) unendlich weit gerückt sind, abgeschnitten und von den Puncten (u) und (w) aus gerechnet werden. Dann drückt die vorstehende Gleichung unmittelbar diejenige Eigenschaft eines geradlinigen Paraboloids aus, an welche schon in der 74. Nummer die Beschreibung dieser Fläche geknüpft worden ist.

Dem entsprechend, dass durch die vorstehende Gleichungs-Form die Tangential-Ebenen der Fläche bloss in so weit bestimmt werden, als sie zwei feste gerade Linien in bestimmten Puncten schneiden, oder, mit andern Worten, als sie durch diejenigen geraden Linien gehen, welche die jedesmaligen beiden Durchschnittspuncte verbindet — wird die Fläche durch eine gerade Linie, die wir uns als sich bewegend vorstellen, construirt. Aehnlich verhält sich's, wenn wir von der folgenden Form:

$$\frac{t}{v} = \mu . \frac{w}{u},$$

unter der wir dieselbe Gleichung schreiben können, ausgehen. Die beschreibende gerade Linie geht hier durch den, einem beliebigen Werthe von $\frac{w}{u}$ entsprechenden, Punct der geraden Linie (w, u), während ihre Richtung in einer Ebene, welche durch diesen Punct geht und die Richtungen enthält, nach welchen die beiden Puncte (t) und (v) unendlich weit liegen, durch den zugehörigen Werth von $\frac{t}{v}$ bestimmt ist. Nach den bisher öfter angewandten Betrachtungsweisen ergibt sich hiernach der folgende Satz:

Wenn eine Ebene, parallel mit sich selbst, fortrückt, während ein Punct derselben eine gerade Linie durchläuft und eine in ihr liegende, durch diesen Punct gehende gerade Linie um denselben sich so dreht, dass ihre verschiedenen Lagen den verschiedenen Lagen des Punctes linear entsprechen; so beschreibt diese letzte gerade Linie ein hyperbolisches Paraboloid.

Das einfachste lineare Entsprechen von Puncten und geraden Linien ist dasjenige, wo jeder Punct auf der zugehörigen geraden Linie liegt und überdiess alle Puncte auf einer gegebenen geraden Linie liegen und alle geraden Linien durch einen gegebenen Punct gehen. Hiernach ergibt sich die folgende geometrische Umschreibung des vorstehenden Satzes:

Wenn in einer gegebenen Ebene ein System von geraden durch denselben Punct gehenden Linien von einer gegebenen geraden Linie geschnitten wird, so können wir die gegebene gerade Linie in irgend eine andere Lage bringen und dabei die ursprünglich durch denselben Punct gehenden Linien, parallel mit sich selbst, so fortrücken lassen, dass ihre Durchschnittspuncte mit der gegebenen Linie auf dieser unverrückt ihre ursprüngliche Lage behalten; alsdann biegt sich die gegebene Ebene zu einem hyperbolischen Paraboloid. Die eine gegebene gerade Linie gehört nach der Lagen-Aenderung der einen, die ursprünglich durch den gegebenen Punct gehenden geraden Linien gehören der andern Erzeugung desselben an. Die Durchmesser des Paraboloids sind der gegebenen geraden Linie in ihrer ursprünglichen Lage parallel. *)

Wenn die gegebene gerade Linie auch in ihrer neuen Lage in der gegebenen Ebene geblieben ist, so umhüllen die ursprünglich durch denselben Punct gehenden geraden Linien eine Parabel. Die gegebene gerade Linie ist in ihrer ursprünglichen Lage ein Durchmesser, in der neuen Lage eine Tangente dieser Parabel.

An die letzte Gleichungs-Form knüpft sich noch der folgende Satz:

Solche vier Linien der einen Erzeugung eines geradlinigen Paraboloids, welche eine Linie der andern Erzeugung harmonisch theilen, haben die Richtung von vier Harmonicalen.

Denn die Erzeugende (u, w) wird in den vier durch folgende Gleichungen dargestellten Puncten:

$$u = 0, \quad w = 0, \quad w = \varkappa u, \quad w = -\varkappa u,$$

harmonisch getheilt und die Richtungen der durch diese Puncte gehenden Linien der andern Erzeugung sind durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$v = 0, \quad t = 0, \quad t = \mu\varkappa v, \quad t = -\mu\varkappa v,$$

und also die Richtungen von vier Harmonicalen.

86. Wenn endlich die Puncte (t), (u), (v) des auf der Fläche liegenden Vierecks, nach gegebener Richtung, unendlich weit gerückt sind, so liegt die Berührungs-Ebene (t, u, v) unendlich weit. Durch den auf der Fläche liegenden Punct (w) gehen die beiden ebenfalls auf ihr liegenden Seiten $(w\ t)$ und (w, u), und (t, w, u) ist die Tangential-Ebene in diesem Puncte. Die gerade Linie (w, v) ist der durch den Punct (w) gehende Durchmesser des Paraboloids; denn in dem allgemeinen Falle der Gleichung (2) sind die beiden geraden Linien (t, u) und (w, v) zugeordnete

---

*) Eine Linie der einen Erzeugung wird von allen Linien der andern geschnitten, und es ist offenbar, dass diejenige unter den letztgenannten Linien, für welche der Durchschnitt auf jener unendlich weit rückt, indem sie selbst unendlich weit sich entfernt, die Richtung der Durchmesser der erzeugten Fläche annimmt. Diese Richtung ist aber in der obigen Construction die Richtung der gegebenen geraden Linie in ihrer ursprünglichen Lage.

Wir erkennen in den Resultaten des Textes sogleich eine Modification der allgemeinen Construction der 83. Nummer, dem entsprechend, dass eine der beiden daselbst als gegeben betrachteten geraden Linien unendlich weit gerückt ist.

Polaren, und hier also, wo die erste dieser Linien unendlich weit liegt, ist die andere nothwendig ein Durchmesser der Fläche.

Die nunmehrige Coordinaten-Bestimmung ist keine andere, als die in der 7. Nummer der einleitenden Betrachtungen bezeichnete, wo durch den gegebenen Punct (w) nach den Richtungen (t), (u) und (v) drei Axen gezogen worden, und $\frac{w}{t}$, $\frac{w}{u}$ und $\frac{w}{v}$ die auf diesen Axen durch die bezügliche Ebene abgeschnittenen Segmente bedeuten. Die Gleichung der Fläche gibt hiernach, wenn wir sie auf die nachstehende Weise schreiben:

$$\frac{w}{t} \cdot \frac{w}{u} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{w}{v},$$

unmittelbar den folgenden Satz:

Wenn drei durch denselben Punct gehende gerade Linien gegeben sind, so berühren alle Ebenen, welche diese Linien so schneiden, dass das Product der auf zwei derselben abgeschnittenen Segmente, getheilt durch das auf der dritten abgeschnittene Segment, constant ist, ein hyperbolisches Paraboloid.

Die beiden erstgenannten geraden Linien sind irgend zwei nicht derselben Erzeugung angehörende und die dritte der durch ihren Durchschnittspunct gehende Durchmesser der Fläche. Dieser Durchschnittspunct kann jeder beliebige Punct der Fläche sein und darum muss die allgemeine Gleichung noch zwei überzählige Constanten einschliessen. Diese Constanten fallen aus, wenn wir von Vorne herein annehmen, dass die Richtung (v) auf den Richtungen (t) und (u) senkrecht stehe.

Wenn die Richtungen (t) und (u) zusammenfallen, wonach

$$u^2 = \mu v w,$$

so artet die Fläche in eine Parabel aus.

87. Nachdem wir in den letzten Nummern die verschiedenen Particularisirungen der allgemeinen Gleichungen (1) und (2) discutirt haben, wenden wir uns jetzt nochmals zu diesen zurück. Wir wollen die erste derselben, indem wir die vier linearen Functionen in ihrer ganzen Allgemeinheit nehmen, folgendergestalt schreiben:

$$tu = vw,$$

und befriedigen, indem wir gleichzeitig einmal:

$$t = v,$$
$$u = w,$$

das andere Mal:

$$t = w,$$
$$u = v,$$

setzen. Diese beiden Gleichungen-Paare stellen, wie früher, zwei gerade Linien dar, welche ganz auf der Fläche liegen, und die wir, der Kürze halber, (3) und (6) nennen wollen. Diese beiden geraden Linien bilden mit den vier andern (t, w), (t, v), (u, w), (u, v), welche ebenfalls auf der Fläche liegen und die wir bezüglich durch (1), (2), (4) und (5) bezeichnen wollen, irgend ein System von sechs geraden Linien, von welchen drei (1), (3), (5) der einen und die drei übrigen

(2), (4) (6) der andern Erzeugung angehören. *) Ordnen wir diese sechs geraden Linien nach der Ordnung der Symbole, so können wir durch je zwei auf einander folgende eine Ebene legen, und erhalten dann einen sechsflächigen Körper, welcher der Fläche zweiter Ordnung gleichzeitig um- und eingeschrieben ist. Die sechs auf einander folgenden Seiten-Ebenen, die wir nach den geraden Linien, welche sie enthalten, durch (12), (23), (34), (45), (56) und (61) bezeichnen wollen, werden durch die folgenden Gleichungen dargestellt:

$$\begin{array}{lll} t = 0, \ (12) & t = v, \ (23) & u = w, \ (34) \\ u = 0, \ (45) & u = v, \ (56) & t = w. \ (61) \end{array}$$

Je zwei unter einander stehende Gleichungen geben, von einander abgezogen, übereinstimmend die folgende:

$$t = u.$$

Somit ergibt sich, dem Pascal'schen Satze entsprechend, hier der folgende.

Die gegenüberliegenden Seiten-Ebenen eines beliebigen, einer geradlinigen Fläche der zweiten Ordnung gleichzeitig um- und eingeschriebenen sechsflächigen Körpers schneiden sich paarweise in solchen drei geraden Linien, die in derselben Ebene liegen.

Indem wir die sechs auf der Fläche liegenden geraden Linien in verschiedener Aufeinanderfolge nehmen, zugleich aber berücksichtigen, dass nur durch solche zwei dieser Linien, die einem geraden und einem ungeraden Zahlen-Symbole entsprechen, eine Ebene sich legen lässt, ergeben sich sechs verschiedene solcher sechsflächigen, zugleich um- und eingeschriebenen Körper, die den folgenden sechs Zusammenstellungen von Symbolen entsprechen, und sich zu drei in zwei symmetrischen Gruppen zusammenordnen:

$$\left.\begin{array}{l} 123456 \\ 163254 \\ 143652 \end{array}\right\} \text{I.} \qquad \left.\begin{array}{l} 143256 \\ 163452 \\ 123654 \end{array}\right\} \text{II.}$$

Jedem dieser sechs Körper entspricht eine Ebene, welche die drei Durchschnittslinien der gegenüberliegenden Seiten-Ebenen desselben enthält, und die wir durch dasselbe Symbol bezeichnen können.

88. Das Princip der Reciprocität gibt, neben dem Satze der vorigen Nummer, sogleich den folgenden, welcher dem Satze von Brianchon über das einem Kegelschnitte umgeschriebene Sechseck analog ist.

---

*) Um nicht die frühern constanten Coefficienten μ, $\varkappa$ und λ in den nächsten Entwickelungen müssig durchzuziehen, haben wir die einfachere Bezeichnung des Textes gewählt, und zwar ist diess unbeschadet der Allgemeinheit geschehen. Denn wir brauchen nur in den Gleichungen der 64. Nummer:

$$\begin{array}{ll} tu = \mu vw, & \\ t = \varkappa v, & t = \lambda w, \\ \varkappa u = \mu w, & \lambda u = \mu v, \end{array}$$

die nachstehenden Substitutionen zu machen:

$$\begin{array}{ll} \mu w \equiv w', & \varkappa u \equiv u', \\ \frac{\mu}{\lambda} . t \equiv t', & \frac{\varkappa\mu}{\lambda} . v \equiv v', \end{array}$$

um zu den Gleichungs-Formen des Textes zu gelangen.

Wenn man auf einer Fläche der zweiten Ordnung aus drei Linien der einen und drei Linien der andern Erzeugung irgend ein Sechseck bildet, so schneiden sich die drei Diagonalen desselben in ein und demselben Puncte.

Je zwei Sätze, die das Princip der Reciprocität mit einander verknüpft, sind solche, welche durch dieselbe analytische Beweisführung, wenn wir einmal Punct- das andere Mal Plan-Coordinaten zu Grunde legen, gegeben sind. Eben so direct, als den Satz der vorigen, und genau durch dieselbe analytische Symbol-Verbindung können wir auch den Satz dieser Nummer als bewiesen ansehen, wenn wir den dort gebrauchten Buchstaben-Symbolen die Bedeutung linearer Plan-Coordinaten beilegen. Jeder der beiden Sätze hat denselben Anspruch, der ursprüngliche zu sein, und keine der beiden Coordinaten-Bestimmungen verdient hier den Vorzug. Wir wollen indess, weil es uns eine erwünschte Gelegenheit darbietet, unsere Methode darzulegen, den Beweis derjenigen Gruppe von Sätzen, die uns in dieser und den nächsten Nummern beschäftigen, vollständig in der einen Coordinaten-Bestimmung durchführen, ohne auf das Princip der Reciprocität Rücksicht zu nehmen, und wählen zu diesem Ende diejenige Coordinaten-Bestimmung, mit der ich die grössere Vertrautheit voraussetzen muss. Durch diese Beweisführung ist eine ganz gleiche in der andern Coordinaten-Bestimmung unmittelbar gegeben: einer solchen Wiederholung, welche in analytischer Hinsicht nichts Neues darbietet, können wir uns hier überheben.

89. Zwei auf einander folgende Seiten des in Rede stehenden Sechsecks bestimmen einen Eckpunct desselben, so wie sie früher eine Seiten-Ebene des sechsflächigen Körpers bestimmt haben. Hiermit ist eine, der frühern analoge, Bezeichnung gegeben, gemäss welcher wir zum Beispiel durch das Symbol (12) (zur Unterscheidung wählen wir hier die Cursivschrift) nun den Durchschnitt der Linien (1) und (2) bezeichnen wollen. Dem entsprechend stelle ferner (123456) das von den Seiten (1), (2), (3), (4), (5) und (6), ihrer Reihenfolge nach, gebildete Sechseck dar, und es soll bewiesen werden, dass die drei geraden Linien

$$(12, 45), \quad (23, 56), \quad (34, 61)$$

welche die drei Paare gegenüberliegender Winkelpuncte dieses Sechsecks, (12) und (45), (23) und (56), (34) und (61) verbinden, in demselben Puncte sich schneiden.

Es ist augenfällig, dass die nachstehenden sechs Symbolen-Paare:

$$\begin{array}{lll} (61, 12, 23) \equiv (12), & (12, 23, 34) \equiv (23), & (23, 34, 45) \equiv (34), \\ (34, 45, 56) \equiv (45), & (45, 56, 61) \equiv (56), & (56, 61, 12) \equiv (61), \end{array}$$

gleichbedeutend sind, weil in dem Puncte (12) zum Beispiel die drei Ebenen (61), (12) und (23) sich schneiden. Dadurch ist die folgende Coordinaten-Bestimmung für die Winkelpuncte des Sechsecks unmittelbar gegeben:

$$\begin{array}{llll} t = w = v = 0, & (12) & u = w = v = 0, & (45) \\ t = v = 0, \quad u = w, & (23) & u = v = 0, \quad t = w, & (56) \\ u = w = 0, \quad v = t, & (34) & t = w = 0, \quad u = v. & (61)\ ^*) \end{array}$$

*) Die drei Sechsecks-Seiten schneiden sich ausserdem noch in den drei Puncten (14), (25), (36), für welche sich die nachstehende Coordinaten-Bestimmung:

$$\begin{array}{ll} t = u = w = 0, & (14) \\ t = u = v = 0, & (25) \\ t = u = v = w, & (36) \end{array}$$

Für die drei geraden Linien, welche diejenigen Puncte, deren Symbole neben einander stehen, verbinden, erhalten wir, aus dem blossen Anblick der Coordinaten-Werthe dieser Puncte, sogleich die nachstehenden drei Gleichungen-Paare:

$$\begin{array}{lll} w = 0, & v = 0, & (12,\ 45) \\ v = 0, & u = t, & (23,\ 56) \\ w = 0, & u = t. & (34,\ 61) \end{array}$$

Diese drei Gleichungen-Paare bestehen gleichzeitig; die drei bezüglichen geraden Linien gehen also, was zu beweisen war, durch denselben Punct und für diesen ist:

$$v = w = 0, \qquad u = t.$$

Jeder andern möglichen Aufeinanderfolge derselben sechs Seiten entspricht ein anderes Sechseck, auf welches der eben bewiesene Satz seine Anwendung findet. Auf diese Weise ergeben sich sechs Sechsecke und für jedes ein Punct, in welchem die drei Diagonalen desselben sich schneiden. Jene sechs Sechsecke und diese sechs Puncte können wir gleichzeitig durch die folgenden Symbole bezeichnen:

$$\left.\begin{array}{l} 123456 \\ 163254 \\ 143652 \end{array}\right\} \text{III.} \qquad \left.\begin{array}{l} 143256 \\ 163452 \\ 123654 \end{array}\right\} \text{IV.}$$

90. Derselben Aufeinanderfolge der sechs geraden Linien, die wir durch (1), (2), (3), (4), (5) und (6) bezeichnet haben, entspricht einerseits ein sechsflächiger, der Fläche zugleich um- und eingeschriebener Körper und andrerseits ein auf derselben liegendes von jenen geraden Linien gebildetes Sechseck, in der Art, dass die Seiten-Ebenen des Körpers die Fläche in den Winkelpuncten des Sechsecks berühren. Es finden also die Sätze der letzten Nummern in ihrer sechsfachen Anwendung gleichzeitig Statt, wobei sie sich verschiedenartig durchkreuzen und in mannigfaltige Aussagen einkleiden lassen. Bei der grössern Anzahl der zu combinirenden Elemente ist die unmittelbare geometrische Anschauung schwer. An die Stelle von dieser und als diese vollständig vertretend, können wir die Anschauung unserer Symbole und die Verbindung derselben zu Gleichungen setzen. Diese Anschauung ist leicht und enthält in sich die Lösung der combinatorischen Schwierigkeiten, welche bei der geometrischen Anschauung ebenfalls fortfallen würden, wenn wir mit dem Auge der bildlichen Darstellung folgen könnten.

Wenn wir, der Symmetrie wegen,

$$\begin{array}{llll} v - u \equiv p, & (56) & w - u \equiv q, & (34) \\ v - t \equiv r, & (23) & w - t \equiv s, & (61) \end{array}$$

setzen, so ergibt sich die identische Doppel-Gleichung:

$$t - u \equiv p - r \equiv q - s,$$

deren Deutung den Satz der 87. Nummer enthält. Denn die gegenüberliegenden Seiten-Ebenen des dort betrachteten Körpers (123456) sind (t) und (u), (p) und (r), (q) und (s).

Die vorstehende identische Doppel-Gleichung erlaubt uns die folgenden drei linearen Gleichungen unter der nachbezeichneten doppelten Form zu schreiben:

---

sogleich ergibt, wenn wir erwägen, dass die fraglichen Puncte bezüglich als die Durchschnittspuncte der drei Ebenen (12), (45), (61), der drei Ebenen (12), (45), (56) und der drei Ebenen (23), (34), (56) angesehen werden können.

$$\left.\begin{aligned} q-p \equiv s-r &= 0, \\ q-t \equiv s-u &= 0, \\ p-t \equiv r-u &= 0. \end{aligned}\right\} \text{II. a.}$$

Von diesen drei Gleichungen ist jede eine algebraische Folge aus den beiden übrigen; es schneiden sich also die bezüglichen drei Ebenen in einer und derselben geraden Linie. Die doppelte Form dieser drei Gleichungen gibt nicht nur die vollständige geometrische Bestimmung der bezüglichen drei Ebenen, sondern auch ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie.

Die erste der drei Ebenen geht nämlich, einerseits, durch die Durchschnittslinie der Ebenen (p) und (q), das heisst, der Ebenen (43) und (56) und, andrerseits, durch die Durchschnittslinie der Ebenen (s) und (r) oder (23) und (61), woraus wir ersehen, dass sie keine andere als die Ebene (143256) ist. Die zweite Ebene geht durch die Durchschnittslinie von (34) und (21) und von (16) und (45) und ist mithin die Ebene (163452). Die dritte Ebene endlich ist (123654). Es schneiden sich also die drei Ebenen II, welche durch die vorstehenden Gleichungen dargestellt werden, in ein und derselben geraden Linie, die wir ebenfalls durch II bezeichnen wollen.

Ebenso schneiden sich, was aus der symmetrischen Bezeichnung unmittelbar hervorgeht, die drei Ebenen I in derselben geraden Linie, die wir wiederum durch I bezeichnen wollen. Wir können hiernach den Satz der 87. Nummer, dass jedem der sechs am Ende dieser Nummer unterschiedenen sechsflächigen Körper eine Ebene entspricht, welche die drei Durchschnittslinien der gegenüberliegenden Seiten-Flächen dieses Körpers enthält, nun dahin erweitern, dass die sechs Ebenen, welche sich auf diese Weise ergeben, zu drei und drei in denselben beiden geraden Linien sich schneiden.

Wenn wir die Seiten (2) und (4) mit einander vertauschen, so geht das System der Ebenen II in das System der Ebenen I über. Dieser Vertauschung aber entspricht eine gleichzeitige Vertauschung von t und w und von u und v. Hiernach ergeben sich zum Beispiel, statt der in der 87. Nummer zusammengestellten sechs Ebenen, die folgenden:

$$\begin{array}{llll} w = 0, & (14) & w-u \equiv q = 0, & (43) \qquad v-t \equiv r = 0, \quad (32) \\ v = 0, & (25) & v-u \equiv p = 0, & (56) \qquad w-t \equiv s = 0, \quad (61)\ ^*) \end{array}$$

und hieraus die identische Doppel-Gleichung:

---

*) Im Ganzen lassen sich neun verschiedene Ebenen durch zwei der Sechsecks-Seiten (1), (2), (3), (4), (5) und (6) legen. Die Gleichung einer dieser Ebenen, derjenigen nemlich, welche durch (3) und (6) geht, ist noch nicht bestimmt worden. Weil die bezügliche Ebene einerseits durch die Linie (3) geht, ist diese Gleichung eine algebraische Folge aus den Gleichungen (23) und (34) und hat hiernach die folgende Form:

$$t - v = \delta(u - w);$$

weil die bezügliche Ebene andrerseits die Linie (6) enthält, in welcher die beiden Ebenen (56) und (61) sich schneiden, so muss dieselbe Gleichung zugleich auch die folgende Form haben:

$$t - w = \delta'(u - v).$$

Die vorstehenden beiden Formen werden identisch, wenn wir die beiden unbestimmten Coefficienten δ und δ' beide der Einheit gleich nehmen und gehen dann in die folgende über:

$$t - u = v - w. \qquad (36)$$

$$w - v \equiv q - p \equiv s - r \text{ *)},$$

aus welcher endlich die folgenden Gleichungen unter doppelter Form sich ergeben:

$$\left.\begin{aligned} q - s &\equiv p - r = 0, \\ v + s &\equiv w + r = 0, \\ v + q &\equiv w + p = 0, \end{aligned}\right\} \text{I, a.}$$

welche die drei Ebenen I darstellen.

Entwickeln wir die vorstehenden Gleichungen I, a., so wie auch die Gleichungen II, a., so kommt:

$$\left.\begin{aligned} u &= t \\ t &= v + w \\ u &= v + w \end{aligned}\right\} \text{I, b.} \qquad \left.\begin{aligned} v &= w \\ w &= u + t \\ v &= u + t \end{aligned}\right\} \text{II, b.}$$

91. Wir können sogleich auf jeder der beiden geraden Linien I und II drei Puncte bestimmen, wobei wir nur die Coordinaten-Werthe derselben so auszuwählen brauchen, dass zwei, und also auch die dritte, der bezüglichen Gleichungen I, b. und II, b. durch dieselben befriedigt werden. Indem wir diese Coordinaten-Werthe zur Unterscheidung accentuiren, erhalten wir die nachstehende Bestimmung zweier Gruppen solcher drei Puncte, die bezüglich auf I und II liegen:

$$\left.\begin{aligned} u' = t' = 0, \quad v' &= -w' \\ w' = 0, \quad t' &= u' = v' \\ v' = 0, \quad t' &= u' = w' \end{aligned}\right\} \text{IV, a.} \qquad \left.\begin{aligned} v' = w' = 0, \quad u' &= -t' \\ t' = 0, \quad w' &= v' = u' \\ u' = 0, \quad w' &= v' = t' \end{aligned}\right\} \text{III, a.}$$

Wir wollen nach einander die Coordinaten-Werthe jedes dieser sechs Puncte in die folgende Gleichung:

$$u't + t'u = v'w + w'v,$$

welche die Polar-Ebene des jedesmaligen Punctes in Beziehung auf die gegebene Fläche der zweiten Ordnung darstellt (60), einsetzen. Alsdann ergeben sich, den drei auf der geraden Linie I liegenden Puncten IV, a. entsprechend, in gleicher Aufeinanderfolge genommen, die Gleichungen der drei Ebenen II, und den drei auf der geraden Linie II liegenden Puncten III, a. entsprechend, die Gleichungen der drei Ebenen I. Es folgt hieraus, dass die beiden geraden Linien I und II zugeordnete Polaren sind.

Wenn wir andrerseits dasjenige aufgeschriebene Viereck betrachten, das derselben Aufeinanderfolge der Seiten entspricht, als ein beliebiger der zugleich um- und eingeschriebenen sechsflächigen Körper, so ist der Durchschnittspunct der drei Diagonalen jenes Sechsecks der Pol derjenigen Ebene, welche die Durchschnittslinien der drei Paare gegenüberliegender Seiten-Ebenen dieses Körpers enthält. Die Pole der drei Ebenen I, oder die drei Puncte III, a., sind also, in derselben Ordnung genommen, keine andern als die Puncte III der 89. Nummer, und ebenso sind die Pole der drei Ebenen II, oder die drei Puncte IV, a., keine andern als die Puncte IV. Die Puncte III, so wie die Puncte IV, liegen also auf zwei geraden Linien, die bezüglich mit I und II, so wie also auch unter sich, zugeordnete Polaren sind. Die beiden geraden Linien I und IV sind hiernach beide zugeordnete

*) Die den unter einander identischen linearen Functionen $(w - v)$, $(q - p)$, $(s - r)$ entsprechende Ebene ist die erste der Ebenen II, so wie die den identischen linearen Functionen $(t - u)$, $(p - r)$, $(q - s)$ entsprechende Ebene die erste der Ebenen I ist.

Polaren von II und fallen folglich zusammen. Ebenso fallen II und III zusammen, weil beide zugeordnete Polaren von I sind.

92. Indem wir das Vorstehende zusammenfassen, gelangen wir zu folgenden Resultaten.

Sechs gerade Linien, welche zu drei und drei derselben Erzeugung einer gegebenen geradlinigen Fläche der zweiten Ordnung angehören, bestimmen

sechs der Fläche zugleich ein und umgeschriebene Körper;
die drei Paare gegenüberliegender Seiten-Ebenen jedes dieser Körper schneiden sich in drei geraden Linien, welche in derselben Ebene liegen; solcher Ebenen (A) erhalten wir also sechs;
diese sechs Ebenen schneiden sich zu drei in denselben beiden geraden Linien (B);

sechs der Fläche aufgeschriebene Sechsecke;
die drei Diagonalen jedes dieser Sechsecke schneiden sich in demselben Puncte; solcher Puncte (a) erhalten wir also sechs;
diese sechs Puncte liegen zu drei auf denselben beiden geraden Linien (b);

die sechs Puncte (a) sind, in Beziehung auf die gegebene Fläche, die Pole der sechs Ebenen (A);

die beiden geraden Linien (b) fallen mit den beiden geraden Linien (B) zusammen und sind, wie diese, zwei zugeordnete Polaren.

93. Wir wollen noch einige Bemerkungen über die geometrische Construction und die geometrischen Beziehungen der beiden zugeordneten Polaren hinzufügen.

Im Ganzen können wir durch die sechs gegebenen geraden Linien (1), (2), (3), (4), (5) und (6), paarweise genommen, neun Ebenen legen und diese auf nachstehende zwiefache Weise in drei Gruppen von drei zusammenstellen:

$$\left.\begin{matrix} 14\ 36\ 54 \\ 12\ 34\ 56 \\ 23\ 45\ 61 \end{matrix}\right\} \text{III, b.} \qquad \left.\begin{matrix} 12\ 54\ 36 \\ 14\ 32\ 56 \\ 43\ 25\ 61 \end{matrix}\right\} \text{IV, b.}$$

Bei jedem der sechs sechsflächigen Körper, die durch die gegebenen sechs geraden Linien bestimmt werden, können wir, nach ihrer Aufeinanderfolge, drei der Seiten-Ebenen als die ungeraden, und die drei übrigen als die geraden bezeichnen und dann drittens noch durch die drei Paare gegenüberliegender Seiten drei Ebenen legen. Diese drei Gruppen von Ebenen sind für die drei Körper I dieselben und zwar die drei Gruppen III, b; für die verschiedenen einzelnen Körper vertauschen sich bloss die drei Gruppen unter einander. Jedem der drei Körper II entsprechend, erhalten wir die drei Gruppen IV, b. Der Durchschnitt der drei Ebenen jeder Gruppe bestimmt einen Punct, so dass wir zwei Gruppen von drei Puncten III, b. und IV, b. erhalten. Die Coordinaten-Werthe dieser Puncte können wir nach dem Vorstehenden unmittelbar hinschreiben und finden alsdann, dass sie, in derselben Ordnung genommen, mit den Coordinaten-Werthen der zweimal drei Puncte III, a., und IV, a. übereinstimmen. Die fraglichen Puncte sind also die Durchschnittspuncte der drei Diagonalen in den sechs Sechsecken III und IV.

Auf analoge Weise können wir die neun Durchschnittspuncte derselben sechs auf der Fläche liegenden geraden Linien auf zwiefache Weise in drei Gruppen zu drei zusammenstellen.

14	*36*	*54*		*12*	*54*	*36*	
12	*34*	*56*	I, c.	*14*	*32*	*56*	II, c.
23	*45*	*61*		*43*	*25*	*61*	

Durch jedes der sechs Sechsecke III und IV sind drei Ebenen bestimmt, von welchen eine durch die drei ungeraden, eine zweite durch die drei geraden Winkelpuncte geht und die dritte die drei Durchschnittspuncte der drei gegenüberliegenden Seiten enthält. Für die drei Sechsecke III sind diese drei Ebenen (nur in verschiedener Aufeinanderfolge) dieselben, nemlich die drei Ebenen I, c.; für die drei Sechsecke IV sind diese Ebenen die drei Ebenen II, c. Die Ebenen I, c. und II, c. sind aber bezüglich keine andern als die Ebenen I und II. Um dieses geradezu zu beweisen, wollen wir Beispielsweise die zweite der Ebenen I, c. nehmen, welche die drei Puncte (89)

$\{t = w = v = 0\}$, (*12*) $\{u = w = 0, v = t\}$, (*34*) $\{u = v = 0, t = w\}$, (*56*)

enthält und für deren Gleichung wir hiernach die folgende erhalten:

$$t = w + v,$$

welche keine andere ist, als die zweite der Gleichungen I, b. und folglich die zweite der Ebenen I darstellt.

Das Vorstehende können wir in folgende Aussage zusammenfassen.

Wenn wir sechs auf einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung liegende gerade Linien in irgend einer bestimmten der sechs in Rede stehenden möglichen Aufeinanderfolgen nehmen:

so liegen in dem bezüglichen sechsflächigen Körper die Durchschnittspuncte 1°. der drei ungeraden Seiten-Ebenen, 2°., der drei geraden Seiten-Ebenen, und 3°. derjenigen drei Ebenen, welche durch die gegenüberliegenden Kanten-Paare gehen, alle drei auf derselben geraden Linie;

so schneiden sich diejenigen Ebenen, welche 1°. durch die drei ungeraden Eckpuncte des bezüglichen Sechsecks, 2°. durch die drei geraden Eckpuncte, und 3°. durch die drei Durchschnittspuncte der gegenüberliegenden Seiten gehen, alle drei in derselben geraden Linie;

diese beiden geraden Linien sind zugeordnete Polaren.

§. 6.

Vollständige Bestimmung der Flächen zweiter Ordnung. Richtung und Grösse ihrer Axen. Identische und ähnliche Flächen.

94. Die Unterscheidung der Flächen, in so fern sie auf das Reelle und Imaginäre und darauf sich bezieht, ob dieselben durch die Bewegung einer geraden Linie beschrieben werden können oder nicht, eine Unterscheidung, die wir eine collineare genannt haben, verlangt durchaus keine Particularisation in der Bestimmung der linearen Punct- oder Plan-Coordinaten. Alle allgemeinen Eigenschaften der Fläche, namentlich solche, welche sich auf eine Beschreibung derselben durch eine gerade Linie beziehen, lassen sich aus der allgemeinen homogenen Gleichung des zweiten Grades zwischen vier linearen und ganzen Functionen ableiten. Sobald aber bei der Unterscheidung der

Flächen und der Discussion ihrer Eigenschaften das Unendliche maassgebend hervortritt, wird dadurch eine nähere Coordinaten-Bestimmung nothwendig und in der homogenen Gleichung zwischen den vier linearen Functionen muss alsdann eine dieser letztern, als Function der drei übrigen, gegeben sein, oder, was hiermit auf dasselbe hinauskommt, wir müssen die allgemeine Gleichung zwischen drei linearen Functionen zu Grunde legen. Diese speciellere Bestimmung haben wir als eine affine, in dem Sinne, wie dies Wort von Euler zuerst gebraucht worden ist, bezeichnet. Wollen wir noch weiter particularisiren, wollen wir z. B. ein Ellipsoid von einem andern, ein ein- oder zweischaliges Hyperboloid von einem andern unterscheiden, wollen wir absolute Grössen-Bestimmungen machen und Winkel-Beziehungen betrachten, so müssen wir die drei linearen Functionen vollständig bestimmen, so dass sie auch keinen unbestimmten Coefficienten mehr einschliessen dürfen. Hier bietet unter den Punct-Coordinaten-Systemen das System der gewöhnlichen Parallel-Coordinaten und unter den Plan-Coordinaten-Systemen das System der 3. Nummer (Einl.) die grösste Bequemlichkeit dar.

Die Eigenschaften der Pole und Polaren knüpfen sich an die collinearen Coordinaten-Bestimmungen. Hierbei treten zugeordnete Durchmesser nicht als solche hervor, sondern stellen sich nur als drei gerade Linien dar, welche überhaupt die Eigenschaft besitzen, dass der Pol derjenigen Ebene, welche durch irgend zwei derselben sich legen lässt, auf der jedesmaligen dritten liegt; aber es lässt sich nicht ausdrücken, dass der Pol auf dieser dritten Linie unendlich weit liegt, und die drei fraglichen Linien in dem Mittelpuncte der Fläche sich schneiden. Diese Unterscheidungen fordern eine affine Coordinaten-Bestimmung. Drei zugeordnete Durchmesser, welche paarweise auf einander senkrecht stehen, heissen Axen der Fläche. Um diese Axen der Fläche, der Richtung und Grösse nach, zu bestimmen, ist eine weitere Particularisation der Coordinaten-Annahme erforderlich.

95. Wir wollen voraussetzen, dass die Gleichung der Fläche in rechtwinkligen Parallel-Coordinaten gegeben oder dass die ursprünglich gegebene Gleichung in eine solche verwandelt worden sei, und demnach für diese Gleichung die folgende nehmen:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0. \qquad (1)$$

Ferner wollen wir die Bezeichnungen des ersten Paragraphen dieses Abschnitts und namentlich der 10. Nummer auch in dem Folgenden beibehalten.

Die Coordinaten des Mittelpunctes der Fläche sind hiernach (45):

$$x = \alpha = \frac{\Delta_{03}}{\Theta_3}, \quad y = \beta = \frac{\Delta_{13}}{\Theta_3}, \quad z = \gamma = \frac{\Delta_{23}}{\Theta_3}, \qquad (2)$$

und um in diesen Mittelpunct den Anfangspunct der Coordinaten zu verlegen, brauchen wir bloss x, y und z bezüglich mit $x+\alpha$, $y+\beta$, $y+\gamma$ zu vertauschen. Alsdann ergibt sich:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz = M, \qquad (3)$$

wobei wir

$$M = -\frac{\Phi}{\Theta_3}$$

setzen. Wenn Φ und also auch M verschwindet, so stellt die allgemeine Gleichung (1) einen Kegel oder einen Punct dar; sie stellt ein Paraboloid dar, wenn Θ_3 verschwindet, wodurch

indem M unendlich gross wird, die Gleichung (3) ihre Geltung verliert; ferner einen Cylinder, wenn Θ_3 verschwindet, zugleich aber Factor von Φ wird, wonach M wieder einen endlichen Werth:

$$M = -\frac{\Theta_2}{\Xi_2},$$

erhält. Wenn überdiess auch noch Θ_2 und also auch M verschwindet, so stellt die allgemeine Gleichung ein System von zwei Ebenen dar. Wenn Ξ_2 verschwindet, so stellt sie einen parabolischen Cylinder dar; die Gleichung (3) verliert alsdann wieder ihre Geltung, weil M unendlich wird. Sie erhält diese Geltung wieder, wenn dadurch, dass Ξ_2 ein Factor von Θ_2 wird, beide Ausdrücke gleich, zeitig verschwinden; dann kommt: $M = -\frac{Y}{A}$,

und die allgemeine Gleichung stellt ein System von zwei parallelen Ebenen dar, die zusammenfallen, wenn Y verschwindet.

96. Zur Bestimmung der drei Coordinaten des Mittelpunctes erhalten wir, in Gemässheit der 2. Nummer, die folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{d\Omega}{dx} = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dy} = 0, \qquad \frac{d\Omega}{dz} = 0, \tag{4}$$

oder, entwickelt:

$$\begin{aligned} Ax + B''y + B'z + C &= 0, \\ B''x + A'y + Bz + C' &= 0, \\ B'x + By + A''z + C'' &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Jede dieser Gleichungen, für sich, stellt eine Ebene dar, die durch den Mittelpunct geht, so dass dieser als der Durchschnitt dreier Diametral-Ebenen bestimmt wird und zwar derjenigen drei, deren zugeordnete Durchmesser den drei Coordinaten-Axen parallel sind. Es ergibt sich diess unmittelbar, wenn wir in der Gleichung:

$$x'.\frac{d\Omega}{dx} + y'.\frac{d\Omega}{dy} + z'.\frac{d\Omega}{dz} + 2\,(Cx + C'y + C''z + D) = 0,$$

welche die Polar-Ebene eines beliebig angenommenen Punctes (x', y', z') in Beziehung auf die Fläche darstellt (Einl. Betr. 15), nach einander x', y', und z' unendlich gross nehmen, wonach dieselbe in die drei Gleichungen (4) übergeht. Zugleich sehen wir, dass

$$Cx + C'y + C''z + D = 0 \tag{6}$$

die Gleichung der Polar-Ebene des Anfangspunctes der Coordinaten ist.

Für den Fall des Kegels und ellipsoidischen Punctes bestimmt sich der Mittelpunct ganz auf gleiche Weise. Weil indess die Polar-Ebene jedes beliebig angenommenen Punctes, mithin auch des Anfangspunctes der Coordinaten, hier durch den Mittelpunct geht, so besteht zugleich mit den Gleichungen (5) nothwendig auch die Gleichung (6); ein Umstand, auf den wir bald noch einmal zurückkommen werden.

In dem Falle der beiden Paraboloide sind die Durchschnittslinien je zweier der drei Ebenen (5) parallel. Die Richtung dieser Linien ist die gemeinsame Richtung der Durchmesser der Paraboloide, nämlich derjenigen Richtung, nach welcher der Mittelpunct unendlich weit gerückt ist.

In dem Falle des elliptischen und hyperbolischen Cylinders schneiden sich die drei Ebenen (5) in derselben geraden Linie, dem geometrischen Orte für den Mittelpunct. Diese gerade Linie ist offenbar den Seiten des Cylinders parallel.

In dem Falle, dass der Cylinder in ein System von zwei reellen oder zwei imaginären Ebenen ausartet, ändert sich in diesen Beziehungen nichts. Nur bestehen alsdann die Gleichungen (5) und (6) wiederum gleichzeitig (53).

Wenn der Cylinder insbesondere ein parabolischer ist, so sind die drei Ebenen (5) unter einander parallel und die Linie der Mittelpuncte ist, parallel mit ihnen, unendlich weit gerückt. Wollen wir dieser Linie auch in unendlicher Entfernung eine bestimmte Richtung beilegen, so müssen wir sie, indem wir den parabolischen Cylinder als Uebergang zwischen dem elliptischen und hyperbolischen Cylinder betrachten, den Seiten des Cylinders parallel nehmen.

In dem Falle zweier parallelen Ebenen fallen die drei Ebenen (5) in eine einzige Ebene zusammen, welche in der Mitte zwischen den beiden parallelen Ebenen hindurchgeht. Diese Ebene ist der Ort für den Mittelpunct.

Wenn endlich die beiden Ebenen zusammenfallen, so fallen mit ihnen auch die Ebenen (5), so wie die Ebene (6) zusammen.

97. Wir können auf eine nicht unelegante Weise, statt durch Bedingungs-Gleichungen zwischen den Constanten der allgemeinen Gleichung, auch durch identische Gleichungen die Unterarten von Flächen der zweiten Ordnung bestimmen. Diese Bestimmung wollen wir um so lieber hier einschalten, weil manche der spätern Entwicklungen dadurch einfacher und symmetrischer wird.

Der Kegel (und der ellipsoidische Punct) ist dadurch characterisirt, dass, indem wir die allgemeine homogene Gleichung zwischen den vier Punct-Coordinaten p, q, r, s zu Grunde legen und durch

$$\Omega = 0 \tag{7}$$

darstellen, gleichzeitig

$$\frac{d\Omega}{dp} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dq} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dr} = 0, \quad \frac{d\Omega}{ds} = 0, \tag{8}$$

oder, was dasselbe bedeutet, dass folgende identische Gleichung:

$$\lambda . \frac{d\Omega}{dp} + \mu . \frac{d\Omega}{dq} + \nu . \frac{d\Omega}{dr} + \frac{d\Omega}{ds} \equiv 0, \tag{9}$$

besteht, in welcher λ, μ und ν drei noch zu bestimmende Constanten bedeuten. Denn in Folge dieser Gleichung verschwindet jeder der vier partiellen Differential-Coefficienten, wenn die drei andern, durch gehörige Bestimmung der Werthe der drei Veränderlichen $\frac{p}{s}$, $\frac{q}{s}$, $\frac{r}{s}$, gleichzeitig Null werden. Diese Werthe sind diejenigen, welche dem Mittelpuncte des Kegels entsprechen. Wir können aber, in Gemässheit des bekannten Satzes über homogene Functionen, die Gleichung (7) auch folgendergestalt schreiben:

$$p . \frac{d\Omega}{dp} + q . \frac{d\Omega}{dq} + r . \frac{d\Omega}{dr} + s . \frac{d\Omega}{ds} = 0.$$

Beziehen wir diese Gleichung auf den Mittelpunct des Kegels, so kommt:

$$\alpha . \frac{d\Omega}{dp} + \beta . \frac{d\Omega}{dq} + \gamma . \frac{d\Omega}{dr} + \frac{d\Omega}{ds} = 0,$$

indem sie sogleich in vier Gleichungen von der Form der Gleichungen (8) sich auflöset, woraus unmittelbar folgt, dass sie eine identische ist und es auch für jede beliebige Annahme der Veränderlichen bleibt, und dann keine andere sein kann, als eben die identische Gleichung (9), in der also

$$\lambda = \alpha, \quad \mu = \beta, \quad \nu = \gamma.$$

Diese Gleichung wird hiernach, indem wir zugleich für α, β und γ ihre Werthe einsetzen:

$$\Delta_{03} \cdot \frac{d\Omega}{dp} + \Delta_{13} \cdot \frac{d\Omega}{dq} + \Delta_{23} \cdot \frac{d\Omega}{dr} + \Theta_3 \cdot \frac{d\Omega}{ds} \equiv 0. \tag{10}$$

Wir können den Gegenstand, der uns beschäftigt, noch von einem etwas andern Gesichtspuncte aus betrachten. Es stellt nemlich die Gleichung (9), wenn λ, μ und ν Werthe der drei Veränderlichen bedeuten, welche irgend einem Puncte der Fläche (7) angehören, die Tangential-Ebene in diesem Puncte dar. Wenn aber die Fläche ein Kegel ist und für den Punct auf ihr der Mittelpunct (ein singulärer Punct der Fläche) genommen wird, so kann die Tangential-Ebene jede beliebige Richtung haben: ihre Gleichung muss demnach eine identische werden, und diese identische Gleichung ist die in Rede stehende, wodurch also der Kegel als eine solche Fläche characterisirt ist, die einen singulären Punct hat.

Nehmen wir insbesondere gewöhnliche Parallel-Coordinaten, indem wir $p \equiv x$, $q \equiv y$, $r \equiv z$, $s \equiv 1$ setzen, so tritt die Gleichung (1) an die Stelle der Gleichung (7) und es verwandelt sich die identische Gleichung (10) in die folgende:

$$\Delta_{03} \cdot \frac{d\Omega}{dx} + \Delta_{13} \cdot \frac{d\Omega}{dy} + \Delta_{23} \cdot \frac{d\Omega}{dz} + 2\Theta_3 (Cx + C'y + C''z + D) \equiv 0. \tag{11}$$

98. Wir wollen ferner den Fall der beiden Paraboloide hervorheben, der durch das Verschwinden von Θ_3 bedingt wird. Diese Bedingung ist damit gleichbedeutend, dass, indem wir die sechs ersten Glieder der Gleichung (1), oder, was damit gleichbedeutend ist, den ersten Theil der Gleichung (3) durch $\Omega_,$ bezeichnen, gleichzeitig:

$$\frac{d\Omega_,}{dx} = 0, \quad \frac{d\Omega_,}{dy} = 0, \quad \frac{d\Omega_,}{dz} = 0, \tag{12}$$

was wir auch durch die folgende identische Gleichung:

$$\lambda' \cdot \frac{d\Omega_,}{dx} + \mu' \cdot \frac{d\Omega_,}{dy} + \frac{d\Omega_,}{dz} = 0, \tag{13}$$

in der λ' und μ' zwei gehörig zu bestimmende Constanten bedeuten, ausdrücken können (4. Nummer). Entwickeln wir die vorstehenden partiellen Differential-Coefficienten, so kommt gleichzeitig:

$$\begin{aligned} Ax &+ B''y + B'z = 0, \\ B''x &+ A'y + Bz = 0, \\ B'x &+ By + A''z = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

oder, wenn wir für $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ bezüglich α' und β' schreiben und zugleich der Kürze halber g, h und k einführen:

$$\begin{aligned} A\alpha' &+ B''\beta' + B' \equiv g = 0, \\ B''\alpha' &+ A'\beta' + B \equiv h = 0, \\ B'\alpha' &+ B\beta' + A'' \equiv k = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Diese drei letzten Gleichungen bestehen also ebenfalls gleichzeitig und geben dann, wie in der 4. Nummer:

$$\alpha' = -\frac{\Psi_{13}}{\Xi_2}, \quad \beta' = -\frac{\Psi_{03}}{\Xi_2},$$

wodurch die Durchmesser-Richtung der Paraboloide gegeben ist. Statt der obigen identischen Gleichung können wir hiernach auch die folgende nehmen:

$$\lambda' g + \mu' h + k \equiv 0.$$

Damit diese identische Gleichung bestehe, müssen, nachdem wir für g, h und k ihre Werthe substituirt haben, die Coefficienten von α' und β', so wie das von ihnen unabhängige Glied, verschwinden, wonach

$$\begin{aligned} A\lambda' + B''\mu' + B' &= 0, \\ B''\lambda' + A'\mu' + B &= 0, \\ B'\lambda' + B\mu' + A'' &= 0. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen geben für λ' und μ' dieselben Werthe, als die frühern drei Gleichungen für α' und β'. Es ist also:

$$\lambda' = \alpha' = -\frac{\Psi_{13}}{\Xi_1}, \qquad \mu' = \beta' = -\frac{\Psi_{03}}{\Xi_2},$$

oder auch, in Gemässheit der ersten der Gleichungen IV a. der 9. Nummer:

$$\lambda' = \alpha' = \frac{\Psi_{23}}{\Psi_{03}}, \qquad \mu' = \beta' = \frac{\Psi_{23}}{\Psi_{13}}. \tag{16}$$

Wir erhalten hiernach:

$$\frac{g}{\Psi_{03}} + \frac{h}{\Psi_{13}} + \frac{k}{\Psi_{23}} \equiv 0, \tag{17}$$

$$\frac{\frac{d\Omega_,}{dx}}{\Psi_{03}} + \frac{\frac{d\Omega_,}{dy}}{\Psi_{13}} + \frac{\frac{d\Omega_,}{dz}}{\Psi_{23}} \equiv 0. \tag{18}$$

Um in die letzte identische Gleichung, indem wir uns wieder auf die Gleichung (1) zurückbeziehen, Ω statt $\Omega_,$ einzuführen, erhalten wir:

$$\frac{d\Omega_,}{dx} = \frac{d\Omega}{dx} - 2C, \qquad \frac{d\Omega_,}{dy} = \frac{d\Omega}{dy} - 2C', \qquad \frac{d\Omega_,}{dz} = \frac{d\Omega}{dz} - 2C'',$$

wonach die fragliche Gleichung in die folgende übergeht:

$$\frac{\frac{d\Omega}{dx} - 2C}{\Psi_{03}} + \frac{\frac{d\Omega}{dy} - 2C'}{\Psi_{13}} + \frac{\frac{d\Omega}{dz} - 2C''}{\Psi_{23}} \equiv 0. \tag{19}$$

Diese identische Gleichung ist diejenige, welche zu entwickeln war. Bei der Entwickelung derselben hätten wir auch auf analoge Weise, wie in der vorigen Nummer verfahren können, haben aber den ausführlicheren Weg vorgezogen.

Aus den Gleichungen (16) können wir die folgende Doppel-Gleichung:

$$\Psi_{03} \cdot x = \Psi_{13} \cdot y = \Psi_{23} \cdot z \tag{20}$$

ableiten, indem wir für α' und β' ihre Werthe in x, y und z wieder einsetzen. Durch diese Gleichung ist die Durchmesser-Richtung der Paraboloide gegeben.

99. In dem Falle des elliptischen und hyperbolischen Cylinders löset sich die identische Gleichung (19) in die folgenden beiden auf:

$$\frac{\frac{d\Omega}{dx}}{\Psi_{03}} + \frac{\frac{d\Omega}{dy}}{\Psi_{13}} + \frac{\frac{d\Omega}{dz}}{\Psi_{23}} \equiv 0, \tag{21}$$

$$\frac{C}{\Psi_{03}} + \frac{C'}{\Psi_{13}} + \frac{C''}{\Psi_{23}} = 0, \tag{22}$$

von welchen die letztere ausdrückt, dass neben Θ_3 auch Φ verschwindet. (19. Nummer.)

Je zwei der drei Gleichungen (5) können wir als Gleichung für die Linie der Mittelpuncte des Cylinders nehmen (96), und aus den beiden erstern derselben, indem wir nach einander y und x eliminiren, insbesondere auch die folgenden beiden ableiten:

$$\begin{aligned} \Xi_2 . x + \Psi_{13} . z + \Psi_{12} &= 0, \\ \Xi_2 . y + \Psi_{03} . z + \Psi_{02} &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Die Richtung der Linie der Mittelpuncte bestimmt sich auf dieselbe Weise, als durch die Gleichungen (20) die Durchmesser-Richtung der Paraboloide bestimmt worden ist.

100. In dem Falle des parabolischen Cylinders sind die, durch die drei Gleichungen (5) dargestellten, Diametral-Ebenen parallel, also die Gleichungen (14) identisch, und es ergibt sich hiernach, mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung, indem wir durch δ, δ' und δ'' drei gehörig zu bestimmende Constanten bezeichnen:

$$\delta . \frac{d\Omega_,}{dx} \equiv \delta' . \frac{d\Omega_,}{dy} \equiv \delta'' . \frac{d\Omega_,}{dz}.$$

Multipliciren wir die ersten Theile der Gleichungen (15) bezüglich mit B, B′ und B″, so werden sie unter einander und mit folgendem Ausdrucke:

$$BB'B''\left(\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''}\right), \tag{24}$$

identisch, wenn wir zugleich auf die, diesem Falle entsprechenden, Bedingungen, dass Ψ_{03}, Ψ_{13} und Ψ_{23} verschwinden, Rücksicht nehmen. Es ist also:

$$\delta = B, \qquad \delta' = B', \qquad \delta'' = B'',$$

so dass wir zwei der drei diesen Fall characterisirenden Bedingungen durch die identische Doppel-Gleichung:

$$B . \frac{d\Omega_,}{dx} \equiv B' . \frac{d\Omega_,}{dy} \equiv B'' . \frac{d\Omega_,}{dz}, \tag{25}$$

ersetzen können, welche, wenn wir sie auf die ursprüngliche allgemeine Gleichung (1) beziehen, die folgende Form annimmt:

$$B\left(\frac{d\Omega}{dx} - 2C\right) \equiv B'\left(\frac{d\Omega}{dy} - 2C'\right) \equiv B''\left(\frac{d\Omega}{dz} - 2C''\right). \tag{26}$$

Die Richtung der Seiten des parabolischen Cylinders können wir als die Richtung der Durchschnittslinie einer Diametral-Ebene desselben mit der Polar-Ebene irgend eines beliebigen Punctes construiren. Zur Bestimmung dieser Richtung erhalten wir hiernach die folgenden beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''} &= 0, \\ Cx + C'y + C''z &= 0, \end{aligned}$$

und, wenn wir nach einander y und x eliminiren, die folgende Doppel-Gleichung:

$$\frac{x}{B(B'C'-B''C'')} = \frac{y}{B'(B''C''-BC)} = \frac{z}{B''(BC-B'C')} \tag{27}$$

101. In dem Falle zweier parallelen Ebenen sind die drei Diametral-Ebenen nicht nur parallel, sondern sie fallen auch zusammen. Die Form der identischen Doppel-Gleichung (26) muss sich hiernach nothwendig ändern, und diese Gleichung, in Folge dieser Aenderung, auf:

$$B.\frac{d\Omega}{dx} \equiv B'.\frac{d\Omega}{dy} \equiv B''.\frac{d\Omega}{dz} \tag{28}$$

reduciren, was zugleich die doppelte Bedingungs-Gleichung:

$$BC = B'C' = B''C'' \tag{29}$$

mit sich bringt.

Indem wir dem Ausdrucke (24) noch das Glied BC hinzufügen und ihn dann gleich Null setzen, ergibt sich:

$$\frac{x}{B}+\frac{y}{B'}+\frac{z}{B''}+\frac{C}{B'B''} = 0, \tag{30}$$

für die Gleichung derjenigen Ebene, die der geometrische Ort der Mittelpuncte ist, und in welche alle Diametral-Ebenen zusammenfallen.

102. Wir haben bisher denjenigen Fall noch nicht erörtert, dass die dargestellte Fläche überhaupt in ein System von zwei Ebenen übergeht. Dann gehen (wir wollen uns wieder zu der allgemeinen homogenen Function von p, q, r und s zurückwenden) je drei der vier Ebenen (11) durch dieselbe gerade Linie, was identische Gleichungen von folgender Form bedingt:

$$\lambda'.\frac{d\Omega}{dp}+\mu'.\frac{d\Omega}{dq}+\frac{d\Omega}{dr} \equiv 0, \qquad \lambda''.\frac{d\Omega}{dp}+\mu''.\frac{d\Omega}{dq}+\frac{d\Omega}{ds} \equiv 0,$$

$$\lambda'''.\frac{d\Omega}{dp}+\mu'''.\frac{d\Omega}{dr}+\frac{d\Omega}{ds} \equiv 0, \qquad \lambda''''.\frac{d\Omega}{dq}+\mu''''.\frac{d\Omega}{dr}+\frac{d\Omega}{ds} \equiv 0.$$

Wir können die beiden Constanten in jeder dieser vier identischen Gleichungen durch Entwickelung dieser Gleichungen unmittelbar bestimmen. Doch können wir uns dieser Entwickelung überheben, weil λ' und μ' offenbar dieselbe Bedeutung, als in der 99. Nummer haben, und aus diesen durch blosse Marken-Vertauschung die übrigen Constanten sich ergeben. Auf diese Weise ergibt sich unmittelbar:

$$\frac{\frac{d\Omega}{dp}}{\Psi_{03}}+\frac{\frac{d\Omega}{dq}}{\Psi_{13}}+\frac{\frac{d\Omega}{dr}}{\Psi_{23}} \equiv 0, \qquad \frac{\frac{d\Omega}{dp}}{\Psi_{02}}+\frac{\frac{d\Omega}{dq}}{\Psi_{12}}+\frac{\frac{d\Omega}{ds}}{\Psi_{32}} \equiv 0,$$

$$\frac{\frac{d\Omega}{dp}}{\Psi_{01}}+\frac{\frac{d\Omega}{dr}}{\Psi_{21}}+\frac{\frac{d\Omega}{ds}}{\Psi_{31}} \equiv 0, \qquad \frac{\frac{d\Omega}{dq}}{\Psi_{10}} = \frac{\frac{d\Omega}{dr}}{\Psi_{20}}+\frac{\frac{d\Omega}{ds}}{\Psi_{30}} \equiv 0. \tag{31}$$

Stellen wir die Gleichung der Fläche, indem wir uns gewöhnlicher Parallel-Coordinaten bedienen, wiederum durch die Gleichung (1) dar, so brauchen wir bloss in den vorstehenden identischen

Gleichungen die vier partiellen Differential-Coefficienten $\frac{d\Omega}{dp}$, $\frac{d\Omega}{dq}$, $\frac{d\Omega}{dr}$ und $\frac{d\Omega}{ds}$ bezüglich durch $\frac{d\Omega}{dx}$, $\frac{d\Omega}{dy}$, $\frac{d\Omega}{dz}$ und $2(Cx+C'y+C''z+D)$ zu ersetzen.

Zur Bestimmung der Durchschnittslinie der beiden Ebenen des Systems erhalten wir die Gleichungen (23), welche wir in der 99. Nummer überhaupt zur Bestimmung der Mittelpunctslinie für den Cylinder erhalten haben. Diese Gleichungen können wir hier, in Folge der 1. und 4. der identischen Gleichungen VII der 10. Nummer, auch folgendergestalt schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\Psi_{10}}+\frac{z}{\Psi_{12}}+\frac{1}{\Psi_{13}} &= 0, \\ \frac{y}{\Psi_{01}}+\frac{z}{\Psi_{02}}+\frac{1}{\Psi_{03}} &= 0; \end{aligned} \tag{32}$$

Wenn die beiden Ebenen des Systems zusammenfallen, so geschieht diess in der durch (30) dargestellten Ebene.

103. Wir wollen in den nachstehenden Entwickelungen den allgemeinen Fall, dass die Fläche einen Mittelpunct und zwar einen einzigen hat, zuerst betrachten und hierbei die Gleichung

$$\Omega_1 = M \tag{1}$$

zu Grunde legen.

Wenn wir, nach beliebiger Richtung, die gegebene Fläche der zweiten Ordnung durch parallele Ebenen schneiden, so liegen die Mittelpuncte der Durchschnitts-Curven in allen diesen Ebenen auf einem Durchmesser der Fläche, und wenn dieser Durchmesser auf den Schnitt-Ebenen senkrecht steht, so ist er eine Axe der Fläche. Um die Richtung einer solchen Axe zu finden, brauchen wir also nur eine übrigens beliebige Schnitt-Ebene so zu führen, dass ein vom Mittelpunct der Fläche auf diese Ebene gefälltes Perpendikel den Mittelpunct der Durchschnitts-Curve trifft.

Es sei

$$z+by+ax = c \tag{2}$$

die Gleichung einer solchen Schnitt-Ebene, dann sind die Gleichungen des vom Mittelpuncte auf diese Ebene gefällten Perpendikels, wie bekannt:

$$x = az, \qquad y = bz. \tag{3}$$

Unsere Aufgabe ist, die analytischen Bedingungen zu entwickeln, unter welchen dieses Perpendikel den Mittelpunct der Durchschnitts-Curve in der Ebene (3) trifft. Um zuvörderst diesen Mittelpunct zu bestimmen, brauchen wir bloss die Gleichung der Fläche (2) einmal in Beziehung auf x, das andere Mal in Beziehung auf y zu differentiiren und hierbei, in Folge der Gleichung (3), z als Function von x und y zu betrachten, wonach

$$\frac{dz}{dx} = -a, \qquad \frac{dz}{dy} = -b.$$

Auf diese Weise ergeben sich unmittelbar die folgenden beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} (Ax+B''y+B'z)-(B'x+By+A''z)a &= 0, \\ (B''x+A'y+Bz)-(B'x+By+A''z)b &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

welche eine gerade Linie darstellen, die durch den Mittelpunct der Fläche geht und die Ebene (3) in dem Mittelpunct der Durchschnitts-Curve schneidet. Zugleich mit diesen Gleichungen müssen also die beiden Gleichungen (4) bestehen, wenn die bezügliche gerade Linie eine Axe der Fläche sein soll. Eliminiren wir hiernach zwischen den genannten vier Gleichungen $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}(Aa+B''b+B')-(B'a+Bb+A'')a&=0,\\(B''a+A'b+B)-(B'a+Bb+A'')b&=0.\end{aligned}\qquad(5)$$

Wenn wir eine der beiden Unbekannten, b oder a, zwischen den beiden vorstehenden Gleichungen eliminiren, so erhalten wir zur Bestimmung der andern eine Gleichung des dritten Grades. Es ergeben sich also drei Werthenpaare für b und a, wodurch die Richtungen der drei Axen gegeben sind. Von diesen Richtungen ist offenbar eine reell, und es ist leicht zu zeigen, dass die beiden andern es ebenfalls sind. Wenn wir zu diesem Ende annehmen, dass die reelle Axenrichtung mit der Axe der z zusammenfalle, so müssen die beiden Gleichungen (5) befriedigt werden, wenn b und a gleichzeitig verschwinden. Diess fordert

$$B=0,\qquad B'=0.$$

Dann reduciren sich aber gleichzeitig diese Gleichungen beide auf den ersten Grad was anzeigt, dass ein zweites Werthenpaar von b und a unendlich wird (wir erkennen auch unmittelbar, dass alsdann die Gleichungen (5) befriedigt werden, wenn wir gleichzeitig $\frac{1}{b}=0$ und $\frac{1}{a}=0$ setzen) und dass also eine zweite Axe in die Ebene xy fällt. Die auf den ersten Grad reducirten Gleichungen (5):

$$\begin{aligned}(A-A'')a+B''b&=0,\\B''a+(A'-A'')b&=0,\end{aligned}$$

werden aber nur befriedigt, wenn a und b beide verschwinden oder beide unendlich gross werden. Die dritte Axe kann hiernach also nur entweder ebenfalls in der Ebene xy liegen oder mit der Axe der z susammenfallen. Den letztern dieser beiden Fälle können wir sogleich als unstatthaft ausschliessen. Um hiernach die Richtung der beiden in der Ebene der xy liegenden Axen zu bestimmen, brauchen wir aus den Gleichungen (5) bloss die folgende abzuleiten:

$$(Aa+B''b+B')b-(B''a+A'b+B)a=0,$$

welche, durch das Verschwinden von B und B', auf die Gleichung:

$$B''\left(\frac{b}{a}\right)^2-(A'-A)\frac{b}{a}-B''=0,\qquad(6)$$

sich reducirt und anzeigt, dass diese beiden Axen reell sind und auf einander senkrecht stehen.

Die letzten analytischen Erörterungen können wir durch einfache geometrische ersetzen und zeigen, dass, wenn voraussetzlich eine reelle Axen-Richtung vorhanden ist, auch zwei andere Axen-Richtungen nothwendig reell sind. Denn eine Axe ist derjenigen Diametral-Ebene, welche auf ihr senkrecht steht, zugeordnet, und bildet also mit je zwei zugeordneten Durchmessern der Durchschnitts-Curve in dieser Ebene ein System von drei zugeordneten Durchmessern, und da jede Curve der zweiten Ordnung zwei reelle Axen-Richtungen hat, so gibt es nothwendig ein System dreier, paarweise auf einander senkrecht stehender, zugeordneter Durchmesser, ein System dreier Axen.

Jede Fläche der zweiten Ordnung, welche einen Mittelpunct hat, hat immer selbst dann, wenn sie imaginär ist, ein einziges System dreier Axen, deren Richtung reell ist.

104. Wenn wir für die Schnitt-Ebene, auf welcher eine Axe der Fläche senkrecht steht, insbesondere eine Tangential-Ebene der Fläche nehmen, so kommt die Axen-Definition zu Anfang der vorigen Nummer darauf hinaus, dass eine Normale der Fläche (ein Perpendikel, errichtet im Berührungspuncte auf der Tangential-Ebene), welche durch den Mittelpunct derselben geht, eine Axe der Fläche heisst.

Wenn wir für die Gleichung der Fläche die allgemeinere nehmen:

$$\Omega = 0, \tag{7}$$

und einen auf ihr beliebig angenommenen Punct durch (x'', y'', z'') bezeichnen, so erhalten wir für die Normale in diesem Puncte auf bekannte Weise die folgenden beiden Gleichungen:

$$\frac{d\Omega}{dx}(z-z'') - \frac{d\Omega}{dz}(x-x'') = 0,$$
$$\frac{d\Omega}{dy}(z-z'') - \frac{d\Omega}{dz}(y-y'') = 0,$$

wobei wir die partiellen Differential-Coefficienten auf den gegebenen Punct zu beziehen haben, und können unmittelbar ausdrücken, dass diese Normale durch den Mittelpunct der Fläche geht. Legen wir insbesondere die Gleichung der Fläche, bezogen auf ihren Mittelpunct als Anfangspunct der Coordinaten, zu Grunde, so ergeben sich, indem wir x, y und z gleich Null nehmen, die beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$\frac{d\Omega_{,}}{dx}\cdot z'' - \frac{d\Omega_{,}}{dz}\cdot x'' = 0,$$
$$\frac{d\Omega_{,}}{dy}\cdot z'' - \frac{d\Omega_{,}}{dz}\cdot y'' = 0,$$

oder, wenn wir die partiellen Differential-Coefficienten aus der Gleichung (1) entwickeln:

$$\begin{aligned}(Ax'' + B''y'' + B'z'')z'' - (B'x'' + By'' + A''z'')x'' &= 0,\\ (B''x'' + A'y'' + Bz'')z'' - (B'x'' + By'' + A''z'')y'' &= 0.\end{aligned} \tag{8}$$

Wenn die beiden Gleichungen (4) wiederum eine Axe der Fläche darstellen sollen, so erhalten wir, weil diese durch den Punct (x'', y'', z'') geht, $\frac{x''}{z''} = a$ und $\frac{y''}{z''} = b$, wonach die beiden vorstehenden Gleichungen in die Gleichungen (5) übergehen.

Die beiden Gleichungen (8) stellen, wenn wir x'', y'' und z'' als veränderlich betrachten, zwei Kegelflächen der zweiten Ordnung dar, welche die gegebene Fläche in den Scheiteln der drei Axen schneiden.

105. Die Entwickelungsweise der 103. Nummer behält ihre unbedingte Geltung auch dann, wenn M verschwindet. Also auch jeder Kegel hat seine drei Axen, in der Art, dass man nach dreifacher Richtung Ebenen legen kann, welche von der unbegränzten Kegelfläche gerade Kegel abschneiden. Einer Richtung entsprechen gerade Kegel mit elliptischer, den beiden übrigen gerade Kegel mit hyperbolischer Basis.

Ein Punct, als geometrischer Ort zweiter Ordnung, ist als ein verschwindendes Ellipsoid von bestimmter Axen-Richtung anzusehen, und darum überträgt sich diese Axen-Richtung auch auf ihn.

106. Wenn, indem die Fläche in ein Paraboloid übergeht, M unendlich wird, so behalten die Bedingungs-Gleichungen (5) vollständig ihre Bedeutung, nachdem schon die Gleichung (1) die ihrige verloren hat. Nur müssen wir uns wieder zurück auf die ursprüngliche Gleichung (7) beziehen, und dann geben die genannten Gleichungen (5) immer noch drei reelle Richtungen.

Die Gleichungen (5) werden befriedigt, wenn wir

$$a = \alpha' = \frac{\Psi_{23}}{\Psi_{03}}, \qquad b = \beta' = \frac{\Psi_{23}}{\Psi_{13}}$$

setzen. Denn durch diese Substitution gehen dieselben, mit Beibehaltung der Bezeichnung der 98. Nummer, in die folgenden beiden über:

$$\begin{aligned} g - k\alpha' &= 0, \\ h - k\beta' &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

in welchen g, h und k gleichzeitig verschwinden.

Es fällt also eine Axen-Richtung mit der gemeinsamen Durchmesser-Richtung zusammen. Nachdem auf diese Weise eines der drei Wurzel-Paare der Gleichungen (5) bestimmt worden ist, hängt die Bestimmung der beiden übrigen Wurzel-Paare von der Auflösung quadratischer Gleichungen ab.

Um diese quadratischen Gleichungen abzuleiten, wollen wir die erste der Gleichungen (9) (in welchen wir nun α' und β' als unbekannte Grössen betrachten) mit $\frac{1}{\Psi_{03}}$, die zweite mit $\frac{1}{\Psi_{13}}$ multipliciren und hiernach addiren. Alsdann ergibt sich, wenn wir zugleich auf die identische Gleichung, wodurch das Paraboloid characterisirt wird:

$$\frac{g}{\Psi_{03}} + \frac{h}{\Psi_{13}} + \frac{k}{\Psi_{23}} \equiv 0,$$

Rücksicht nehmen:

$$k\left(\frac{\alpha'}{\Psi_{03}} + \frac{\beta'}{\Psi_{13}} + \frac{1}{\Psi_{23}}\right) = 0,$$

eine Gleichung, welche sich in die folgenden beiden auflöset:

$$\begin{aligned} k &= 0, \\ \frac{\alpha'}{\Psi_{03}} + \frac{\beta'}{\Psi_{13}} + \frac{1}{\Psi_{23}} &= 0. \end{aligned}$$

Um also die Werthe von a und b zu bestimmen, können wir diese beiden Gleichungen des ersten Grades einzeln mit einer beliebigen der beiden Gleichungen (9) zusammenstellen. Die erste dieser Gleichungen liefert alsdann auf lineare Weise das schon bekannte Wurzel-Paar, die zweite die beiden übrigen Wurzel-Paare.

Das erste Wurzel-Paar bestimmt, wie eben schon bemerkt worden ist, die gemeinschaftliche Richtung der Durchmesser des bezüglichen Paraboloids. Ueber die Bedeutung der beiden andern Wurzel-Paare können wir nicht in Zweifel sein. Wenn überhaupt nemlich ein Wurzel-Paar auf eine bestimmte Axen-Richtung sich bezieht, so sind durch die beiden andern Wurzel-Paare die beiden übrigen Axen der Fläche, oder, allgemeiner ausgedrückt, die beiden Axen der Durschnitts-Curve in einer beliebigen Ebene, die auf der ersten Axe der Fläche senkrecht steht, der Richtung nach gegeben. Diese allgemeinere geometrische Deutung behält auch für den vorliegenden Fall der beiden Arten von Paraboloiden, wo, zugleich mit dem Mittelpuncte der Fläche, zwei der drei Axen unendlich weit liegen, ihre volle Geltung.

Man hat überhaupt die Ebenen je zweier Axen einer beliebigen Fläche der zweiten Ordnung die drei Hauptschnitte derselben genannt. Die Durchschnittslinie zweier Hauptschnitte ist also eine Axe, und parallel mit dem dritten Hauptschnitte sind insbesondere auch die Tangential-Ebenen in den Durchschnittspuncten dieser Axe und der Fläche. In dem particulären Falle eines Paraboloids liegt ein Hauptschnitt unendlich weit und ist als parallel mit der Tangential-Ebene im Scheitel des Paraboloids, das heisst, in dem einzigen Puncte, in welchem die eigentliche Axe des Paraboloids dasselbe schneidet, anzusehen, während die beiden andern Hauptschnitte durch diese Axe gehen und zugleich die beiden Axen in allen denjenigen Durchschnitts-Curven der Fläche, deren Ebenen auf der Axe senkrecht stehen, enthalten. Die letzten beiden Hauptschnitte gehen in dem Falle des hyperbolischen Paraboloids insbesondere also auch durch diejenigen beiden geraden Linien, die als parallel mit den beiden unendlich weit liegenden Axen anzusehen sind und die in der oben bezeichneten Tangential-Ebene die Winkel der beiden Durchschnittslinien mit der Fläche halbiren.

Wenn wir den Scheitel des Paraboloids durch (x', y', z') bezeichnen, so erhalten wir, nach dem Vorstehenden, für die eigentliche Axe der Fläche, die folgenden beiden Gleichungen:

$$\Psi_{03}(x-x') = \Psi_{23}(z-z')$$
$$\Psi_{13}(y-y') = \Psi_{23}(z-z'),$$

und für die Gleichung der Tangential-Ebene im Scheitel:

$$\frac{x-x'}{\Psi_{03}} + \frac{y-y'}{\Psi_{13}} + \frac{z-z'}{\Psi_{23}} = 0.$$

108. Es liegt uns jetzt nur noch ob, den Scheitel des Paraboloids analytisch zu bestimmen. In dem Falle einer Fläche, die einen Mittelpunct hat, geben die Gleichungen (8) der 104. Nummer, in Verbindung mit der Gleichung der Fläche (1), diejenigen Puncte, in welchen diese von ihren drei Axen geschnitten wird. Auf analoge Weise können wir hier verfahren, um den Scheitel eines gegebenen Paraboloids zu bestimmen, oder, mit andern Worten, denjenigen Punct, in welchem die Normale der Fläche die gemeinsame Durchmesser-Richtung hat. Zu diesem Ende wenden wir uns wieder zu der allgemeinen Gleichung (7) zurück.

Die Durchmesser-Richtung ist, wie in der vorigen Nummer, durch die beiden Gleichungen:

$$a = \frac{\Psi_{23}}{\Psi_{03}}, \qquad b = \frac{\Psi_{23}}{\Psi_{13}},$$

und die Richtung der Normalen in irgend einem beliebigen Puncte der Fläche durch die folgenden beiden Gleichungen bestimmt:

$$a = \frac{d\Omega}{dx} : \frac{d\Omega}{dz}, \qquad b = \frac{d\Omega}{dy} : \frac{d\Omega}{dz},$$

und somit erhalten wir, indem wir die beiden Werthe von a und die beiden Werthe von b einander gleich setzen, zur Bestimmung des Scheitels der Fläche die nachstehende Doppel-Gleichung:

$$\Psi_{03} \cdot \frac{d\Omega}{dx} = \Psi_{13} \cdot \frac{d\Omega}{dy} = \Psi_{23} \cdot \frac{d\Omega}{dz}, \qquad (10)$$

welche, für diesen Punct, gleichzeitig mit der Gleichung der Fläche besteht. Diese letztgenannte Gleichung muss, da die fragliche Bestimmung eine lineare ist, in Folge der letzten Doppel-Gleichung (10) ebenfalls auf den ersten Grad sich reduciren.

Verbinden wir die letzte Doppel-Gleichung mit der identischen Gleichung (19) der 98. Nummer:

$$\frac{\frac{d\Omega}{dx}}{\Psi_{03}} + \frac{\frac{d\Omega}{dy}}{\Psi_{13}} + \frac{\frac{d\Omega}{dz}}{\Psi_{23}} \equiv 2\left\{\frac{C}{\Psi_{03}} + \frac{C'}{\Psi_{13}} + \frac{C''}{\Psi_{23}}\right\}$$

welche ausdrückt, dass die durch die allgemeine Gleichung

$$\Omega = 0$$

dargestellte Fläche insbesondere eine parabolische ist, so erhalten wir nach einer ganz einfacher Substitution, indem wir der Kürze halber

$$\frac{C}{\Psi_{03}} + \frac{C'}{\Psi_{13}} + \frac{C''}{\Psi_{23}} \equiv \Gamma\left\{\frac{1}{(\Psi_{03})^2} + \frac{1}{(\Psi_{13})^2} + \frac{1}{(\Psi_{23})^2}\right\}$$

setzen:

$$\Psi_{03} \cdot \frac{d\Omega}{dx} = \Psi_{13} \cdot \frac{d\Omega}{dy} = \Psi_{23} \cdot \frac{d\Omega}{dz} = 2\Gamma.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{d\Omega}{dx} \cdot x + \frac{d\Omega}{dy} \cdot y + \frac{d\Omega}{dz} \cdot z = 2\Gamma\left\{\frac{x}{\Psi_{03}} + \frac{y}{\Psi_{13}} + \frac{z}{\Psi_{23}}\right\}.$$

Ferner können wir die Gleichung der Fläche auch folgendergestalt schreiben:

$$2\Omega \equiv \frac{d\Omega}{dx} \cdot x + \frac{d\Omega}{dy} \cdot y + \frac{d\Omega}{dz} \cdot z + 2\{Cx + C'y + C''z + D\} = 0,$$

und somit kommt zur Bestimmung der Coordinaten des Scheitels:

$$\Gamma\left(\frac{x}{\Psi_{03}} + \frac{y}{\Psi_{13}} + \frac{z}{\Psi_{23}}\right) + Cx + C'y + C''z + D = 0.$$

oder, wenn wir für Γ seinen Werth einsetzen:

$$\left(\frac{C}{\Psi_{03}} + \frac{C'}{\Psi_{13}} + \frac{C''}{\Psi_{23}}\right)\left(\frac{x}{\Psi_{03}} + \frac{x}{\Psi_{13}} + \frac{z}{\Psi_{23}}\right) + \left(\frac{1}{(\Psi_{03})^2} + \frac{1}{(\Psi_{13})^2} + \frac{1}{(\Psi_{23})^2}\right)(Cx + C'y + C''z + D) = 0. \quad (11)$$

Diese Gleichung ist linear und gibt, mit der Doppel-Gleichung (10) zusammengestellt, die drei Coordinaten des gesuchten Scheitels des Paraboloids.

108. Für den Fall des elliptischen und hyperbolischen Cylinders bestehen die Entwickelungen der 106. Nummer fort, ohne dass die Gleichung (1) ihre Geltung verliert. Demnach ergibt sich, wie dort, zur Bestimmung der Richtung der Haupt-Axe:

$$a = \frac{\Psi_{23}}{\Psi_{03}} = -\frac{\Psi_{13}}{\Xi_2} \qquad b = \frac{\Psi_{23}}{\Psi_{13}} = -\frac{\Psi_{03}}{\Xi_2}.$$

Wir sehen hieraus, dass diese Axe, die Axe des Cylinders, dieselbe Richtung hat, als die Linie der Mittelpuncte, für welche wir, bei beliebiger Annahme des Anfangspunctes der Coordinaten, die Gleichungen (23) der 99. Nummer gefunden haben, und also mit dieser Linie ganz zusammenfällt. Ohne dass die Gleichung (1) irgendwie sich ändert, können wir den Anfangspunct der Coordinaten auf dieser Axe beliebig fortrücken lassen. Jede auf der Axe senkrechte Ebene, deren Gleichung hiernach, bei willkührlicher Annahme von σ, die folgende ist:

$$\frac{x}{\Psi_{03}}+\frac{y}{\Psi_{13}}+\frac{z}{\Psi_{23}}=\sigma,$$

enthält also zwei zugeordnete Axen, die zugleich die Axen der Durchschnitts-Curve sind, und deren constante Richtung gerade so wie in der eben angezogenen Nummer sich bestimmt.

109. Wenn der Cylinder insbesondere in ein System von zwei reellen oder imaginären Ebenen ausartet, so vertritt die Durchschnittslinie derselben eine der Axen. Die beiden durch diese Durchschnittslinie gehenden Hauptschnitte halbiren die von den beiden Ebenen des Systems gebildeten Scheitel-Winkel.

Wenn die beiden Ebenen parallel sind, so erhalten in Folge der identischen Gleichungen (100, 101):

$$B.\frac{d\Omega}{dx}\equiv B'.\frac{d\Omega}{dy}\equiv B''.\frac{d\Omega}{dz}\equiv BB'B''\left\{\frac{x}{B}+\frac{y}{B'}+\frac{z}{B''}\right\}$$

die Gleichungen (4) der 103. Nummer einen gemeinschaftlichen Factor

$$\frac{x}{B}+\frac{y}{B'}+\frac{z}{B''}$$

und gehen, nach Hinweglassung desselben, in die folgenden über:

$$a=\frac{B''}{B},\qquad b=\frac{B''}{B'},$$

wodurch eine Axen-Richtung vollkommen bestimmt ist. Die Richtung der beiden andern Axen bleibt unbestimmt, und bloss der Bedingung unterworfen, dass

$$\frac{a}{B}+\frac{b}{B'}+\frac{1}{B''}=0,$$

das heisst, dass diese Axen in der Ebene der Mittelpuncte liegen und für dieselben also irgend zwei auf einander senkrechte gerade Linien, welche dieser Ebene angehören, genommen werden können. Die fragliche Ebene ist hiernach auch als Hauptschnitt zu betrachten und die Gleichung derselben die, bei beliebiger Annahme des Anfangspunctes der Coordinaten, bereits früher (101) gefundene:

$$\frac{x}{B}+\frac{y}{B'}+\frac{z}{B''}+\frac{C}{BB'B''}=0.$$

Wenn die beiden Ebenen zusammenfallen, so geschieht diess in dem eben bestimmten Hauptschnitte.

110. In dem Falle eines parabolischen Cylinders gibt es unendlich viele Axen, die alle dieselbe Richtung haben und in einem Hauptschnitte liegen. Dieser Hauptschnitt ist der einzige, und schneidet die Fläche in der Scheitellinie; parallel mit ihm sind alle Diametral-Ebenen.

Wenn wir die identische Doppel-Gleichung (25) der 100. Nummer auf die ursprüngliche allgemeine Gleichungs-Form beziehen und ihre einzelnen Theile dem Ausdrucke (24) gleich setzen, so wird dadurch der parabolische Cylinder characterisirt. Die allgemeine Gleichung können wir überhaupt auf folgende Weise schreiben:

$$\Omega\equiv\tfrac{1}{2}\left\{\frac{d\Omega_1}{dx}.x+\frac{d\Omega_1}{dy}.y+\frac{d\Omega_1}{dz}.z\right\}+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,$$

und sie geht dann, in Folge jener identischen Doppel-Gleichung, in die folgende über:

$$\tfrac{1}{2}BB'B''\left\{\frac{x}{B}+\frac{y}{B'}+\frac{z}{B''}\right\}^2+2Cx+2C'y+2C''z+D=0.$$

Damit eine gerade Linie eine Axe des parabolischen Cylinders sei, reicht es hin, dass sie zugleich eine Normale der Fläche und den Diametral-Ebenen parallel ist. Eine solche durch den Anfangspunct gehende Diametral-Ebene wird durch die Gleichung:

$$\frac{x}{B}+\frac{y}{B'}+\frac{z}{B''}=0,$$

dargestellt (100). Eine durch denselben Punct, parallel mit der Normale in irgend einem Punct der Fläche, gehende gerade Linie hat, indem wir auf diesen Punct die partiellen Differential-Quotienten beziehen, die folgenden beiden Gleichungen:

$$\frac{d\Omega}{dz}.x=\frac{d\Omega}{dx}.z, \qquad \frac{d\Omega}{dz}.y=\frac{d\Omega}{dy}.z.$$

Soll also diese Normale eine Axe der Fläche sein, so müssen die drei letzten Gleichungen gleichzeitig bestehen; diess fordert:

$$\frac{\frac{d\Omega}{dx}}{B}+\frac{\frac{d\Omega}{dy}}{B'}+\frac{\frac{d\Omega}{dz}}{B''}\equiv\frac{\frac{d\Omega_1}{dx}}{B}+\frac{\frac{d\Omega_1}{dy}}{B'}+\frac{\frac{d\Omega_1}{dz}}{B''}+2\left(\frac{C}{B}+\frac{C'}{B'}+\frac{C''}{B''}\right)=0,$$

oder, wenn wir mit Berücksichtigung der identischen Doppel-Gleichung entwickeln, und der Kürze halber

$$\frac{CB'B''+C'BB''+C''BB'}{B^2B'^2+B^2B''^2+B'^2B''^2}\equiv\Sigma$$

setzen:

$$\frac{x}{B}+\frac{y}{B'}+\frac{z}{B''}+2\Sigma=0.$$

Diese Gleichung stellt hiernach, wenn wir x, y, z als veränderlich betrachten, eine solche Ebene dar, in welcher die Scheitel der unendlich vielen Axen liegen: diese Ebene ist der Hauptschnitt selbst, weil sie die Richtung der Diametral-Ebenen hat. Um die Scheitellinie zu bestimmen, brauchen wir hiernach nur diese Gleichung mit der Gleichung der Fläche zusammenzustellen. Dadurch reducirt sich aber diese letztgenannte Gleichung auf den ersten Grad, indem sie in die folgende übergeht:

$$Cx+C'y+C''z+\{\tfrac{1}{2}D+BB'B''\Sigma^2\}=0.$$

111. Wir haben in der 103. Nummer gezeigt, dass jede Fläche zweiter Ordnung mit einem Mittelpuncte drei Axen hat, deren Richtungen immer reell sind. Es bleibt uns jetzt noch übrig, die Grösse dieser Axen zu bestimmen.

Die Gleichung der Fläche sei, indem wir

$$A=MA,\quad A'=MA',\quad A''=MA'',\quad B=MB,\quad B'=MB',\quad B''=MB'',$$

setzen:

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2B''xy+2B'xz+2Byz=1. \qquad (1)$$

Sind alsdann:

$$x=az, \qquad y=bz, \qquad (2)$$

wie früher, die beiden Gleichungen einer Axe, so erhalten wir für den Durchschnitt denselben mit der Fläche:

$$(Aa^2+A'b^2+A''+2B''ab+2B'a+2Bb)z^2 = 1.$$

Es ist aber, wenn wir das Quadrat der halben Axen-Länge durch r^2 und den reciproken Werth desselben durch s^2 bezeichnen,

$$\frac{1}{s^2} = r^2 = (1+a^2+b^2)\ z^2,$$

und hiernach:

$$Aa^2+A'b^2+A''+2B''ab+2B'a+2Bb = (1+a^2+b^2)\ s^2. \qquad (3)$$

Zur Bestimmung von a und b haben wir in der 103. Nummer die folgenden beiden Gleichungen erhalten:

$$Aa+B''b+B'-(B'a+Bb+A'')a = 0,$$
$$B''a+A'b+B-(B'a+Bb+A'')b = 0.$$

Addiren wir diese beiden Gleichungen, nachdem wir die erste derselben mit a und die zweite mit b multiplizirt haben, so kommt:

$$Aa^2+A'b^2+2B''ab+B'a+Bb-(B'a+Bb+A'')\ (a^2+b^2) = 0,$$

und wenn wir diese Gleichung von (3) abziehen und zugleich den Factor $(1+a^2+b^2)$ weglassen:

$$B'a+Bb+(A''-s^2) = 0, \qquad (4)$$

Auf gleichem Wege oder durch blosse Buchstaben-Vertauschung ergibt sich:

$$B''a+B+(A'-s^2)b = 0,$$
$$B'+B''b+(A-s^2)a = 0. \qquad (4,a)$$

Wenn wir a und b zwischen den drei letzten Gleichungen eliminiren, so erhalten wir:

$$(A-s^2)(A'-s^2)(A''-s^2)-B^2(A-s^2)-B'^2(A'-s^2)-B''^2(A''-s^2)+2BB'B'' = 0, \qquad (5)$$

oder auch, wenn wir in Beziehung auf s^2 ordnen:

$$s^6-[A+A'+A'']s^4+[(AA'-B''^2)+(AA''-B'^2)+(A'A''-B^2)]s^2$$
$$-[AA'A''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2+2BB'B''] = 0. \qquad (6)$$

Endlich ergibt sich, wenn wir zu der ursprünglichen allgemeinen Gleichung der Fläche zurückgehen und die Bezeichnungen der 10. Nummer wieder einführen:

$$s^6+[A+A'+A'']\frac{\Theta_3}{\Phi}.s^4+[\Xi_2+\Xi_1+\Xi]\frac{\Theta_3^2}{\Phi^2}.s^2+\frac{\Theta_3^4}{\Phi^3} = 0, \qquad (7)$$

oder

$$r^6+[\Xi_2+\Xi_1+\Xi]\frac{\Phi}{\Theta_3^2}.r^4+[A+A'+A'']\frac{\Phi^2}{\Theta_3^3}.r^2+\frac{\Phi^3}{\Theta_3^4} = 0. \qquad (8)$$

112. Die letzte Gleichung gibt drei Werthe von r^2, den drei Werthen-Paaren von a und b entsprechend, welche wie diese in Folge der Gleichungen (4,a), alle drei reell sind. Hiernach bestimmen einzig und allein die Vorzeichen in der letzten Gleichung, ob diese drei reellen Werthe positiv oder negativ und also die entsprechenden Axen reell oder imaginär sind.

Wenn

$$\Phi > 0,$$

so sind die drei Werthe von r^2 entweder alle drei negativ, oder einer ist negativ und die beiden

übrigen sind positiv: die Fläche selbst ist also imaginär oder ein einschaliges Hyperboloid mit zwei reellen Axen. Ersteres findet Statt, wenn

$$\Xi_2+\Xi_1+\Xi>0, \qquad (A+A'+A'')\Theta_3>0,$$

Letzteres, wenn diese Bedingungen nicht gleichzeitig befriedigt werden *).

Wenn

$$\Phi<0,$$

so sind die drei Werthe von r^2 entweder alle drei positiv, oder einer ist positiv und die beiden andern sind negativ: die Fläche selbst ist also ein Ellipsoid mit drei reellen Axen, oder ein zweischaliges Hyperboloid mit einer reellen Axe. Ersteres findet Statt, wenn

$$\Xi_2+\Xi_1+\Xi>0, \qquad (A+A'+A'')\Theta_3>0,$$

Letzteres, wenn diese Bedingungen nicht gleichzeitig befriedigt werden.

Wenn

$$\Phi=0,$$

so verschwinden gleichzeitig die drei Werthe von r^2: die Fläche ist ein Kegel oder ein Punct.

Wenn

$$\Theta_3=0,$$

was unter der gemachten Voraussetzung, dass die ursprüngliche Gleichungs-Form in die vorstehende Gleichungs-Form (1) übergehen kann, mit sich bringt, dass gleichzeitig auch Φ verschwindet, so wird eine Wurzel s^2 der Gleichurg (6) gleich Null, eine Axe wird also unendlich und die Fläche ein Cylinder. Dann sind die beiden übrigen Axen durch die folgende Gleichung bestimmt:

$$s^4-(A+A'+A'').s^2+[(AA'-B''^2)+(AA''-B'^2)+(A'A''-B^2)]=0, \qquad (9)$$

oder wenn wir uns auf die ursprüngliche Gleichungs-Form wieder zurückbeziehen, durch die folgende:

$$s^4+[A+A'+A'']\frac{\Xi_2}{\Theta_2}.s^2+[\Xi_2+\Xi_1+\Xi]\left(\frac{\Xi_2}{\Theta_2}\right)^2=0. \qquad (10)$$

Wenn

$$\Xi_2+\Xi_1+\Xi>0,$$

---

*) Die Bedingungen des Textes stimmen nicht nur mit den frühern der 23. Nummer überein, sondern es müssen sich diese auch aus jenen als nothwendige Folge ableiten lassen.

Nach den Gleichungen IV. der 10. Nummer ist:

$$(A+A'+A'')\Theta_3\equiv\Xi_1\Xi_2+\Xi\Xi_2+\Xi\Xi_1-[(\Psi_{03})^2+(\Psi_{13})^2+(\Psi_{23})^2],$$

so dass also auch, wenn wir den ersten der beiden Fälle betrachten:

$$\Xi_1\Xi_2+\Xi\Xi_2+\Xi\Xi_1>0$$

eine Bedingung, die in Verbindung mit

$$\Xi+\Xi_1+\Xi_2>0$$

zeigt, dass wenigstens zwei der drei Ausdrücke Ξ, Ξ_1 und Ξ_2 positiv sind. Denn diese drei Ausdrücke können wir ansehen als die drei reellen Wurzeln einer solchen Gleichung des dritten Grades

$$\xi^3+a\xi^2+b\xi+c=0,$$

in welchen der Coefficient a negativ und b positiv ist, wonach zwei Wurzeln nothwendig positiv sind.

Hiernach stimmen ferner in Folge der identischen Gleichungen I. die drei Coefficienten A, A' und A'' unter sich im Zeichen überein und folglich auch mit Θ_3. Hieraus folgt aus den identischen Gleichungen IV, dass Ξ, Ξ_1 und Ξ_2 sämmtlich im Zeichen übereinstimmen und also positiv sind.

so stimmen die beiden Werthe von s^2 im Zeichen überein und diese sind positiv oder negativ, je nachdem

$$(A+A'+A'')\frac{\Xi_2}{\Theta_2} < \text{oder} > 0.$$

Im ersten Falle ist der Cylinder ein elliptischer mit zwei reellen Axen, im zweiten Falle ist er imaginär. Wenn

$$\Theta_2 = 0,$$

so werden die beiden Werthe von s^2 unendlich. Dann geht der Cylinder, indem seine beiden Axen verschwinden, in ein System von zwei reellen Ebenen oder in eine gerade Linie über.

Wenn endlich neben den frühern Bedingungen, dass Φ und Θ_3 verschwinden, auch noch

$$\Xi_2 = 0,$$

so muss unter der Voraussetzung, dass die ursprüngliche Gleichung auf die Form der vorstehenden Gleichung (1) gebracht werden kann, gleichzeitig auch Θ_2 verschwinden, wonach $M=-\frac{Y}{A}$. Dann reduciren sich die Gleichungen (9) und (10), weil mit Ξ_2 zugleich Ξ_1 und Ξ gleich Null werden, zur Bestimmung von s^2 auf den ersten Grad:

$$s^2-(A+A'+A'')=0, \tag{11}$$

$$s^2+(A+A'+A'')\frac{Y}{A}=0. \tag{12}$$

Es sind hier also zwei der drei ursprünglichen Axen unendlich geworden, und die Fläche ist in ein System von zwei parallelen Ebenen übergegangen, deren kürzester Abstand als die dritte Axe zu betrachten ist. Diese ist mit den Ebenen zugleich reell oder imaginär und verschwindet, wenn die Ebenen zusammenfallen.

113. Wir haben in der vorigen Nummer die Grösse der beiden endlichen Axen eines Cylinders durch die Gleichungen (9) und (10) bestimmt. Wenn der Cylinder auf einer der drei Coordinaten-Ebenen, etwa auf XY, senkrecht steht, so verschwinden aus der Gleichung desselben, — wir legen zunächst die Gleichungs-Form (1) der 111. Nummer zu Grunde, wobei irgend ein Punct der Axe des Cylinders zum Anfangspuncte der Coordinaten genommen worden ist — die drei Coefficienten A'', B und B'. Diese Gleichung wird alsdann

$$Ax^2+A'y^2+2B''xy=1, \tag{13}$$

während die Gleichung (9) in die folgende übergeht:

$$s^4-(A+A')s^2+(AA'-B''^2)=0. \tag{14}$$

Diese Gleichung gibt für s^2 die reciproken Werthe der Quadrate der halben Axen der Basis des Cylinders, oder was dasselbe ist, der, bei Abstraction von der dritten Dimension, durch die Gleichung (13) dargestellten Curve zweiter Ordnung.

Auf gleichem Wege erhalten wir zur Bestimmung der beiden Axen derjenigen Curve, in welcher die Ebene XY die durch die ursprüngliche Gleichungs-Form dargestellte Fläche der zweiten Ordnung schneidet, und deren Gleichung, durch das Verschwinden von A'', B', B' und C'', in die allgemeine des zweiten Grades zwischen zwei Veränderlichen übergeht:

$$Ax^2+A'y^2+2B''xy+2Cx+2C'y+D=0, \tag{15}$$

aus der Gleichung (10) die nachstehende:

$$s^4+(A+A')\frac{\Xi_2}{\Theta_2}\cdot s^2+\frac{(\Xi_2)^2}{(\Theta_2)^2}=0. \tag{16}$$

Zur Bestimmung der Axen-Richtung der beiden Curven (13) und (15) können wir unmittelbar die Gleichung (6) der 104. Nummer nehmen, in der alsdann $\left(\frac{b}{a}\right)$ die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels bedeutet, den die bezügliche Axe der Curve mit der Axe X bildet.

114. Wenn wir einer gegebenen Fläche der zweiten Ordnung nach einander verschiedene Lagen gegen die Coordinaten-Axen geben, indem wir diese um den Anfangspunct beliebig drehen, so erhalten die Coefficienten ihrer Gleichung von den ursprünglichen verschiedene Werthe, während die Coefficienten derjenigen Gleichung, durch welche die Grösse der Axen bestimmt wird, unverändert dieselben bleiben. Wir wollen nur den Fall der Gleichung (1) betrachten, welcher entspricht, dass der Mittelpunct der Fläche in dem Anfangspuncte der Coordinaten liegt. Dann bedeuten A, A' und A'' die Quadrate der reciproken Werthe derjenigen drei Halb-Durchmesser, welche in die jedesmaligen drei Coordinaten-Axen fallen. Die Summe dieser Quadrate bleibt also unverändert dieselbe.

Wenn man ein System dreier auf einander senkrechten, im Mittelpuncte einer Fläche der zweiten Ordnung sich schneidenden, geraden Linien, um den Mittelpunct beliebig sich drehen lässt, so bleibt, für alle Lagen, die Quadrat-Summe der reciproken Werthe der in die jedesmaligen drei geraden Linien fallenden Halb-Durchmesser der Fläche constant.

In der Voraussetzung, dass die Fläche eines der beiden Hyperboloide ist, können wir die Axe X mit einer Seite des Asymptoten-Kegels zusammenfallen lassen; dann verschwindet A, und $(A'+A'')$ wird constant. Wenn man also durch die Spitze des Asymptoten-Kegels eines einschaligen oder zweischaligen Hyperboloids eine Ebene legt, die auf irgend einer Seite des Kegels senkrecht steht, so schneidet diese die Fläche in solchen Curven, für welche die Quadrat-Summe der reciproken Werthe der halben Axen immer dieselbe ist. Es umhüllen aber, wie sich leicht zeigen lässt, solche Ebenen, die auf den Seiten eines Kegels der zweiten Ordnung in dem Scheitel desselben senkrecht stehen, einen Kegel derselben Ordnung und die Beziehung der beiden Kegel zu einander ist immer eine durchaus gegenseitige.

Wenn der Asymptoten-Kegel sich weit genug öffnet, so können wir durch die Spitze desselben zwei sich rechtwinklig schneidende gerade Linien so legen, dass sie mit zwei Kegel-Seiten zusammenfallen, und zwar gibt es alsdann solcher Linien-Paare unendlich viele. Es ist zu diesem Ende nur nothwendig, dass, wenn man aus der Kegelfläche einen geraden elliptischen Kegel schneidet, die grössere Axe der Basis dieses Kegels, von der Spitze aus, unter einem Winkel gesehen werde, der ein stumpfer ist. Ist dieser Winkel ein rechter, so ist er der einzige, der in der Kegelfläche liegt. Wenn wir die Axen X und Y mit irgend zwei solchen Kegel-Seiten, die auf einander senkrecht stehen, zusammenfallen lassen, so verschwinden gleichzeitig A und A', und A'' wird constant. Wenn um die Spitze des Asymptoten-Kegels eines Hyperboloids eine Ebene sich so dreht, dass sie den Kegel fortwährend in zwei auf einander senkrechten geraden Linien schneidet, so behält der auf dieser Ebene senkrecht stehende Durchmesser der Fläche in allen Lagen dieselbe Länge.

Wenn, für eine einzelne Lage, A'' ebenfalls verschwindet und die bezügliche Axe der Fläche also unendlich wird, so findet ein Gleiches für alle Lagen Statt. Dieses ist der Fall, wenn eine rechtwinklige körperliche Ecke sich in den Asymptoten-Kegel beschreiben lässt. In einen Kegel also, in welchen sich eine rechtwinklige körperliche Ecke beschreiben lässt, lassen sich solcher Ecken unendlich viele beschreiben und durch die sechs Kanten zweier solchen Ecken mit gemeinschaftlichem Scheitel lässt sich immer eine Kegelfläche der zweiten Ordnung legen. Hiernach erhält die Bedingungs-Gleichung:

$$A + A' + A'' = 0,$$

ihre geometrische Interpretation, die auch auf den Kegel, für sich betrachtet, ihre Anwendung findet. In Folge dieser Bedingungs-Gleichung ist, wenn blos A verschwindet, $(A' + A'')$ nothwendig gleich Null. Flächen der fraglichen Art werden also von solchen Ebenen, die auf den Seiten des Asymptoten-Kegels senkrecht stehen, in gleichseitigen Hyperbeln geschnitten.

Wenn wir uns zu der ursprünglichen Gleichungs-Form zurückwenden, so geht die vorstehende Bedingungs-Gleichung in die folgende über:

$$\mathrm{A} + \mathrm{A}' + \mathrm{A}'' = 0. \qquad (17)$$

Der zu Anfang dieser Nummer bewiesene Satz gilt auch für den Fall des Cylinders. Die constante Summe $(A + A' + A'')$ ist hier, indem wir ihn als einen geraden Cylinder betrachten, der Quadrat-Summe der reciproken Werthe der halben Axen seiner Basis gleich. Ist diese also eine gleichseitige Hyperbel, so bestehen die letzten Bedingungs-Gleichungen.

Derselbe Satz besteht auch für den Fall paralleler Ebenen; wir können ihn hier, wo die constante Summe dem Quadrate des reciproken halben Abstandes der beiden Ebenen von einander gleich ist, in die folgende Aussage einkleiden: Die Quadrat-Summe der reciproken Werthe dreier auf einander senkrecht stehender gerader Linien, die von einem gegebenen Puncte aus, nach beliebiger Richtung, bis zu einer gegebenen Ebene gezogen werden, ist dem reciproken Werthe des Quadrates des kürzesten Abstandes des Punctes von der Ebene gleich.

115. Nach der Gleichung (14) bedeutet der Ausdruck $(AA' - B''^2)$ den reciproken Werth des Productes der Quadrate der halben Axen der Durchschnitts-Curve in der Ebene XY. Ist diese Curve eine Ellipse, so bedeutet dieser Ausdruck also, noch durch π^2 dividirt, den reciproken Werth des Quadrates der Fläche der Curve. Ist die Curve hingegen eine Hyperbel, so ist das Product ihrer beiden mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten halben Axen gleich der Fläche desjenigen Dreiecks, das durch eine beliebige Tangente der Hyperbel von ihrem Asymptoten-Winkel abgeschnitten wird. Die Bedeutung der beiden andern Ausdrücke $(AA'' - B'^2)$ und $A'A'' - B^2)$ ist eine ganz analoge. Die Gleichung (6), in welcher der Coefficient von s^2 constant bleibt, wie wir auch die drei rechtwinkligen Coordinaten-Axen um den Anfangspunct drehen mögen, gibt hiernach den folgenden Satz.

Wenn man ein System dreier auf einander senkrechten und im Mittelpuncte eines Ellipsoids sich schneidenden Ebenen um diesen Mittelpunct beliebig sich drehen lässt, so ist für alle Lagen die Quadrat-Summe der reciproken Werthe der Flächen-Inhalte der drei Durchschnitts-Curven constant.

Wollen wir die Aussage dieses Satzes auf beliebige Flächen der zweiten Ordnung ausdehnen, so müssen wir für das Quadrat des Flächen-Inhaltes einer Hyperbel, mit negativem Zeichen das Quadrat des Flächen-Inhaltes derjenigen Ellipse nehmen, deren Axen-Quadrate, abgesehen vom Zeichen, dieselben sind.

Für den Fall des (geraden) Cylinders können wir für die drei schneidenden Ebenen irgend drei auf einander senkrecht stehende nehmen: die constante Summe ist alsdann dem Quadrate des reciproken Werthes der Fläche seiner Basis gleich.

In dem Falle des einschaligen und zweischaligen Hyperboloids ändert das Product der beiden Halb-Axen-Quadrate der Durchschnitts-Curve, wenn die schneidende Ebene mit der Tangential-Ebene des Asymptoten-Kegels zusammenfällt, indem es durch das Unendliche hindurchgeht, sein Zeichen. Ist daher die Coordinaten-Ebene XY diese schneidende, so verschwindet $(AA' - B''^2)$ und die constante Summe reducirt sich auf $\{(AA'' - B'^2) + (A'A'' - B^2)\}$. Nehmen wir für die Ebenen XY

und XZ irgend zwei auf einander senkrecht stehende Tangential-Ebenen des Asymptoten-Kegels, so verschwinden $(AA' - B''^2)$ und $(A'A'' - B'^2)$ und die constante Summe reducirt sich auf $(A'A'' - B^2)$. Der geometrische Ort für die Durchschnittslinie solcher zweier auf einander senkrecht stehender Ebenen, also der Ort für die Axe X, ist ebenfalls ein Kegel zweiter Ordnung und somit wird auch von der Ebene YZ, die auf der Axe X immer senkrecht angenommen wird, wiederum ein solcher Kegel umhüllt. *) Der Flächen-Inhalt der Durchschnitts-Curve in allen diesen Ebenen ist constant.

Wenn insbesondere

$$(AA' - B''^2) + (AA'' - B'^2) + (A'A'' - B^2) = 0,$$

und also die Summe der reciproken Werthe der Producte je zweier der drei Halb-Axen-Quadrate der Fläche verschwindet, oder, was dasselbe ist, die Summe der Quadrate der drei Axen gleich Null ist, so müssen, bei gehöriger Annahme der drei Coordinaten-Axen, gleichzeitig die drei Ausdrücke $(AA' - B''^2)$, $(AA'' - B'^2)$ und $(A'A'' - B^2)$ verschwinden können. Dann muss also der Asymptoten-Kegel drei, eine rechtwinklige körperliche Ecke bildende, Ebenen gleichzeitig berühren; er muss sich einer solchen Ecke einschreiben, diese sich ihm umschreiben lassen. Es knüpft sich hieran zunächst die Bemerkung, dass, wenn sich überhaupt um einen Kegel eine rechtwinklige körperliche Ecke beschreiben lässt, unendlich viele solcher Ecken sich demselben umschreiben lassen und dass es immer einen Kegel gibt, der gleichzeitig die sechs Ebenen zweier rechtwinkligen körperlichen Ecken mit demselben Scheitel berührt. Dann begegnen wir ferner dem folgenden Satze.

Wenn die Summe der Quadrate der drei Axen eines einschaligen oder zweischaligen Hyperboloids gleich Null ist, so lassen sich dem Asymptoten-Kegel desselben unendlich viele rechtwinklige körperliche Ecken umschreiben und umgekehrt. Dann schneiden ferner irgend zwei Diametral-Ebenen, die auf einander und auf irgend einer Berührungs-Ebene des Asymptoten-Kegels senkrecht stehen, die Fläche in einer Ellipse und Hyperbel so, dass das Product der beiden Axen der erstern dem Producte der reellen Axe und der Neben-Axe der letztern gleich ist. **)

Wenn wir uns wieder auf die ursprüngliche allgemeine Gleichung der Fläche zurückbeziehen, so geht die vorstehende Bedingungs-Gleichung in die folgende über:

$$\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi = 0. \qquad (18)$$

Wenn die bezüglichen Gleichungen insbesondere eine Kegelfläche darstellen, so drücken diese Bedingungs-Gleichungen aus, dass einer solchen Kegelfläche sich rechtwinklige körperliche Ecken umschreiben lassen.

116. Das, mit verändertem Vorzeichen genommene, letzte Glied der Gleichung (7) ist gleich dem Quadrate des Productes der drei halben Axen der Fläche. Ist die Fläche ein Ellipsoid, so erhalten wir (wie bekannt ist, und worauf wir in der folgenden Nummer zurückkommen) den Inhalt

---

*) Die Behauptungen des Textes lassen sich leicht direct beweisen, werden uns aber auch später noch in anderm Zusammenhange begegnen (§. 12).

**) Wenn 2α und $2\beta\sqrt{-1}$ zwei zugeordnete Durchmesser, insbesondere die beiden Axen einer Hyperbel sind, so nennen wir 2β den zugeordneten Neben-Dnrchmesser, insbesondere die Neben-Axe der Hyperbel.

desselben, wenn wir das Product der drei halben Axen noch mit $\frac{4}{3}\pi$ multipliciren. Es ergibt sich also für diesen Inhalt:

$$\tfrac{4}{3}\pi \cdot \frac{\Phi}{(\Theta_3)^2} \cdot \sqrt{-\Phi}. \tag{19}$$

Dieser Ausdruck bleibt auch für den Fall des zweischaligen Hyperboloids reell. Um ihn hier geometrisch zu construiren, wollen wir für die Gleichung dieses letzteren die folgende nehmen:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1, \tag{20}$$

wonach die reelle Halb-Axe α und die beiden imaginären $\beta\sqrt{-1}$ und $\gamma\sqrt{-1}$ sind, und die Gleichung:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0, \tag{21}$$

den Asymptoten-Kegel darstellt. Legen wir in einem Scheitel der rellen Axe an die Fläche eine Tangential-Ebene, so schneidet diese den Asymptoten-Kegel in einer Ellipse, für deren Gleichungen wir

$$x = \pm\alpha, \qquad \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

erhalten. Die Axen dieser Ellipse sind β und γ, wonach ihr Inhalt $\pi\beta\gamma$ ist. Multipliciren wir diesen Flächen-Inhalt der Ellipse mit $\frac{1}{3}\alpha$, so erhalten wir $\frac{1}{3}\pi\alpha\beta\gamma$ für den körperlichen Inhalt des, von der Asymptoten-Kegel-Fläche durch die Tangential-Ebene abgeschnittenen, geraden Kegels. Das Vierfache dieses Inhaltes entspricht also bei einem zweischaligen Hyperboloid dem Inhalte eines Ellipsoids.

Für den Fall des einschaligen Hyperboloids wird der Ausdruck bei (19) imaginär. Um hier den Ausdruck

$$\frac{\Phi}{(\Theta_3)^2}\sqrt{\Phi}, \tag{22}$$

von dem die räumlichen Dimensionen der Fläche abhangen, zu construiren, wollen wir für die Gleichung der Fläche die folgende nehmen:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = -1. \tag{23}$$

Dann sind β und γ die beiden reellen Axen der Fläche, die imaginäre ist $\alpha\sqrt{-1}$, das Product der drei Halb-Axen-Quadrate also negativ. Die Gleichung des Asymptoten-Kegels ist, wie in dem vorigen Falle, die Gleichung (21). Die Tangential-Ebene der Fläche in einem der beiden Scheitel einer der beiden reellen Axen, etwa der Axe γ, schneidet den Asymptoten-Kegel in einer Hyperbel, deren Gleichungen

$$z = \pm\gamma, \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

Es ist bekannt, dass jede Tangente dieser Hpperbel von ihrem Asymptoten-Winkel ein Dreieck abschneidet, dessen constanter Inhalt $\alpha\beta$ ist. Ein solches Dreieck bildet die Basis einer Pyramide, deren Spitze in dem Mittelpuncte der Fläche liegt; die Höhe dieser Pyramide ist also γ und folglich ihr Inhalt $\frac{1}{3}\alpha\beta\gamma$. Der Ausdruck (22) ist also geich dem dreifachen Inhalte einer solchen Pyramide.

117. Wir können den Ausdrücken (19) und (22) eine allgemeinere Deutung geben, wenn wir die Gleichung der Fläche, statt auf ihre drei Axen, auf irgend drei ihrer zugeordneten Durchmesser beziehen. Demnach sei zuvörderst die Gleichung eines gegebenen Ellipsoids, indem wir die Längen dreier halben zugeordneten Durchmesser desselben durch α_1, β_1, γ_1 bezeichnen:

$$\frac{x^2}{\alpha_1^2}+\frac{y^2}{\beta_1^2}+\frac{z^2}{\gamma_1^2}=1.$$

Wir wollen den Winkel, welchen die beiden Coordinaten-Axen Y und Z mit einander bilden, oder, was dasselbe ist, den Winkel der beiden Halb-Durchmesser β_1 und γ_1, ε nennen und δ denjenigen Winkel, den die Axe X, oder der Halb-Durchmesser α, mit der Coordinaten-Ebene YZ, oder derjenigen Diametral-Ebene, welche die Halb-Durchmesser β_1 und γ_1 enthält, bildet. Auf ähnliche Weise seien ε' und ε'' die von den Halb-Durchmessern α_1 und γ_1, und α_1 und β_1 gebildeten Winkel und δ' und δ'' diejenigen Winkel, welche die Halb-Durchmesser β_1 und γ_1 bezüglich mit den ihnen zugeordneten Diametral-Ebenen bilden. Wenn wir hiernach in der vorstehenden Gleichung x constant nehmen, so ergibt sich für die Durchschnitts-Curve der diesem constanten x entsprechenden, mit YZ parallelen Ebene und der Fläche:

$$\frac{y^2}{\beta_1^2}+\frac{z^2}{\gamma_1^2}=\frac{\alpha_1^2-x^2}{\alpha_1^2}.$$

Es sind ferner

$$\frac{\beta_1^2(\alpha_1^2-x^2)}{\alpha_1^2},\qquad \frac{\gamma_1^2(\alpha_1^2-x^2)}{\alpha_1^2}$$

die Quadrate zweier halben zugeordneten Durchmesser dieser Durchschnitts-Ellipse, welche den Winkel ε mit einander bilden, und folglich ist, nach bekanntem Satze, der Inhalt derselben

$$\pi\sin\varepsilon\,\frac{\beta_1\gamma_1}{\alpha_1^2}(\alpha_1^2-x^2).$$

Multipliciren wir diesen Inhalt mit $dx\sin\delta$, so erhalten wir den körperlichen Inhalt einer durch zwei aufeinander folgenden mit YZ parallelen Ebenen begränzten Elementarschicht der Fläche und hiernach für den körperlichen Inhalt der ganzen Fläche:

$$\pi\sin\varepsilon\,\sin\delta\,\frac{\beta_1\gamma_1}{\alpha_1^2}\int_{-\alpha_1}^{+\alpha_1}(\alpha_1^2-x^2)\,dx=\tfrac{4}{3}\pi\,\alpha_1\beta_1\gamma_1\,\sin\varepsilon\,\sin\delta. \qquad (24)$$

Hieraus folgt, dass, welches auch die drei zugeordneten Durchmesser, auf welche die Gleichung des Ellipsoids bezogen wird, sein mögen, das Product:

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1\,\sin\varepsilon\,\sin\delta$$

constant ist. Dieses Product ist aber gleich dem Inhalte desjenigen Parallelepipedum, das die jedesmaligen drei halben zugeordneten Durchmesser zu drei, in einer Ecke zusammenstossenden, Kanten hat. Das Achtfache dieses Inhaltes ist also der Inhalt desjenigen Parallelepipedum, das dem Ellipsoide umschrieben ist und dessen Seiten-Ebenen den drei Diametral-Ebenen der Fläche parallel sind.

Alle einem gegebenen Ellipsoid umschriebenen Parallelepipeda, deren Seiten-Ebenen irgend drei zugeordneten Diametral-Ebenen dieser Fläche parallel sind, haben gleichen Inhalt.

Den Ausdruck (24), den wir eben für den Inhalt des Ellipsoids gefunden haben, ist gleich dem Vierfachen desjenigen Kegels, der zur Spitze irgend einen Punct der Fläche und zur Basis die Durch-

schnitts-Curve in derjenigen Diametral-Ebene hat, deren zugeordneter Durchmesser durch den gegebenen Punct geht. Der Inhalt solcher Kegel ist also constant.

Sind ferner $\alpha_,$, $\beta_,\sqrt{-1}$ und $\gamma_,\sqrt{-1}$ irgend drei zugeordnete Halb-Durchmesser eines gegebenen zweischaligen Hyperboloids, das wir nun an die Stelle des bisher betrachteten Ellipsoids treten lassen, so ändert der constante Ausdruck (24), den wir für (19) gefunden haben, bloss sein Zeichen. Wir erkennen alsdann in demselben ohne Mühe den vierfachen Inhalt desjenigen Kegels, der von der Asymptoten-Kegel-Fläche, deren Gleichung,

$$\frac{x^2}{\alpha_,^2}-\frac{y^2}{\beta_,^2}-\frac{z^2}{\gamma_,^2}=0,$$

durch die Tangential-Ebene des Hyperboloids in einem Scheitel des reellen Durchmessers $\alpha_,$ abgeschnitten wird.

Alle beliebige Tangential-Ebenen eines gegebenen zweischaligen Hyperboloids schneiden von der Asymptoten-Kegel-Fläche desselben Kegel von constantem Inhalte ab.

Durch Umkehrung folgt hieraus, dass eine Ebene, welche in allen ihren Lagen von einer gegebenen Kegel-Fläche Kegel von constantem Inhalte abschneidet, ein zweischaliges Hyperboloid umhüllt. Die Mittelpuncte der Basen aller solchen Kegel beschreiben hierbei die Fläche.

Tritt endlich an die Stelle des Ellipsoids ein einschaliges Hyperboloid und sind $\alpha_,\sqrt{-1}$, $\beta_,$ und $\gamma_,$ irgend drei zugeordnete Durchmesser desselben, so wird der vorstehende Ausdruck (25) imaginär. Dividiren wir durch $\sqrt{-1}$, so kommt:

$$\frac{\Phi}{(\Theta_3)^2}\sqrt{\Phi}=\alpha_,\beta_,\gamma_,\sin\varepsilon\sin\delta:$$

ein Ausdruck, den wir auch, weil er bei einer gleichzeitigen Vertauschung von $\alpha_,\sqrt{-1}$ mit $\alpha_,$ und von $\gamma_,$ mit $\gamma_,\sqrt{-1}$ unverändert bleiben muss, unter der folgenden Form schreiben können:

$$\alpha_,\beta_,\gamma_,\sin\varepsilon''\sin\delta''.$$

Es ist leicht, diesen Ausdruck geometrisch zu deuten. Die Tangential-Ebene nemlich in einem Scheitel des reellen Halb-Durchmessers $\gamma_,$ schneidet die Fläche in zwei geraden Linien und den Asymptoten-Kegel in einer Hyperbel, deren Asymptoten diese beiden geraden Linien sind. Diese Hyperbel hat $\alpha_,$ und $\beta_,\sqrt{-1}$ zu zwei zugeordneten, einen Winkel ε'' bildenden Halbdurchmessern, eine beliebige Tangente derselben (die auch eine Tangente des Asymptoten-Kegels ist) schneidet hiernach von ihrem Asymptoten-Winkel ein solches Dreieck ab, das $\alpha_,\beta_,\sin\varepsilon''$ zu seinem Flächen-Inhalte hat. Eine Pyramide, die dieses Dreieck zur Basis hat und deren Spitze in den Mittelpunct der Fläche fällt, hat zur Höhe $\gamma\sin\delta''$ und folglich zum körperlichen Inhalte:

$$\tfrac{1}{3}\alpha_,\beta_,\gamma_,\sin\varepsilon''\sin\delta''=\tfrac{1}{3}\frac{\Phi}{(\Theta_3)^2}\sqrt{\Phi}.$$

Um die Beziehung dieser Pyramide zur Fläche bestimmter zu bezeichnen, fügen wir noch einige Ausführungen hinzu.

Wenn überhaupt eine gerade Linie ein gegebenes einschaliges Hyperboloid in reellen Puncten schneidet, so lassen sich durch diese gerade Linie immer auch zwei reelle Tangential-Ebenen an die Fläche legen, so wie auch umgekehrt. Es seien M und M′ die beiden Durchschnittspuncte, durch

jeden dieser Puncte gehen zwei auf der Fläche liegende Linien verschiedener Erzeugung MN und MN', M'N' und M'N, die sich ausserdem noch in zwei Puncten N und N' schneiden. Diese Puncte sind die Berührungspuncte auf den fraglichen beiden Tangential-Ebenen. Wenn die gegebene gerade Linie MM' insbesondere den Asymptoten-Kegel berührt, ist eine dieser beiden Tangential-Ebenen auch eine Tangential-Ebene des Asymptoten-Kegels und schneidet die Fläche in zwei parallelen geraden Linien, die sich auf einer Seite des Kegels in unendlicher Entfernung schneiden. Nehmen wir den unendlich weit gerückten Durchschnittspunct für N', so ist, indem es im engern Sinne nur noch eine einzige Tangential-Ebene gibt, N auf dieser Tangential-Ebene der Berührungspunct. Die beiden Durchschnittspuncte M und M' der Tangente des Asymptoten-Kegels mit der Fläche und der Berührungspunct N auf der durch diese Tangente des Asymptoten-Kegels an die Fläche gelegten Tangential-Ebene bilden ein Dreieck, das bei jeder andern Annahme der Tangente ein anderes wird. Der Inhalt einer Pyramide, welche ein solches Dreieck zur Basis und den Mittelpunct der Fläche zur Spitze hat, ist constant.

Betrachten wir denjenigen Eckpunct einer so bestimmten Pyramide, der auf der Fläche liegt, als die Spitze derselben, in welcher alsdann, als Seiten, die beiden durch diesen Punct gehenden Erzeugenden der Fläche und ein Durchmesser derselben zusammenstossen, so liegt die Basis in derjenigen Ebene, welche durch die beliebig angenommene Tangente des Asymptoten-Kegels und den Mittelpunct geht. Hiernach ergibt sich die folgende Aussage des eben bewiesenen Satzes.

In jedem Puncte eines einschaligen Hyperboloids stossen zwei gerade Linien der zwiefachen Erzeugung und ein Durchmesser desselben zusammen, so dass sie eine körperliche Ecke bilden, von der eine Tangential-Ebene des Asymptoten-Kegels eine Pyramide abschneidet. Der Inhalt dieser Pyramide bleibt constant, wie auch die Spitze derselben auf der Fläche fortrücken und wie sich auch die Tangential-Ebene, den Asymptoten-Kegel umhüllend, drehen mag.

118. Um die vorstehenden Sätze in ihrem Zusammenhange mit verwandten zu beweisen, wollen wir die Fläche auf irgend drei, auf einander senkrechte, in ihrem Mittelpuncte sich schneidende Coordinaten-Axen beziehen und demnach wiederum durch die folgende Gleichung darstellen:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz = M. \text{ *)} \qquad (1)$$

Wenden wir auf diese Gleichung die Umformungsweise der 1. Nummer an, so kommt, indem wir

$$\begin{aligned} x + a''y + a'z &\equiv x_{,}, \\ y + b'z &\equiv y_{,}, \\ z &\equiv z_{,}, \end{aligned} \qquad (2)$$

setzen, die Gleichung:

$$Ax_{,}^2 + \frac{\Xi_2}{A}.y_{,}^2 + \frac{\Theta_3}{\Xi_2}.z_{,}^2 = M.$$

*) Es ist hierbei, wenn wir uns auf die allgemeine Gleichungs-Form zurückbeziehen:

$$M = -\frac{\Phi}{\Theta_3},$$

und, umgekehrt, reducirt sich der allgemeine Ausdruck $-\frac{\Phi}{\Theta_3}$, wenn wir die Gleichungs-Form des Textes der allgemeinen substituiren, indem wir C, C', C'' verschwinden lassen und D (oder A''') mit (−M) vertauschen, in Folge der Gleichung VIII der 10. Nummer auf −M.

Bei der durchaus willkührlich angenommenen Richtung der drei rechtwinkligen ursprünglichen Coordinaten-Axen stellen die Gleichungen (2) irgend drei zugeordnete Diametral-Ebenen der Fläche dar. Die Durchschnittslinien je zweier derselben sind also irgend drei zugeordnete Durchmesser der Fläche, für deren Gleichungen sich hiernach die folgenden ergeben:

$$\begin{array}{lll} z = 0, & y = 0, & (z_{,}, y_{,}), \\ z = 0, & x = \alpha'' y, & (z_{,}, x_{,}), \\ y = \beta' x, & x = \alpha' z, \text{*}) & (y_{,}, x_{,}). \end{array} \tag{4}$$

Aus der Verbindung dieser Gleichungen mit der Gleichung der Fläche erhalten wir für die Quadrate der halben Längen dieser Durchmesser, welche wir durch ρ^2, σ^2 und τ^2 bezeichnen wollen:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{M}{A}, \\ \sigma^2 &= (1+\alpha''^2)\frac{AM}{\Xi_2}, \\ \tau^2 &= (1+\alpha'^2+\beta'^2)\frac{\Xi_2 M}{\Theta_3}. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Gleichung (3) können wir hiernach, indem wir die drei eben bestimmten zugeordneten Durchmesser zu Coordinaten-Axen nehmen und x_2, y_2 und z_2 Parallel-Coordinaten bedeuten lassen, auch auf folgende Weise schreiben:

$$\frac{x_2^2}{\rho^2}+\frac{y_2^2}{\sigma^2}+\frac{z_2^2}{\tau^2} = 1. \tag{6}$$

Wir wollen wieder, wie in der vorigen Nummer, diejenigen Winkel, welche die zugeordneten Halb-Durchmesser ρ und σ, ρ und τ, σ und τ bezüglich mit einander bilden, durch ε'', ε' und ε bezeichnen, und ferner noch diejenigen drei Winkel, welche an den Axen ρ, σ und τ von den entsprechenden paarweise zusammengestellten Diametral-Ebenen gebildet werden, durch ζ, ζ' und ζ''. Dann ist, nach bekannten Formeln:

$$\begin{aligned} \sin^2\varepsilon'' &= \frac{1}{1+\alpha''^2}, \\ \sin^2\varepsilon' &= \frac{1+\beta'^2}{1+\alpha'^2+\beta'^2}, \\ \sin^2\varepsilon &= \frac{1+a'^2+a''^2}{(1+\alpha''^2)(1+\alpha'^2+\beta'^2)}; \end{aligned} \tag{7}$$

und ferner:

---

*) Es ist hierbei nach den ersten Nummern des ersten Paragraphen oder auch nach der 20.:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$

$$a'' = -\alpha'' = \frac{B''}{A}, \qquad a' = -(\alpha' - \alpha''\beta') = \frac{B'}{A},$$

$$b' = -\beta' = \frac{\Psi_{03}}{\Xi_2}, \qquad (a' - a''b') = -\alpha' = \frac{\Psi_{13}}{\Xi_2}.$$

$$\sin^2\zeta = \frac{1}{1+\beta'^2},$$

$$\sin^2\zeta' = \frac{1+\alpha''^2}{1+a'^2+a''^2}, \tag{8}$$

$$\sin^2\zeta'' = \frac{1+\alpha'^2+\beta'^2}{(1+\beta'^2)(1+a'^2+a''^2)}.$$

Nennen wir endlich noch, wie früher, diejenigen Winkel, welche die drei Halb-Durchmesser ρ, σ und τ mit den drei gegenüberliegenden Diametral-Ebenen bilden, δ, δ' und δ'', so ist nach bekannter trigonometrischer Formel:

$$\sin\delta'' = \sin\varepsilon'\sin\zeta,$$

und folglich:

$$\sin^2\delta''\sin^2\varepsilon'' = \sin^2\varepsilon'\sin^2\varepsilon''\sin^2\zeta = \frac{1}{(1+\alpha''^2)(1+\alpha'^2+\beta'^2)}, \tag{9}$$

wobei wir auch $\sin\delta''\sin\varepsilon''$ mit $\sin\delta'\sin\varepsilon'$ oder $\sin\delta\sin\varepsilon$ vertauschen können.

119. Aus den Gleichungen (5) und (9) der vorigen Nummer ergibt sich unmittelbar:

$$\rho^2\sigma^2\tau^2\sin^2\delta\sin^2\varepsilon = \frac{M^3}{\Theta_3} = -\frac{\Phi^3}{(\Theta_3)^4}. \tag{10}$$

Der letzte Ausdruck ist dem Producte der drei halben Axen der Fläche gleich, und somit sind die Sätze, die in der 117. Nummer ausführlich discutirt wurden, bewiesen.

Den Beweis derselben Sätze können wir auch unmittelbar an die Gleichung (3) anknüpfen. Denn, indem wir in dieser Gleichung $y_{,} = 0$, $z_{,} = 0$ setzen, bedeutet, in Folge der identischen Gleichungen (2), $x_{,}$ die Länge des Halb-Durchmessers ρ; indem wir $x_{,} = 0$, $z_{,} = 0$ setzen, bedeutet $y_{,}$ den, parallel mit der ursprünglichen Axe Y genommenen, Abstand des Endpunctes des Halb-Durchmessers σ von der Diametral-Ebene $y_{,,}$ oder, was dasselbe ist, von dem Durchmesser ρ, und ist also gleich $\sigma\sin\varepsilon''$; indem wir endlich $x_{,} = 0$, $y_{,} = 0$ setzen, bedeutet $z_{,}$ den, parallel mit der ursprünglichen Axe X genommenen und also kürzesten Abstand des Endpunctes des Halb-Durchmessers τ von der Ebene $z_{,}$ und ist also gleich $\tau\sin\delta''$. Hiernach kommt, wie eben,

$$\rho\sigma\tau\sin\varepsilon''\sin\delta'' = V\left(\frac{M^3}{\Theta_3}\right).$$

120. Aus den Gleichungen (5) und (7) erhalten wir ferner:

$$(\rho\sigma\sin\varepsilon'')^2 + (\sigma\tau\sin\varepsilon')^2 + (\sigma\tau\sin\varepsilon)^2 = \frac{\Phi^2}{(\Theta_3)^2}\left\{\frac{1}{\Xi_2} + (1+\beta'^2)\frac{\Xi_2}{A\Theta_3} + (1+a'^2+a''^2)\frac{A}{\Theta_3}\right\}.$$

Es ist aber:

$$1+\beta'^2 = \frac{(\Xi_2)^2+(\Psi_{03})^2}{(\Xi_2)^2} = \frac{(\Xi_2)^2+\Xi_1\Xi_2-A\Theta_3}{(\Xi_2)^2},$$

$$1+a'^2+a''^2 = \frac{A^2+B'^2+B''^2}{A^2},$$

wonach sich für die Summe der beiden Ausdrücke in der Klammer des zweiten Theiles der vorstehenden Gleichung

$$\frac{\Xi_2+\Xi_1}{A\Theta_2}$$

und für die Summe aller drei Ausdrücke

$$\frac{A+A'+A''}{\Theta_3}$$

ergibt. Es ist also:

$$(\rho\sigma\sin\varepsilon'')^2+(\rho\tau\sin\varepsilon')^2+(\sigma\tau\sin\varepsilon)^2=(A+A'+A'')\cdot\frac{\Phi^2}{(\Theta_3)^3}. \qquad (11)$$

Der erste Theil dieser Gleichung bedeutet die Summe der Quadrate der zwischen je zwei der drei zugeordneten halben Durchmesser enthaltenen Parallelogramme, der zweite Theil ist gleich der Quadrat-Summe der Producte je zweier der drei halben Axen.

Die Summe der Quadrate der zwischen je zwei von irgend drei zugeordneten Durchmessern einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung enthaltenen Parallelogramme ist constant.

Es ist nur eine andere Deutungsweise der letzten Gleichung, wenn wir sagen, dass die Quadrat-Summe der Seitenflächen eines der Fläche umschriebenen Parallelepipeds, dessen Kanten irgend drei zugeordneten Durchmessern parallel sind, oder auch dass die Quadrat-Summe der Flächen dreier Durchschnitts-Curven der Fläche, die in irgend drei zugeordneten Diametral-Ebenen liegen, constant ist.

Dividiren wir die letzte Gleichung durch die Gleichung (10), so kommt, indem wir zugleich berücksichtigen, dass,

$$\sin\varepsilon''\sin\delta''=\sin\varepsilon'\sin\delta'=\sin\varepsilon\sin\delta, \qquad (12)$$

die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{1}{\tau\sin\delta''}\right)^2+\left(\frac{1}{\sigma\sin\delta'}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho\sin\delta}\right)^2=-(A+A'+A'')\frac{\Theta_3}{\Phi}. \qquad (13)$$

Die geometrische Deutung dieser Gleichung gibt den folgenden Satz:

Wenn man von einem Endpuncte jedes von drei zugeordneten Durchmessern auf die Ebenen der jedesmaligen beiden andern ein Perpendikel fällt, so ist die Quadrat-Summe der reciproken Werthe solcher drei Perpendikel constant.

Diese Perpendikel können wir auch als die Projectionen der drei zugeordneten Durchmesser auf solche drei gerade Linien, die auf den drei entsprechenden Diametral-Ebenen senkrecht stehen, bezeichnen.

121. Aus den Gleichungen (5) ergibt sich ferner:

$$\rho^2+\sigma^2+\tau^2=M\left\{\frac{1}{A}+(1+\alpha''^2)\frac{A}{\Xi_2}+(1+\alpha'^2+\beta'^2)\frac{\Xi_2}{\Theta_3}\right\}.$$

Die Summe der beiden ersten Glieder in der Klammer des zweiten Theiles der vorstehenden Gleichung ist:

$$\frac{A+A'}{\Xi_2}$$

und für das dritte Glied erhält man, für α' und β' die Werthe eingesetzt und zugleich die identischen Gleichungen IV der 10. Nummer berücksichtigt:

$$\frac{(\Xi_2)^2+(\Psi_{03})^2+(\Psi_{13})^2}{\Xi_2\Theta_3} = \frac{\Xi+\Xi_1+\Xi_2}{\Theta_3} - \frac{A+A'}{\Xi_2}.$$

Es kommt also:

$$\rho^2+\sigma^2+\tau^2 = -(\Xi+\Xi_1+\Xi_2)\frac{\Phi}{(\Theta_3)^2}, \tag{14}$$

und da der zweite Theil dieser Gleichung der Quadrat-Summe der drei Halb-Axen der Fläche gleich ist, ist hiermit der nachstehende Satz bewiesen.

Die Quadrat-Summe irgend dreier zugeordneter Durchmesser einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung ist constant.

Ist diese Summe, in dem Falle eines Hyperboloids, insbesondere für die drei Axen gleich Null, so ist sie es also auch für je drei zugeordnete Durchmesser.

Wir können den eben bewiesenen Satz auch aus dem entsprechenden Satze der Ebene, dass für einen gegebenen Kegelschnitt die Quadrat-Summe irgend zweier zugeordneten Durchmesser constant ist, ableiten. Es seien zu diesem Ende ρ, σ und τ irgend drei zugeordnete Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung und überdiess ρ' irgend ein vierter Halb-Durchmesser derselben. Dann können wir in der Ebene von σ und τ statt dieser beiden zugeordneten Halb-Durchmesser der Durchschnitts-Curve zwei andere σ'' und τ'' in der Art bestimmen, dass σ'' mit ρ und ρ' in derselben Ebene liegt. ρ, σ'' und τ'' sind alsdann drei neue zugeordnete Halb-Durchmesser der Fläche. Die beiden ersten derselben können wir mit zwei andern ρ' und σ''' vertauschen, die in derselben Ebene zugeordnete Halb-Durchmesser der Durchschnitts-Curve sind und von welchen der eine mit dem vierten ursprünglich beliebig angenommenen zusammenfällt. Endlich können wir noch in der Ebene von σ''' und τ'' diese beiden Halb-Durchmesser mit irgend zwei andern der Durchschnitts-Curve, mit σ' und τ', vertauschen. Dann sind ρ', σ' und τ' drei Halb-Durchmesser der Fläche, von denen einer mit dem vierten beliebig angenommenen zusammenfällt und die beiden andern irgend zwei ihm zugeordnete sind. Es ist aber nach dem angeführten Satze:

$$\begin{aligned}\sigma^2+\tau^2 &= \sigma''^2+\tau''^2,\\ \rho^2+\sigma''^2 &= \rho'^2+\sigma'''^2,\\ \sigma'''^2+\tau''^2 &= \sigma'^2+\tau'^2;\end{aligned}$$

mithin auch:

$$\rho^2+\sigma^2+\tau^2 = \rho'^2+\sigma'^2+\tau'^2.$$

Dividiren wir die Gleichung (13) durch die Gleichung (9), indem wir zugleich die Doppel-Gleichung (12) berücksichtigen, so kommt:

$$\left(\frac{1}{\sigma\tau\sin\varepsilon\sin\delta}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho\tau\sin\varepsilon'\sin\delta'}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho\sigma\sin\varepsilon''\sin\delta''}\right)^2 = (\Xi+\Xi_1+\Xi_2)\left(\frac{\Theta_3}{\Phi}\right)^2.$$

Wenn wir die Curven in jeder von irgend drei zugeordneten Diametral-Ebenen auf solche drei Ebenen projiciren, die auf dem jedesmaligen zugeordneten Durchmesser senkrecht stehen, so ist die Quadrat-Summe der reciproken Werthe der Flächen solcher drei Projectionen constant.

122. Es sei

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\sigma^2}+\frac{z^2}{\tau^2} = 1$$

die Gleichung einer gegebenen Fläche der zweiten Ordnung, bezogen auf irgend drei ihrer zugeordneten Durchmesser. Es sei ferner ρ' irgend ein Halb-Durchmesser, der mit den Coordinaten-Ebenen (x), (y) und (z) bezüglich die Winkel $\Im$, $\Im'$ und $\Im''$ bilde. Alsdann erhalten wir für die Coordinaten des Endpunctes dieses Durchmessers, indem wir δ, δ' und δ'' in der bisherigen Bedeutung lassen:

$$x = \rho' . \frac{\sin \Im}{\sin \delta}, \qquad y = \rho' . \frac{\sin \Im'}{\sin \delta'}, \qquad z = \rho' . \frac{\sin \Im''}{\sin \delta''}.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung der Fläche ein, so kommt:

$$\left(\frac{\sin \Im}{\rho \sin \delta}\right)^2 + \left(\frac{\sin \Im'}{\sigma \sin \delta'}\right)^2 + \left(\frac{\sin \Im''}{\tau \sin \delta''}\right)^2 = \frac{1}{\rho'^2}, \tag{15}$$

und wenn wir diese Gleichung mit der Gleichung (10) multipliciren und zugleich die Doppel-Gleichung (12) berücksichtigen:

$$(\sigma\tau \sin\varepsilon \sin\Im)^2 + (\rho\tau \sin\varepsilon' \sin\Im')^2 + (\rho\sigma \sin\varepsilon'' \sin\Im'')^2 = -\frac{1}{\rho'^2} \cdot \frac{\Phi^3}{\Theta_3^4}. \tag{16}$$

Es ist aber $\sigma\tau \sin\varepsilon$, noch mit der *Ludolph*'schen Zahl multiplicirt, der Flächen-Inhalt der Durchschnitts-Curve in der Ebene der beiden Halb-Durchmesser σ und τ; multipliciren wir ausserdem noch mit $\sin\Im$, so erhalten wir diesen Flächen-Inhalt, projicirt auf eine Ebene, welche auf dem beliebigen Halb-Durchmesser ρ' senkrecht steht, und also, wie die Richtung von diesem, durchaus beliebig angenommen werden kann. Auf diese Weise ergibt sich die geometrische Deutung des ersten Theiles der vorstehenden Gleichung und somit der nachstehende Satz.

Wenn wir die drei Durchschnitts-Curven einer gegebenen Fläche der zweiten Ordnung in irgend drei zugeordneten Diametral-Ebenen auf irgend eine gegebene Ebene projiciren, so ist die Quadrat-Summe der drei Projectionen constant.

123. Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, für den Fall der beiden Paraboloide und des parabolischen Cylinders, die Dimensionen der Fläche zu bestimmen. Wir können diese Discussion durch eine einfache Betrachtung an die Entwickelungen der 111. Nummer anknüpfen.

Die nachstehende Gleichung:

$$s^6 + (A + A' + A'')\frac{\Theta_3}{\Phi} . s^4 + (\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)\left(\frac{\Theta_3}{\Phi}\right)^2 s^2 + \frac{\Theta_3^4}{\Phi^3} = 0, \tag{1}$$

deren drei Wurzeln uns in der 111. Nummer die reciproken Werthe der drei Halb-Axen-Quadrate der durch die allgemeine Gleichung

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0 \tag{2}$$

dargestellten Fläche gegeben haben, kann ebenfalls zur Bestimmung der Dimensionen dieser Fläche dienen, wenn dieselbe, durch das Verschwinden von Θ_3, in ein Paraboloid übergeht. Alsdann sind sämmtliche drei Werthe, welche die Gleichung (1) für s^2 gibt, gleich Null, aber zugleich ist ersichtlich, dass diese drei verschiedenen Werthe nicht unendlich kleine Grössen derselben Ordnung sein können. Die Summe der drei Werthe ist nemlich von derselben Ordnung der Kleinheit als das verschwindende Θ_3, das ist also auch die Ordnung der Kleinheit für den grössten dieser Werthe; die Summe der Producte je zweier der drei Werthe ist von derselben Ordnung als $(\Theta_3)^2$, woraus folgt, dass wenigstens zwei der drei Werthe von derselben Ordnung als Θ_3 sind; endlich ist das Product der drei Werthe von derselben Ordnung als $(\Theta_3)^4$, woraus folgt, dass der dritte Werth von

s^2 mit $(\Theta_3)^2$ von gleicher Ordnung der Kleinheit ist. Die beiden ersten Wurzel-Werthe wollen wir zur Unterscheidung durch σ^2 bezeichnen. Indem wir von dem dritten Wurzel-Werthe s^2, als einem unendlich Kleinen höherer Ordnung, absehen, erhalten wir unmittelbar zur Bestimmung von σ^2 die quadratische Gleichung:

$$\sigma^4 + (A + A' + A'')\frac{\Theta_3}{\Phi}\cdot\sigma^2 + (\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)\left(\frac{\Theta_3}{\Phi}\right)^2 = 0. \qquad (3)$$

Bezeichnen wir die Wurzeln dieser Gleichung durch σ'^2 und σ''^2, so ergibt sich für das Product derselben:

$$\sigma'^2\sigma''^2 = (\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)\left(\frac{\Theta_3}{\Phi}\right)^2, \qquad (4)$$

und da das Product der drei Wurzeln der ursprünglichen Gleichung (1) gleich ist

$$-\frac{(\Theta_3)^4}{\Phi^4},$$

so finden wir für s^2 sogleich den nachstehenden Ausdruck:

$$s^2 = -\frac{1}{\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi}\cdot\frac{(\Theta_3)}{\Phi}. \qquad (5)$$

Wenn wir überhaupt, in dem Falle, dass die Fläche einen Mittelpunct hat — und wir wollen als Normal-Fall ein Ellipsoid betrachten — den reciproken Werth der grössten Halb-Axe durch s und die reciproken Werthe der beiden andern Halb-Axen durch σ' und σ'' bezeichnen, so bedeuten bekanntlich $\frac{\sigma'^2}{s}$ und $\frac{\sigma''^2}{s}$ die reciproken Werthe der halben Parameter der Durchschnitts-Curven in den beiden durch die grösste Axe gehenden Hauptschnitten. Dieselbe Bestimmung können wir auch auf den Fall der Paraboloide übertragen. Aus der Gleichung (3) erhalten wir

$$\sigma'^4 + \sigma''^4 = \{(A + A' + A'')^2 - 2(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)\}\left(\frac{\Theta_3}{\Phi}\right)^2,$$

und hiernach und aus den Gleichungen (4) und (5):

$$\frac{\sigma'^4}{s^2} + \frac{\sigma''^4}{s^2} = -\frac{\{(A + A' + A'')^2 - 2(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)\}(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)}{\Phi},$$

$$\frac{\sigma'^4}{s^2}\cdot\frac{\sigma''^4}{s^2} = \frac{(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)^4}{\Phi^2}.$$

Die Quadrate der reciproken Werthe der halben Parameter der Durchschnitts-Curven in den beiden Hauptschnitten des Paraboloids sind hiernach die beiden Wurzeln der nachstehenden in Beziehung auf q^2 quadratischen Gleichung:

$$\Phi^2 q^4 + \{(A + A' + A'')^2 - 2(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)\}(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)\Phi q^2 + (\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)^4 = 0. \qquad (6)$$

124. Die beiden Wurzeln dieser Gleichung sind insbesondere einander gleich, wenn

$$(A + A' + A'')(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)^2\{\tfrac{1}{4}(A + A' + A'')^2 - (\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)\} = 0, \qquad (7)$$

und wir erhalten alsdann für den gemeinschaftlichen Werth derselben:

$$q^2 = -\frac{\{(A + A' + A'')^2 - 2(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)\}(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)}{2\Phi}, \qquad (8)$$

Die Gleichung (7) wird erstens befriedigt, wenn

$$A + A' + A'' = 0:$$

eine Bedingung, die aber nur in dem Falle des hyperbolischen Paraboloids, wo nach der 27. Nummer Φ positiv ist und Ξ_2, Ξ_1 und Ξ negativ sind, Statt finden kann. Alsdann kommt:

$$q^2 = \frac{(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)^2}{\Phi}.$$

Die Curven in den beiden Hauptschnitten sind hier offenbar Parabeln, und haben gleichen Parameter. Bezeichnen wir denselben durch 2p, so ist:

$$p = \frac{1}{q} = \frac{-\sqrt{\Phi}}{\Xi + \Xi_1 + \Xi}. \tag{8}$$

Die Gleichung (7) wird zweitens befriedigt, wenn

$$(A + A' + A'')^2 = 4(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi),$$

wonach das Paraboloid, weil Ξ_2, Ξ_1, Ξ, die unter sich im Zeichen übereinstimmen, hier positiv sind, ein elliptisches ist, wonach Φ einen negativen Werth hat. Alsdann kommt:

$$q^2 = -\frac{(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)^2}{\Phi},$$

und für den halben Parameter der beiden gleichen, in den beiden Hauptschnitten liegenden Parabeln des elliptischen Paraboloids:

$$p = \frac{1}{q} = \frac{\sqrt{-\Phi}}{\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi}. \tag{9}$$

Das elliptische Paraboloid gehört in diesem Falle zu den Rotations-Flächen, denen wir in einem spätern Paragraphen noch eine besondere Aufmerksamkeit schenken werden. *)

125. Dasselbe Verfahren, welches wir in der vorigen Nummer angewendet haben, um die Parameter der beiden Hauptschnitte eines gegebenen Paraboloids zu bestimmen, können wir auch anwenden, um den Parameter des Hauptschnittes eines parabolischen Cylinders zu finden.

In dem Falle eines Cylinders überhaupt reducirt sich die Gleichung (1) zur Bestimmung der reciproken Werthe der Quadrate der beiden endlichen Halb-Axen desselben, auf die folgende:

$$s^4 + (A + A' + A'')\frac{\Theta_3}{\Phi}\cdot s^2 + (\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)\left(\frac{\Theta_3}{\Phi}\right)^2 = 0, \tag{10}$$

wobei der Ausdruck $\frac{\Theta_3}{\Phi}$ unter unbestimmter Form erscheint und beliebig durch einen der folgenden:

---

*) Um die beiden Werthe von q unmittelbar durch eine quadratische Gleichung zu bestimmen, erhalten wir aus den Gleichungen (3), (4) und (5)

$$q' + q'' = \pm (A + A' + A'')\cdot\sqrt{\left(-\frac{\Xi + \Xi_1 + \Xi_2}{\Phi}\right)}$$

$$q'q'' = -\frac{(\Xi + \Xi_1 + \Xi_2)^2}{\Phi}$$

wonach der Coefficient des zweiten Gliedes dieser quadratischen Gleichung irrational wird und ein doppeltes Zeichen zulässt, was jedoch, wenn wir bei q vom Zeichen abstrahiren, ohne Bedeutung ist.

$$\frac{\Xi_2}{\Theta_2},\quad \frac{\Xi_1}{\Theta_1},\quad \frac{\Xi}{\Theta},\quad \frac{\Xi_2+\Xi_1+\Xi}{\Theta_2+\Theta_1+\Theta}$$

ersetzt werden kann (112). Dieser Ausdruck wird durch das Verschwinden von Ξ_2, Ξ_1 und Ξ, wenn der Cylinder in einen parabolischen ausartet, gleich Null und mit ihm die beiden Wurzeln der vorstehenden Gleichung. Es ist aber ersichtlich, dass diese beiden Wurzeln nicht unendlich kleine Grössen derselben Ordnung sind, sondern dass die grössere Wurzel, die wir durch σ^2 unterscheiden wollen, von derselben Ordnung als $\frac{\Theta_3}{\Phi}$ ist, die kleinere s^2 aber von derselben Ordnung als das Quadrat dieses Ausdrucks. Indem wir diese letztere gegen die erstere vernachlässigen, erhalten wir zur Bestimmung von dieser unmittelbar:

$$\sigma^2 = -(A+A'+A'')\frac{\Theta_3}{\Phi},$$

und da in Folge der obigen Gleichung:

$$\sigma^2 s^2 = (\Xi_2+\Xi_1+\Xi)\left(\frac{\Theta_3}{\Phi}\right)^2,$$

zur Bestimmung der kleinern Wurzel:

$$s^2 = -\frac{\Xi_2+\Xi_1+\Xi}{A+A'+A''}\cdot\frac{\Theta_3}{\Phi}.$$

Hiernach ergibt sich endlich für das Quadrat des reciproken Werthes vom halben Parameter des Hauptschnittes:

$$\frac{\sigma^4}{s^2} = -\frac{(A+A'+A'')^3}{\Xi_2+\Xi_1+\Xi}\cdot\frac{\Theta_3}{\Phi} = -\frac{(A+A'+A'')^3}{\Theta_2+\Theta_1+\Theta}.$$

Der halbe Parameter ist gleich:

$$\frac{s}{\sigma^2} = \frac{1}{A+A'+A''}\cdot\sqrt{\left(-\frac{\Theta_2+\Theta_1+\Theta}{A+A'+A''}\right)},$$

und dieser Ausdruck ist immer reell, weil für den parabolischen Cylinder A, A′ und A″ unter sich im Zeichen übereinstimmen, aber mit jedem der drei Ausdrücke Θ_2, Θ_1 und Θ entgegengesetztes Zeichen haben. Es ist in Folge des Verschwindens von Ξ_2, Ξ_1, Ξ:

$$\begin{aligned} -\Theta_2 &= AC'^2 + A'C^2 - 2CC'B'', \\ -\Theta_1 &= AC''^2 + A''C^2 - 2CC''B', \\ -\Theta &= A'C''^2 + A''C'^2 - 2C'C''B. \end{aligned}$$

126. Nachdem wir in dem Vorstehenden die Axen der Flächen zweiter Ordnung nicht nur der Richtung, sondern auch der Grösse nach, bestimmt haben, sind diese Flächen vollkommen bekannt. Ein Blick auf die Gleichung (8) der 111. Nummer, deren Wurzeln die drei Halb-Axen-Quadrate der durch die allgemeine Gleichung:

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2B''xy+2B'xz+2Byz+2Cx+2C'y+2C''z+D \equiv \Omega = 0, \qquad (1)$$

dargestellten Fläche sind, zeigt uns, dass das Verhältniss dieser Axen unabhängig ist von Φ und also auch dann noch bestimmbar bleibt, wenn, durch das Verschwinden von Φ, die Fläche in einen Kegel oder einen ellipsoidischen Punct ausartet. Durch dieses Axen-Verhältniss ist die Natur der Fläche und hiernach sind durch Φ die Dimensionen derselben bestimmt. Alle Flächen, welche

dasselbe Axen-Verhältniss haben, heissen ähnliche. Ein- und zweischalige Hyperboloide, welche denselben Asymptoten-Kegel haben, sind hiernach unter einander und mit diesem ähnliche Flächen zweiter Ordnung. Mit reellen und imaginären Ellipsoiden, deren Axen-Verhältniss dasselbe ist, gehört ein ellipsoidischer Punct als ähnliche Fläche zweiter Ordnung zusammen. Die Natur eines Kegels (und ellipsoidischen Punctes), die in dem Vorstehenden noch unbestimmt geblieben ist, wird durch das Verhältniss der drei Axen vollkommen characterisirt. Um dieses Verhältniss zu finden, ist es aber nicht nothwendig, vorher die Axen selbst zu bestimmen.

Nennen wir überhaupt die drei Halb-Axen einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung α, β und γ, so bedeuten, wenn α und β beide reell oder auch beide imaginär sind, $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\alpha}{\beta}$ die trigonometrischen Tangenten der Hälfte derjenigen beiden Neben-Winkel, welche von den beiden gleichen zugeordneten Durchmessern der Durchschnitts-Curve in dem, die beiden Halb-Axen α und β enthaltenden, Hauptschnitte oder in einer beliebigen, diesem Hauptschnitte parallelen, Ebene gebildet werden. Bezeichnen wir die fraglichen Nebenwinkel durch ξ und $(\pi - \xi)$, so kommt:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\xi + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\xi = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta},$$

und da überhaupt:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\xi + \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\xi = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin\xi}$$

so ergibt sich:

$$\sin\xi = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Wenn eine der beiden Halb-Axen α und β reell und die andere imaginär ist, so wird die Durchschnitts-Curve, welche in der vorigen Voraussetzung eine reelle oder imaginäre Ellipse war, nun eine Hyperbel. Dann wird der Winkel ξ imaginär; nach bekannter Formel ist aber, wenn wir die Asymptoten-Winkel der Hyperbel durch ω und $(\pi - \omega)$ bezeichnen,

$$\sin^2\xi = -\operatorname{tang}^2\omega,$$

und somit ergibt sich:

$$\operatorname{tang}\omega = \pm\frac{\alpha\beta\sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Gleichzeitig sind also in dem einen Falle die Winkel der gleichen zugeordneten Durchmesser, in dem andern Falle die Asymptoten-Winkel durch das Verhältniss der beiden Halb-Axen α und β gegeben.

127. Den nächsten Entwickelungen wollen wir, statt der Gleichung (8), die Gleichung (7) der 111. Nummer, deren drei Wurzeln die reciproken Werthe der drei Halb-Axen-Quadrate der Fläche (1) sind, also:

$$\frac{1}{\alpha^2}, \quad \frac{1}{\beta^2}, \quad \frac{1}{\gamma^2},$$

zu Grunde legen und, mit Rücksicht auf die Bemerkungen zu Anfang der vorigen Nummer, diese Gleichung, indem wir Φ der Einheit gleich setzen, sogleich mit der nachstehenden vertauschen:

$$s^6 + (A + A' + A'')\Theta_3 . s^4 + (\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)\Theta_3{}^2 . s^2 + \Theta_3{}^4 = 0. \qquad (2)$$

Die folgenden drei Ausdrücke:

$$\tfrac{1}{4} \cdot \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{\alpha^2\beta^2}, \qquad \tfrac{1}{4} \cdot \frac{(\alpha^2+\gamma^2)^2}{\alpha^2\gamma^2}, \qquad \tfrac{1}{4} \cdot \frac{(\beta^2+\gamma^2)^2}{\beta^2\gamma^2},$$

sind hiernach die drei Wurzeln einer neuen Gleichung dritten Grades, deren Coefficienten sich auf bekannte Weise aus den Coefficienten der Gleichung (2) ableiten lassen. Wir brauchen zu diesem Ende bloss in den Entwickelungen der beigefügten Note *) a, b, c mit $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ zu vertauschen und

---

*) Es sei

$$w^3 + pw^2 + qw + r = 0$$

eine gegebene Gleichung des dritten Grades und a, b, c seien ihre drei Wurzeln. Symmetrische Functionen dieser Wurzeln wollen wir, der Kürze halber durch ein einzelnes Glied derselben, das wir umklammern, darstellen, in der Art, dass wir zum Beispiel

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \equiv [a^2b]$$

setzen. Alsdann ist

$$-p = [a], \qquad q = [ab], \qquad -r = abc;$$

ferner ergibt sich:

$$\begin{aligned} -pq &= [a^2b] + 3abc, \\ -p^3 &= [a^3] + 3[a^2b] + 6abc, \\ q^3 &= [a^3b^3] + 3abc\,[a^2b] + 6a^2b^2c^2, \end{aligned}$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} [a^2b] &= -pq + 3r, \\ [a^3] &= -p^3 + 3pq - 3r, \\ [a^3b^3] &= q^3 - 3pqr + 3r^2. \end{aligned}$$

Die folgenden drei Ausdrücke:

$$\tfrac{1}{4} \cdot \frac{(a+b)^2}{ab}, \qquad \tfrac{1}{4} \cdot \frac{(a+c)^2}{ac}, \qquad \tfrac{1}{4} \cdot \frac{(b+c)^2}{bc}$$

sind, wenn wir der Kürze wegen:

$$-P = \frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(a+c)^2}{ac} + \frac{(b+c)^2}{bc},$$

$$Q = \frac{(a+b)^2(a+c)^2}{a^2bc} + \frac{(a+b)^2(b+c)^2}{ab^2c} + \frac{(a+c)^2(b+c)^2}{abc^2},$$

$$-R = \left\{ \frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc} \right\}^2,$$

setzen, die drei Wurzeln der nachstehenden Gleichung des dritten Grades:

$$t^3 + \tfrac{1}{4}Pt^2 + \tfrac{1}{16}Qt + \tfrac{1}{64}R = 0,$$

deren Coefficineten als symmetrische Functionen der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung sich durch die Coefficienten dieser letzteren ausdrücken lassen. Entwickeln wir zu diesem Ende, so finden wir

$$p = -(A + A' + A'')\Theta_3,$$
$$q = (\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)(\Theta_3)^2,$$
$$r = -(\Theta_3)^4,$$

zu setzen. Die Gleichung

$$t^3 + \tfrac{1}{4}Pt^2 + \tfrac{1}{16}Qt + \tfrac{1}{64}R = 0 \qquad (3)$$

ist alsdann die verlangte, wobei

$$-P = \frac{(A + A' + A'')(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)}{\Theta_3} + 3,$$

$$Q = \frac{(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)^3}{\Theta_3{}^2} - \frac{\{\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi - (A + A' + A'')^2\}\{(A + A' + A'')}{\Theta_3} + 3,$$

$$-R = \left\{\frac{(A + A' + A'')(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)}{\Theta_3} - 1\right\}^2.$$

Die drei Wurzeln der Gleichung (3) sind nothwendig reell, weil es die drei Wurzel-Quadrate der Gleichung (2) sind. Da ferner das letzte Glied, in Folge des vorstehenden Werthes von R,

---

$$-P = \frac{(a+b)^2c + (a+c)^2b + (b+c)^2a}{abc},$$
$$= \frac{[a^2b]}{abc} + 6,$$
$$= \frac{pq}{r} + 3;$$

$$Q = \frac{(a+b)^2(a+c)^2bc + (a+b)^2(b+c)^2ac + (a+c)^2(b+c)^2ab}{a^2b^2c^2},$$
$$= \frac{[a^3b^3]}{a^2b^2c^2} + \frac{[a^3] + 5[a^2b]}{abc} + 12,$$
$$= \frac{q^3}{r^2} - \frac{(q - p^2)p}{r} + 3;$$

$$-R = \left\{\frac{[a^2b]}{abc} + 2\right\}^2,$$
$$= \left\{\frac{pq}{r} - 1\right\}^2.$$

Die drei Coefficienten P, Q und R können nicht von einander unabhängig sein; dem entsprechend ergibt sich:

$$-R = (P + 4)^2.$$

Es ist klar, dass wir die drei Wurzeln der ursprünglichen Gleichung auch mit ihren reciproken Werthen vertauschen können; an die Stelle der ursprünglichen Gleichung kann also auch die folgende:

$$w^3 + \frac{q}{r}w^2 + \frac{p}{r}w + \frac{1}{r} = 0,$$

treten.

negativ ist, so sind nur zwei Fälle möglich. Es können erstens die Wurzeln alle drei positiv sein, und dann bedeuten sie die reciproken Werthe der Quadrate der Sinus der von den gleichen Durchmessern der Durchschnitts-Curven in den drei Hauptschnitten gebildeten Winkel. Das ist der Fall der ellipsoidischen Flächen. Es kann zweitens eine Wurzel positiv sein, während die beiden andern negativ sind. Das ist der Fall der hyperbolischen Flächen, mit Einschluss des Kegels. Die positive Wurzel behält hier die obige Bedeutung und bezieht sich auf denjenigen Hauptschnitt, welcher die Fläche in einer reellen, imaginären oder verschwindenden Ellipse schneidet. Die beiden negativen Wurzeln bedeuten, mit verändertem, positivem Zeichen genommen, die Quadrate der Cotangenten der von den Asymptoten der Durchschnitts-Hyperbeln in den beiden andern Hauptschnitten gebildeten Winkel. Für den Fall der Kegelfläche sind diese Winkel diejenigen, unter welchen, wenn wir aus der Fläche irgend einen geraden elliptischen Kegel schneiden, die beiden Axen der Basis, von der Spitze aus, gesehen werden. Der eine dieser beiden Winkel ist der grösste, den überhaupt irgend zwei Kegelseiten mit einander bilden, der andere der kleinste, den irgend zwei Seiten des Kegels, die mit der Axe desselben in einerlei Ebene liegen, mit einander bilden. Da jeder Seite des Asymptoten-Kegels eines einschaligen Hyperboloids eine Linie in jeder der beiden Erzeugungsweisen des letztern parallel ist, so folgt aus der ersten der vorstehenden Bemerkungen, dass, wenn die Gleichung (1) eine Fläche dieser Art darstellt, eine Wurzel der Gleichung (3) das Quadrat der Cotangente des grössten Winkels ist, unter welchem irgend zwei Linien der beiden Erzeugungen auf der Fläche sich schneiden, oder auch des grössten Winkels, den die Richtungen irgend zweier Linien derselben Erzeugung mit einander bilden.

In dem Falle ellipsoidischer Flächen wollen wir die drei Wurzeln der Gleichung (3) durch

$$\frac{1}{\sin^2\xi}, \qquad \frac{1}{\sin^2\xi'}, \qquad \frac{1}{\sin^2\xi''},$$

in dem Falle hyperbolischer Flächen durch

$$\frac{1}{\sin^2\xi}, \qquad -\operatorname{cotg}^2\omega, \qquad -\operatorname{cotg}^2\omega'$$

bezeichnen.

Es kann eine der drei Wurzeln der Gleichung (3) nur in dem Falle des Hyperboloids verschwinden, wenn, indem die Durchschnitts-Curve in einem der drei Hauptschnitte eine gleichseitige Hyperbel wird, etwa ω' gleich einem rechten Winkel ist. Diess fordert

$$(A + A' + A'')(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi) = \Theta_3,$$

und gibt alsdann

$$-\tfrac{1}{4}P = \frac{1}{\sin^2\xi} - \operatorname{cotg}^2\omega = 1,$$

oder, was von Vorne herein klar ist:

$$\xi = \omega.$$

Wir haben früher schon die beiden besondern Fälle hervorgehoben, dass einmal:

$$A + A' + A'' = 0,$$

das andere Mal:

$$\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi = 0.$$

Im erstern Falle lassen sich dem gegebenen Kegel, oder überhaupt dem Asymptoten-Kegel der gegebenen Fläche, rechtwinklige dreiseitige Ecken ein-, im zweiten Falle umschreiben (114, 115). In beiden Fällen ergibt sich gleichmässig

$$P = -3, \qquad R = -1,$$

und hieraus, wenn wir δ und R durch die Wurzeln der Gleichung (3) ausdrücken:

$$\operatorname{cotg}^2\omega + \operatorname{cotg}^2\omega' = \frac{1}{\sin^2\xi} - \frac{3}{4},$$

$$\operatorname{cotg}\omega \operatorname{cotg}\omega' = \frac{\sin\xi}{8}.$$

128. Wenn Flächen zweiter Ordnung, welche durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellt werden, ähnliche sein sollen, so muss die Constanten-Bestimmung in dieser Gleichung von der Art sein, dass die drei Coefficienten der Gleichung (3) dieselben Werthe behalten. Während wir, um auszudrücken, dass Flächen zweiter Ordnung identische sind, indem wir die Gleichung (8) der 111. Nummer an die Stelle der obigen Gleichung (3) setzen, drei Bedingungs-Gleichungen erhalten, ergeben sich hier, in Folge der Abhängigkeit der drei Coefficienten der letztgenannten Gleichung von einander, nur zwei Bedingungs-Gleichungen, für welche wir die folgenden nehmen können:

$$\frac{(A + A' + A'')(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)}{\Theta_3} = \varkappa,$$

$$\frac{(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)^3}{\Theta_3{}^2} + \frac{(A + A' + A'')^3}{\Theta_3} = \varkappa',$$

wobei $\varkappa$ und $\varkappa'$ zwei ein für alle Mal bestimmte Constanten bedeuten.

129. Die Discussion des Falles der beiden Paraboloide knüpft sich am einfachsten an die Gleichung (3) der 123. Nummer:

$$\sigma^4 + (A + A' + A'')\frac{\Theta_3}{\Phi}\cdot\sigma^2 + (\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi)\left(\frac{\Theta_3}{\Phi}\right)^2 = 0.$$

Das Verhältniss der beiden Wurzel-Quadrate dieser Gleichung ist unabhängig von $\frac{\Theta_3}{\Phi}$ und bleibt also auch dann unverändert, wenn, für den Fall der beiden Paraboloide, dieser Ausdruck verschwindet. Bezeichnen wir die beiden Wurzel-Quadrate durch

$$\frac{1}{\alpha^2}, \quad \frac{1}{\beta^2}$$

und setzen, analog wie in der 127. Nummer:

$$\sin^2\xi = -\operatorname{tang}^2\omega = \frac{4\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2)^2},$$

so ergibt sich unmittelbar:

$$\sin^2\xi = -\operatorname{tang}^2\omega = 4\cdot\frac{\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi}{(A + A' + A'')^2}.$$

Wenn das Paraboloid ein elliptisches ist, so sind Ξ_2, Ξ_1 und Ξ, die im Zeichen immer übereinstimmen, positiv, und ξ bedeutet den Winkel, den die gleichen zugeordneten Durchmesser der-

jenigen Durchschnitts-Ellipsen der Fläche, deren Ebenen auf der Axe derselben senkrecht stehen, mit einander bilden.

Wenn das Paraboloid ein hyperbolisches ist, so sind Ξ_2, Ξ_1 und Ξ negativ und ω bedeutet die Asymptoten-Winkel derjenigen Durchschnitts-Hyperbeln, deren Ebenen auf der Axe der Fläche senkrecht stehen; insbesondere die Winkel, welche diejenigen beiden Erzeugenden, die in der Tangential-Ebene im Scheitel der Fläche liegen, mit einander bilden. Endlich können wir diese Winkel auch als diejenigen bezeichnen, unter welchen zwei Ebenen, denen die Linien der beiden Erzeugungen in allen ihren Lagen parallel bleiben, sich schneiden. *)

Die Natur der Paraboloide ist bezüglich durch den Winkel ξ oder den Winkel ω characterisirt. Solche Paraboloide sind unter einander ähnlich, für welche dieser Winkel derselbe, also der Ausdruck

$$\frac{\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi}{(A + A' + A'')^2}$$

constant ist.

§. 7.

Rotations-Flächen. Kreisschnitte der Flächen zweiter Ordnung. Kreispuncte.

130. Wir haben in dem vorigen Paragraphen diejenigen Flächen, welche, unter der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten durch die allgemeine Gleichung

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0 \qquad (1)$$

dargestellt wurden, vollständig discutirt. Nur einen besondern Fall haben wir hierbei noch unerörtert gelassen, nemlich den Fall, dass die Fläche eine Rotations-Fläche ist. Diesem wollen wir die nächstfolgenden Entwicklungen widmen und zuvörderst wieder (95), unter der Voraussetzung, dass die Fläche einen Mittelpunct habe, statt der allgemeinen Gleichung, indem wir

---

*) Wenn wir die Entwicklungsweise der 118. Nummer beibehalten und nur, damit die dortige Gleichung (1) mit der vorstehenden Gleichung (1) des Textes übereinstimme,

$$-M \equiv 2Cx + 2C'y + 2C''z + D \equiv \mu w$$

setzen, so erhalten wir für den Fall der beiden Paraboloide durch das Verschwinden von Θ_3

$$Ax_,^2 + \frac{\Xi_2}{A} . y_,^2 + \mu w = 0,$$

oder auch

$$(Ax_, + \sqrt{\Xi_2} . y_,)\,(Ax_, - \sqrt{\Xi_2} . y_,) + A\mu w = 0.$$

Die Winkel ω sind hiernach diejenigen, welche die beiden Ebenen, deren Gleichungen

$$Ax_, \pm \sqrt{\Xi_2} . y_, = 0,$$

oder, in dem ursprünglichen Coordinaten-Systeme, die folgenden sind:

$$A(x + a''y + a'z) \pm \sqrt{\Xi_2}\,(y + b'z) = 0,$$

mit einander bilden. Auf diesem Wege finden wir denselben Ausdruck für tang ω als im Texte.

$$M = -\frac{\Phi}{\Theta_3}$$

setzen, die folgende zu Grunde legen:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz = M. \tag{2}$$

Wir haben in der 104. Nummer nachgewiesen, dass die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}(Aa + B''b + B') - (B'a + Bb + A'')a &= 0,\\ (B''a + A'b + B) - (B'a + Bb + A'')b &= 0,\end{aligned} \tag{3}$$

für a und b immer drei reelle Werthen-Paare geben, und hieraus den Schluss gezogen, dass jede Fläche der zweiten Ordnung drei reelle Axen-Richtungen hat. In particulären Fällen können indess die vorstehenden beiden Gleichungen einen gemeinschaftlichen Factor des ersten Grades in a und b haben. Diesem entspricht, dass sie sich auf die folgende Form bringen lassen:

$$\begin{aligned}B'(a + kb + l)(a - m) &= 0,\\ B'(a + kb + l)(b - n) &= 0.\end{aligned}$$

Alsdann ist durch

$$a = m, \qquad b = n,$$

die Richtung einer Axe, wie bisher, vollkommen bestimmt, während die Richtungen der beiden andern (auf einander senkrechten) Axen, unter der Bedingung, dass für jede derselben die Gleichung

$$a + kb + l = 0$$

befriedigt werde, beliebig angenommen werden können. Es folgt hieraus, dass der auf der ersten Axen-Richtung senkrechte, die jedesmaligen beiden andern Axen enthaltende, Hauptschnitt ein Kreis ist, bei welchem bekanntlich irgend zwei beliebige, auf einander senkrecht stehende, Durchmesser zugeordnete sind. In dem bezeichneten Falle ist die gegebene Fläche der zweiten Ordnung eine Rotations-Fläche, die zuerst bestimmte Axe die Rotations-Axe, die Ebene des auf ihr senkrechten Hauptschnittes die Aequatorial-Ebene und jede durch die Rotations-Axe gehende Ebene eine Meridian-Ebene der Fläche.

Den obigen Form-Bestimmungen entsprechend, erhalten wir die nachstehende identische Gleichung:

$$\begin{aligned}&\{Aa + B''b + B' - (B'a + Bb + A'')a\}(b - n)\\ \equiv\ &\{B''a + A'b + B - (B'a + Bb + A'')b\}(a - m),\end{aligned}$$

oder vereinfacht:

$$\begin{aligned}&(Aa + B''b + B')(b - n) + (B'a + Bb + A'')an\\ \equiv\ &(B''a + A'b + B)(a - m) + (B'a + Bb + A'')bm,\end{aligned}$$

und diese identische Gleichung löset sich in die nachstehenden sechs Gleichungen auf:

$$B'n = B'', \qquad Bm = B'', \qquad B'n = Bm, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned}Bn + A &= B'm + A',\\ (A'' - A)n &= B - B''m,\\ B' - B''n &= (A'' - A')m.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die drei Gleichungen (4) geben übereinstimmend:

$$m = \frac{B''}{B}, \qquad n = \frac{B''}{B'}, \tag{6}$$

Die drei Gleichungen (5) können zunächst auf nachstehende Weise geschrieben werden:

$$A - B'm = A' - Bn,$$

$$A - B''.\frac{m}{n} = A'' - B.\frac{1}{n},$$

$$A' - B''.\frac{n}{m} = A'' - B'.\frac{1}{m},$$

und lassen sich dann, indem man für m und n die eben gefundenen Werthe einsetzt, in folgende Doppel-Gleichung zusammenfassen:

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{BB''}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}, \tag{7}$$

welche somit die beiden Bedingungen ausdrückt, unter welchen die gegebene Fläche eine Rotations-Fläche ist. Nach der Bezeichnungsweise der 10. Nummer geht die letzte Doppel-Gleichung in die nachstehende über:

$$\frac{\Psi_{03}}{B} = \frac{\Psi_{13}}{B'} = \frac{\Psi_{23}}{B''}. \tag{8}$$

Um den gemeinschaftlichen Factor $(a + kb + l)$ der beiden Gleichungen (3) zu bestimmen, brauchen wir bloss etwa die erste derselben durch $(a - m)$ zu dividiren. Alsdann ergibt sich zunächst als Quotient des ersten Theiles dieser Gleichung:

$$B'a + Bb,$$

und als Rest:

$$(A'' - A + B'm)a + (Bm - B'')b - B',$$

ein Ausdruck, der, wenn wir für m seinen Werth aus (4) und für $(A'' - A)$ seinen Werth aus (7) einsetzen, in den folgenden übergeht:

$$\frac{BB'}{B''}.a - B' \equiv \frac{BB'}{B''}(a - m).$$

Der vollständige Quotient ist also:

$$B'a + Bb + \frac{BB'}{B''} \equiv B'(a + kb + l). \tag{9}$$

131. Wenn die durch die allgemeine Gleichung

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0 \tag{1}$$

dargestellte Fläche einen Mittelpunct hat, und wir die Coordinaten dieses Mittelpunctes durch z', y' und x' bezeichnen, so wird, nach dem Vorstehenden, die Rotations-Axe durch die folgenden Gleichungen dargestellt:

$$x - x' = m(z - z'), \qquad y - y' = n(z - z'),$$

welche, indem wir für m und n die obigen Werthe substituiren, in die folgende Doppel-Gleichung übergehen:

$$B(x - x') = B'(y - y') = B''(z - z'). \tag{10}$$

Nehmen wir ferner:

$$x - x' = a(z - z'), \qquad (y - y') = b(z - z'),$$

für die Gleichungen einer der unendlich vielen Axen, die auf der Rotations-Axe senkrecht stehen, so müssen a und b den ersten Theil der identischen Gleichuug (9) befriedigen, wonach

$$\frac{a}{B}+\frac{b}{B'}+\frac{1}{B''}=0.$$

Eliminiren wir a und b zwischen den letzten drei Gleichungen, so kommt:

$$\frac{x-x'}{B}+\frac{y-y'}{B'}+\frac{z-z'}{B''}=0, \tag{11}$$

für die Gleichung der Aequatorial-Ebene.

Dieselbe Gleichung hätten wir auch unmittelbar durch die Erwägung erhalten können, dass die Aequatorial-Ebene auf der Rotations-Axe senkrecht steht.

132. Für den Fall der beiden Paraboloide ist die Richtung der eigentlichen Axe durch die folgenden beiden Gleichungen (107):

$$a=\frac{\Psi_{23}}{\Psi_{03}}=-\frac{\Psi_{13}}{\Xi_2}, \qquad b=\frac{\Psi_{23}}{\Psi_{13}}=-\frac{\Psi_{03}}{\Xi_2}$$

gegeben. Wenn die Fläche eine Rotations-Fläche sein soll, so verwandeln sich die vorstehenden Ausdrücke, nach der Bedingungs-Gleichung (8), die auch hier ihre Geltung offenbar behält, in die folgenden:

$$a=\frac{B''}{B}=m, \qquad b=\frac{B''}{B'}=n.$$

Die Doppel-Gleichung (10) stellt also, wenn wir hier durch z', y' und x' die Coordinaten des Scheitels der Fläche bezeichnen, die Rotations-Axe, und die Gleichung (11) die Tangential-Ebene im Scheitel dar. (107). Alle Durchschnitts-Curven in Ebenen, die dieser Tangential-Ebene parallel sind, sind Kreise.

Es ist klar, dass nur ein elliptisches Paraboloid eine Rotations-Fläche sein kann, und, dem entsprechend, ist leicht zu zeigen, dass die Werthe von Ξ, Ξ_1, Ξ_2, wenn Θ_3 verschwindet, in Folge der Bedingungs-Gleichungen (8) sämmtlich positiv sind. Denn aus der Zusammenstellung der vorstehenden doppelten Werthe für a und b ergibt sich:

$$\Psi_{13}=-\frac{B''}{B}\cdot\Xi_2, \qquad \Psi_{03}=-\frac{B''}{B'}\cdot\Xi_2,$$

und wenn wir in den verschwindenden Ausdruck für Θ_3, dem wir auch nachstehende Form geben können:

$$A''\Xi_2-B\Psi_{03}-B'\Psi_{13},$$

substituiren und den gemeinschaftlichen Factor Ξ_2 fortlassen:

$$A''+\frac{BB''}{B'}+\frac{BB''}{B}=0. \tag{12}$$

Neben diese Bedingungs-Gleichung stellen sich, nach dem Principe der Symmetrie, sogleich die folgenden beiden:

$$\begin{aligned} A'+\frac{BB'}{B''}+\frac{B'B''}{B}&=0, \\ A+\frac{BB'}{B''}+\frac{B'B''}{B'}&=0 \end{aligned} \tag{12, a}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhalten wir nach einer einfachen Multiplication:

$$\Xi_2 \equiv AA' - B''^2 = B^2 + B'^2 + \left(\frac{BB'}{B''}\right)^2, \qquad (13)$$

woraus wir sehen, dass Ξ_2 und folglich, nach den Gleichungen IV der 10. Nummer, auch Ξ_1 und Ξ positive Werthe haben. Zugleich erhalten wir hier, für den Fall des elliptischen Rotations-Paraboloids, die folgende symmetrische Bedingungs-Gleichung:

$$\Xi + \Xi_1 + \Xi_2 = \left(\frac{BB'}{B''} + \frac{BB''}{B'} + \frac{B'B''}{B}\right)^2. \qquad (13, a)$$

Für den Fall des Cylinders bestehen die Bedingungs-Gleichungen (8) in Verbindung mit den Bedingungen, dass Θ_3 und Φ gleichzeitig verschwinden. So wie eine Rotations-Fläche, was eben bewiesen worden, kein hyperbolisches Paraboloid sein kann, so kann sie auch kein hyperbolischer Cylinder sein.

133. Wenn wir zusammenfassen, so ist ersichtlich, dass eine Rotations-Fläche der zweiten Ordnung entsteht, wenn irgend eine Curve derselben Ordnung um eine ihrer beiden, immer reellen, Axen sich dreht. Diese Curve kann eine reelle oder imaginäre Ellipse sein: dem ersten Falle entspricht ein reelles, dem zweiten ein imaginäres Rotations-Ellipsoid. Die Curve kann eine Hyperbel sein, und je nachdem diese um ihre reelle oder imaginäre Axe sich dreht, entsteht ein zweischaliges oder einschaliges Rotations-Hyperboloid. Die Curve kann in ein System von zwei reellen oder imaginären geraden Linien übergehen, und sich um eine derjenigen beiden immer reellen geraden Linien, welche die Winkel derselben halbiren, drehen: dann ergibt sich ein Rotations-Kegel oder Rotations-Punct. Dreht sich eine Parabel um ihre eigentliche Axe, so entsteht ein Rotations-Paraboloid; drehen sich zwei reelle oder imaginäre oder zusammenfallende parallele gerade Linien um ihre Mittel-Linie, so geht ein Rotations-Cylinder hervor, der reell oder imaginär ist, oder in eine gerade Linie ausartet.

In den Fällen der Parabel und zweier Parallel-Linien liegt die zweite Axe unendlich weit: eine Drehung um eine solche Linie aber ist eine parallele Verschiebung nach einer Richtung, die auf der Ebene der Parabel und der beiden Parallel-Linien steht; so dass einmal ein parabolischer Cylinder, das andere Mal ein System zweier parallelen Ebenen, die reell und imaginär sein und auch zusammenfallen können, hervorgeht. Hiermit in Uebereinstimmung lassen sich aus den drei Bedingungs-Gleichungen

$$\Xi_2 = 0, \qquad \Xi_1 = 0, \qquad \Xi = 0,$$

die Bedingungs-Gleichungen (8), welche überhaupt anzeigen, dass die bezügliche Fläche eine Rotations-Fläche ist, sogleich ableiten.

134. Wenn die beiden Gleichungen (1) identisch werden, und diess fordert:

$$A = A' = A'', \qquad B = B' = B'',$$

so kann die Richtung jeder beliebigen geraden Linie als Axen-Richtung genommen werden. Unter diesen Bedingungen ist die bezügliche Fläche eine Kugel.

135. Wenn wir überhaupt eine Rotations-Fläche, unter der Voraussetzung, dass sie einen Mittelpunct hat, wie in der 111. Nummer durch folgende Gleichung darstellen:

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B''xy + 2B'xz + 2Byz = 1,$$

so gehen die Gleichungen (4) derselben Nummer, wenn wir für a und b die auf die Rotations-Axe sich beziehenden Werthe (6) einsetzen und zugleich den reciproken Werth der halben Länge dieser Axe durch s bezeichnen, in die folgenden über:

$$\begin{aligned} A'' + \frac{B'B''}{B} + \frac{BB''}{B'} &= s^2, \\ A' + \frac{B'B''}{B} + \frac{BB'}{B''} &= s^2, \\ A + \frac{BB''}{B'} + \frac{BB'}{B''} &= s^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Addiren wir diese Gleichungen, so kommt:

$$A + A' + A'' + 2\left(\frac{B'B''}{B} + \frac{BB''}{B'} + \frac{BB'}{B''}\right) = 3s^2.$$

Da ferner, wenn wir das Quadrat des reciproken Werthes jeder der beiden andern einander gleichen Halb-Axen durch σ^2 bezeichnen (111, (8)),

$$A + A' + A'' = s^2 + 2\sigma^2$$

ist, so findet sich, wenn wir abziehen und den gemeinschaftlichen Factor 2 fortlassen:

$$\frac{B'B''}{B} + \frac{BB''}{B'} + \frac{BB'}{B''} = s^2 - \sigma^2. \tag{15}$$

Eliminirt man endlich nach einander aus jeder der Gleichungen (14) und der vorstehenden s^2, so kommt:

$$A'' - \frac{BB'}{B''} = A' - \frac{BB''}{B'} = A - \frac{B'B''}{B} = \sigma^2. \tag{16}$$

Wenn wir, der Kürze wegen,

$$\begin{aligned} A + A' + A'' &\equiv \Sigma, \\ \frac{BB'}{B''} + \frac{BB''}{B'} + \frac{B'B''}{B} &\equiv \Pi, \end{aligned}$$

setzen, so erhalten wir, nach dem Vorstehenden, die folgenden symmetrischen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \Sigma + 2\Pi &= 3s^2, \\ \Sigma - \Pi &= 3\sigma^2. \text{*)} \end{aligned} \tag{17}$$

---

*) Wenn einer der drei Coefficienten B, B' B'', etwa der letzte derselben, verschwindet, so verlieren die vorstehenden Gleichungen (14) — (17) ihre unmittelbare Geltung. Wir sehen zunächst, dass alsdann zugleich mit B'' noch ein zweiter der drei Coefficienten, etwa B', verschwinden muss. Dann erscheint, während $\frac{B'B''}{B}$ verschwindet, $\frac{B''}{B'}$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, und wenn wir diesen Ausdruck zwischen den beiden Gleichungen:

$$A' - B.\frac{B''}{B'} = A, \qquad A'' - B.\frac{B'}{B''} = A$$

eliminiren, so kommt:

$$(A - A')(A - A'') = B^2,$$

Wenn die Ausdrücke für s^2 und σ^2 beide positiv sind, so ist die Fläche ein Rotations-Ellipsoid oder Sphäroid wenn beide negativ sind, ist dieselbe imaginär. Wenn die Ausdrücke für s^2 und σ^2 entgegengesetzte Zeichen haben, ist die Fläche ein Hyperboloid und zwar, je nachdem der Ausdruck für s^2 oder der Ausdruck für σ^2 positiv ist, ein zweischaliges oder ein einschaliges.

136. Jede Curve der zweiten Ordnung mit einem Mittelpuncte hat bekanntlich vier Brennpuncte, von denen zwei immer reell und zwei immer imaginär sind. Dreht eine solche Curve sich um diejenige Axe, auf welcher die beiden reellen Brennpuncte liegen, so fallen die beiden reellen Brennpuncte aller Meridian-Curven der entstehenden Rotations-Fläche in dieselben beiden Puncte zusammen und heissen alsdann auch die beiden Brennpuncte dieser Fläche. Dreht sich hingegen eine Curve der zweiten Ordnung um diejenige Axe, welche durch die beiden imaginären Brennpuncte geht, so beschreiben die beiden reellen Brennpuncte einen Kreis, welcher in der Aequatorial-Curve der entstehenden Rotations-Fläche liegt und der geometrische Ort für die Brennpuncte aller Meridian-Curven ist. Diesen Kreis nennen wir den Focal-Kreis der Rotations-Fläche. Ein verlängertes Sphäroid entsteht durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre grosse Axe, ein abgeplattetes Sphäroid durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe. Es unterscheiden sich hiernach diese beiden Arten von Ellipsoiden, zwischen denen die Kugel den Uebergang bildet, durch das Zeichen des Ausdrucks von $(s^2 - \sigma^2)$, der im ersten Falle negativ, im zweiten positiv ist. Jenem entspricht also:

$$\Pi < 0,$$

diesem entspricht:

$$\Pi > 0.$$

Im ersten Falle hat die Fläche zwei Brennpuncte, aber keinen reellen Focal-Kreis. Um auf der Rotations-Axe die Lage von jenen zu bestimmen, brauchen wir bloss ihren Abstand vom Mittelpuncte zu kennen. Für das Quadrat desselben erhalten wir sogleich:

Diese Gleichung drückt also, in Verbindung mit $B'' = 0$ und $B' = 0$, aus, dass die fragliche Fläche eine Rotations-Fläche ist. Ferner ist alsdann

$$\sigma^2 = A, \qquad s^2 = A' + A'' - A,$$

und

$$\Pi = A' + A'' - 2A.$$

Die geometrische Nothwendigkeit der vorstehenden analytischen Resultate ergibt sich leicht. Eine Rotations-Fläche wird nemlich von jeder durch den Mittelpunct gehenden Ebene so geschnitten, dass ein Durchmesser der Durchschnitts-Curve mit einem Durchmesser der Aequatorial-Curve zusammenfällt. Dieser Durchmesser ist, weil er überhaupt der grösste oder kleinste Durchmesser der Fläche ist, eine Axe der Durchschnitts-Curve, und fällt, wenn wir die Schnitt-Ebene, welche eine ganz beliebige Richtung hat, als Ebene XZ nehmen und $B'' = 0$ setzen, entweder mit der Coordinaten-Axe X oder der Coordinaten-Axe Y zusammen. Findet das Erstere Statt, so kommt $\sigma^2 = A$. Dann ist aber auch derselbe Durchmesser eine Axe der Durchschnitts-Curve in der Coordinaten-Ebene XZ und somit auch $B' = 0$.

Ebenso löset sich auch die Bedingungs-Gleichung (7), welche sich auf die Coefficienten der ursprünglichen Gleichung der Fläche bezieht, für besondere Lagen dieser letztern gegen die Coordinaten-Axen, in die folgenden Systeme von drei Gleichungen auf:

$$\begin{aligned}
&B'' = 0, \quad B' = 0, \quad (A - A')(A - A'') - B^2 = 0,\\
&B'' = 0, \quad B = 0, \quad (A' - A)(A' - A'') - B'^2 = 0,\\
&B' = 0, \quad B = 0, \quad (A'' - A)(A'' - A') - B''^2 = 0.
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{s^2}-\frac{1}{\sigma^2}=3\left\{\frac{1}{\Sigma+2\Pi}-\frac{1}{\Sigma-\Pi}\right\}. \tag{18}$$

Im zweiten Falle hat die Fläche keine reellen Brennpuncte, aber einen reellen Focal-Kreis in der Aequatorial-Ebene, dessen Radius gleich ist:

$$\frac{1}{\sigma^2}-\frac{1}{s^2}=3\left\{\frac{1}{\Sigma-\Pi}-\frac{1}{\Sigma+2\Pi}\right\}. \tag{19}$$

Ein zweischaliges Rotations-Hyperboloid, für welches immer $\Pi > 0$, hat zwei reelle Brennpuncte, deren Abstand vom Mittelpuncte der Fläche durch den Ausdruck (19) bestimmt ist. Ein einschaliges Rotations-Hyperboloid, für welches immer $\Pi < 0$, hat keine reellen Brennpuncte, aber in der Aequatorial-Curve einen reellen um den Mittelpunct beschriebenen Focal-Kreis, dessen Radius dem Ausdrucke (18) gleich ist.

Auch eine imaginäre Rotations-Fläche hat entweder zwei reelle Brennpuncte oder einen reellen Focal-Kreis.

Ein elliptisches Rotations-Paraboloid hat nur einen reellen Brennpunct, ein parabolischer Cylinder nur einen Focal-Kreis, der in eine gerade Linie ausgeartet ist.

137. Um die in dem Vorstehenden entwickelten Werthe von s^2 und σ^2 durch die Coefficienten der ursprünglichen Gleichung der Fläche

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2B''xy+2B'xz+2Byz+2Cx+2C'y+2C''z+D=0$$

auszudrücken, brauchen wir bloss die Coefficienten der zu Grunde gelegten Gleichung mit den entsprechenden dieser ursprünglichen (die Cursiv-Schrift mit der gewöhnlichen) zu vertauschen und s^2 und σ^2 mit M zu multipliciren, indem wir für M, im Allgemeinen, $\left(-\frac{\Phi}{\Theta_3}\right)$ und in dem Falle des Cylinders $\left(-\frac{\Theta_2}{\Xi}\right)$ einsetzen. (111)

Für den zuletzt genannten Fall des Cylinders verschwinden die Ausdrücke für s^2, wonach:

$$\Sigma+2\Pi=0,$$

und für den Radius der parallelen Kreis- und Hauptschnitte erhält man

$$\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{\nu-\Pi},$$

wonach das Zeichen von Π bestimmt, ob der Cylinder ein reeller oder imaginärer ist.

Was die Bestimmung der Dimensionen des Rotations-Paraboloids betrifft, so ist diese bereits schon in der 124. Nummer enthalten. Denn der dort betrachtete Fall, dass die beiden Parameter des elliptischen Paraboloids einander gleich sind, ist derjenige, dass dieses Paraboloid eine Rotations-Fläche ist. Die Gleichungen (12) und (12, a) nemlich, welche im letztern Falle bestehen müssen, führen, wenn wir addiren, zu der folgenden:

$$A+A'+A''=-2\left(\frac{BB'}{B''}+\frac{BB''}{B'}+\frac{B'B''}{B}\right),$$

die, wenn wir quadiren und zugleich die Gleichung (13, a) berücksichtigen, die Bedingungs-Gleichung

$$(A+A'+A'')^2=4(\Xi_2+\Xi_1+\Xi)$$

liefert, welche nach den angezogenen Nummern ausdrückt, dass die beiden Parameter einander gleich sind.

Der Abstand des Brennpunctes des Rotations-Paraboloids vom Scheitel desselben ist, wie für den Fall der Parabel, dem vierten Theile des Parameters gleich.

138. Wir können noch einen andern Weg, der von dem bisher verfolgten ganz verschieden ist, einschlagen, um die Rotations-Flächen zweiter Ordnung zu discutiren.

Im Allgemeinen schneiden sich zwei Flächen zweiter Ordnung nicht in ebenen Curven. Es geschieht diess nur dann, wenn ihre Gleichungen sich zu der Gleichung eines Systems zweier Ebenen verbinden lassen. Ist in diesem Falle eine der beiden Flächen insbesondere eine Kugel, so sind die Durchschnitts-Curven offenbar Kreise, und, umgekehrt, wenn eine Fläche von irgend einer Ebene in einem Kreise geschnitten wird, so lassen sich durch diesen Kreis unendlich viele Kugeln legen, von welchen jede die Fläche noch in einem zweiten Kreise schneidet. Wenn zwei sich schneidende Flächen einen gemeinsamen Mittelpunct haben, so ist dieser auch der Mittelpunct ihrer Durchschnitts-Curve und also, in dem particularisirten Falle, der gemeinsame Mittelpunct der beiden Durchschnitts-Kreise. Ueberdiess ist augenscheinlich, dass die Radien dieser beiden Kreise unter einander und dem Radius der Kugel gleich sind.

Die Richtungen, nach welchen eine Fläche der zweiten Ordnung in Kreisen geschnitten wird, ordnen sich, wenn überhaupt solche Richtungen vorhanden sind, immer paarweise zusammen und hangen, wenn überdiess der Mittelpunct der Fläche auch ihr Mittelpunct sein soll, paarweise von dem Radius einer, mit der Fläche concentrischen, Kugel ab.

Es sei

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2B''xy+2B'xz+2Byz = 1 \qquad (1)$$

die Gleichung der Fläche, bezogen auf ihren Mittelpunct, und

$$\sigma^2x^2+\sigma^2y^2+\sigma^2z^2 = 1 \qquad (2)$$

die Gleichung einer concentrischen Kugel; dann ist $\frac{1}{\sigma}$ der Radius dieser Kugel. Wenn wir diese beiden Gleichungen zu der Gleichung eines Systemes zweier Ebenen verbinden wollen, so muss nothwendig, in Folge dieser Verbindung, das constante Glied aus der resultirenden Gleichung ausfallen. Ziehen wir, dem gemäss, die beiden vorstehenden Gleichungen von einander ab, so kommt:

$$(A-\sigma^2)x^2+(A'-\sigma^2)y^2+(A''-\sigma^2)z^2+2B''xy+2B'xz+2Byz = 0. \qquad (3)$$

Damit der erste Theil dieser Gleichung sich in zwei Factoren des ersten Grades zerlegen lasse, muss die Bedingungs-Gleichung:

$$(A-\sigma^2)(A'-\sigma^2)(A''-\sigma^2)-(A-\sigma^2)B^2-(A'-\sigma^2)B'^2-(A''-\sigma^2)B''^2+2BB'B'' = 0 \qquad (4)$$

bestehen, und σ^2 so bestimmt werden, dass diese Gleichung befriedigt wird.

Die vorstehende Gleichung (4) stimmt genau mit der Gleichung (5) der 111. Nummer überein, durch welche die drei Halb-Axen der gegebenen Fläche bestimmt werden, in der Art, dass σ dem reciproken Werthe einer solchen Halb-Axe gleich ist. Es schneidet also eine Kugel, die aus dem Mittelpuncte der gegebenen Fläche mit einem Radius beschrieben wird, der einer der drei Halb-Axen gleich ist, die Fläche in zwei Kreisen. Diese Kugeln sind also reell, je nachdem es die drei Halb-Axen der Fläche sind. Wenn die Kugeln reell sind, so können die Durchschnitts-Ebenen immer noch imaginär sein. Auch wenn die Durchschnitts-Ebenen reell sind, können die Durchschnitts-Kreise in ihnen noch imaginär sein.

Auf diesen allgemeinen Fall werden wir später zurückkommen, zunächst aber den besondern in nähere Betrachtung ziehen, wo die beiden Factoren, in welche sich der erste Theil der Gleichung (3) zerlegen lässt, einander gleich sind, und der durch die nachstehenden drei Bedingungs-Gleichungen bezeichnet wird:

$$\begin{aligned}(A-\sigma^2)(A'-\sigma^2) &= B''^2,\\ (A-\sigma^2)(A''-\sigma^2) &= B'^2,\\ (A'-\sigma^2)(A''-\sigma^2) &= B^2.\end{aligned} \tag{5}$$

Dann fallen die beiden zusammengehörigen Kreisschnitte zusammen, in der Art, dass die bezügliche Kugel, welche früher die Fläche in zwei Ebenen schnitt, nun, indem diese Ebenen zusammenfallen, dieselbe in dem Umfange eines Kreises berührt. Es lässt sich überhaupt durch irgend zwei Kreisschnitte, deren Ebenen den eben bestimmten Diametral-Ebenen, in welchen zwei zusammengehörige Kreisschnitte liegen, parallel sind, immer eine Kugel legen: in dem fraglichen besondern Falle gibt es also auch immer eine Kugel, welche die Fläche in einem beliebigen Kreise berührt, in welchem diese Fläche von irgend einer Ebene, die den zusammenfallenden Diametral-Ebenen parallel ist, geschnitten wird. Es umhüllt also die Fläche eine Kugel von veränderlichem Radius, deren Mittelpunct auf einer geraden Linie fortrückt. Die Fläche ist also eine Rotations-Fläche und diese gerade Linie die Rotations-Axe.

Der reciproke Werth des Radius der Aequatorial-Curve der durch (1) dargestellten Rotations-Fläche zweiter Ordnung befriedigt, für σ eingesetzt, jede der drei Gleichungen (5). Eliminiren wir σ^2 zwischen diesen drei Gleichungen, so erhalten wir diejenigen beiden Bedingungs-Gleichungen, welche ausdrücken, dass die Fläche (1) wirklich eine Rotations-Fläche ist. Wenn wir je zwei der drei Gleichungen (5) mit einander multipliciren und das Product durch die jedesmalige dritte dividiren, so kommt:

$$(A-\sigma^2)^2 = \left(\frac{B'B''}{B}\right)^2, \qquad (A'-\sigma^2) = \left(\frac{BB''}{B'}\right)^2, \qquad (A''-\sigma^2)^2 = \left(\frac{BB'}{B''}\right)^2.$$

Wenn wir die Quadrat-Wurzeln aus diesen Gleichungen ausziehen, so müssen wir die positiven Vorzeichen nehmen; denn einerseits stimmen die Ausdrücke $(A-\sigma^2)$, $(A'-\sigma^2)$ und $(A''-\sigma^2)$ im Zeichen überein, und andrerseits zeigt die Gleichung:

$$(A'-\sigma^2)B'^2 + (A''-\sigma^2)B''^2 - 2BB'B'' = 0,$$

welche wir erhalten, wenn wir die erste der Gleichungen (5) mit $(A''-\sigma^2)$ multipliciren und dann von derselben die Gleichung (4) abziehen, dass dann ferner die genannten drei Ausdrücke mit dem Producte der drei Coefficienten B, B′ und B″ und also auch mit dem Producte je zweier derselben, getheilt durch den jedesmaligen dritten, gleiches Zeichen haben. Hiernach ergibt sich

$$\sigma^2 = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{BB''}{B} = A'' - \frac{BB'}{B''}: \tag{6}$$

dieselbe Gleichung, die wir früher (135, (16)) auf anderm Wege für die Bestimmung, dass die gegebene Fläche eine Rotations-Fläche ist, und für die Bestimmung des Werthes von σ^2 gefunden haben.

Wenn wir auf zwiefache Weise zwei der Gleichungen (5) zusammenstellen und beidesmal σ^4 eliminiren, dann ferner zwischen den beiden resultirenden Gleichungen auch σ^2 fortschaffen, so ergibt sich die folgende symmetrische Bedingungs-Gleichung:

$$(AA'-B''^2)(A-A') + (A'A''-B^2)(A'-A'') + (A''A-B^2)(A''-A) = 0,$$

welche wir für eine derjenigen beiden nehmen können, welche ausdrücken, dass die Fläche (1) eine Rotations-Fläche ist. Wenn wir diese durch die allgemeine Gleichung, welche den Erörterungen der 137. Nummer zu Grunde gelegt ist, darstellen, so können wir der letzten Gleichung die folgenden Formen geben:

$$\begin{aligned} \Xi(A'-A'')+\Xi_1(A''-A)+\Xi_2(A-A') &= 0, \\ A(\Xi_1-\Xi_2)+A'(\Xi_2-\Xi)+A''(\Xi-\Xi_1) &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

und dann neben die Doppel-Gleichung (5) der eben angezogenen Nummer stellen.*)

Wenn wir, unter der Voraussetzung, dass die Bedingungs-Gleichungen (5) befriedigt werden, aus dem ersten Theile der Gleichung (3) die Quadrat-Wurzel ziehen, so ergibt sich

$$\sqrt{A-\sigma^2}.x \pm \sqrt{A'-\sigma^2}.y \pm \sqrt{A''-\sigma^2}.z = 0,$$

wo die Vorzeichen so zu bestimmen sind, dass das Product der Coefficienten von x und y mit B'', der Coefficienten von x und z mit B' und der Coefficienten von y und z mit B im Zeichen übereinstimmen. Setzen wir für σ^2 die gefundenen Werthe und dividiren wir dann durch $\sqrt{BB'B''}$, so kommt:

$$\frac{x}{B}+\frac{y}{B'}+\frac{z}{B''} = 0.$$

Diese Gleichung stellt also die Aequatorial-Ebene der Fläche dar. Die Rotations-Axe erhalten wir, unmittelbar und in Uebereinstimmung mit der Gleichung (4), durch die Bedingung, dass dieselbe auf der Aequatorial-Ebene senkrecht steht.

139. Wenn wir die drei Gleichungen (5) addiren, so kommt:

$$(A-\sigma^2)(A'-\sigma^2)+(A-\sigma^2)(A''-\sigma^2)+(A'-\sigma^2)(A''-\sigma^2)-B^2-B'^2-B''^2 = 0, \tag{9}$$

und wir erkennen sogleich, dass diese Gleichung keine andere ist, als diejenige, welche wir erhalten, wenn wir die Gleichung (4) in Beziehung auf σ^2 differentiiren. Wir können hieraus, wie bekannt, den Schluss ziehen, dass die Gleichung (4) zwei gleiche Wurzeln hat, deren gemeinsamer Werth auch die Gleichung (6) befriedigt. Zwei der drei Axen einer Fläche der zweiten Ordnung müssen demnach einander gleich sein, wenn die Fläche eine Rotations-Fläche sein soll.

140. Auch das Umgekehrte findet Statt und eine Fläche der zweiten Ordnung ist dann nothwendig eine Rotations-Fläche, wenn zwei ihrer drei Axen einander gleich sind. Diess kommt darauf hinaus, dass die Gleichung (9), in Folge der Gleichung (4), in die drei Gleichungen (5) sich auflöset. Es ist leicht nachzuweisen, dass dieses wirklich der Fall ist. Zu diesem Ende bemerken wir zuvörderst, dass die folgenden drei Ausdrücke:

$$(A-\sigma^2)(A'-\sigma^2)-B''^2, \qquad (A-\sigma^2)(A''-\sigma^2)-B'^2, \qquad (A'-\sigma^2)(A-\sigma^2)-B^2,$$

im Zeichen übereinstimmen. Denn der erste Theil der Gleichung (4) geht, wenn wir $(A-\sigma^2)$, $(A'-\sigma^2)$, $(A''-\sigma^2)$, B'', B' und B bezüglich mit A, A', A'', B'', B' und B vertauschen, in das Θ_3 der 10. Nummer über. Wenn aber Θ_3 verschwindet, so haben nach den identischen Gleichungen IV der eben angezogenen Nummer Ξ_2, Ξ_1 und Ξ dasselbe Zeichen. Diesen Ausdrücken entsprechen aber

*) In Gleichungen, die in Beziehung auf die Constanten der Gleichung (1) homogen sind, können wir sogleich die Cursiv-Schrift mit der gewöhnlichen Schrift vertauschen.

die fraglichen drei Ausdrücke, die also ebenfalls unter einander gleiches Zeichen haben. Schreiben wir hiernach die Gleichung (9) unter der nachstehenden Form:

$$\{(A-\sigma_i^2)(A'-\sigma^2)-B''^2\}+\{(A-\sigma^2)(A''-\sigma^2)-B'^2\}+\{(A'-\sigma^2)(A''-\sigma^2)-B^2\}=0,$$

so ist klar, dass sie nur dadurch befriedigt werden kann, dass sie in die drei Gleichungen (5) zerfällt.

Wir haben hiernach in dieser Nummer einen dritten gleich einfachen Weg gezeigt, den wir bei der Discussion der Rotations-Flächen einschlagen können.*)

141. Wir haben in der 138. Nummer gezeigt, dass, wenn wir durch σ den reciproken Werth der Länge einer der drei Halb-Axen der durch die Gleichung (1) dargestellten Fläche zweiter Ordnung bezeichnen, die Gleichung (3) ein System von solchen zwei Ebenen darstellt, welche die Fläche in zwei Kreisen

---

*) Auch Herr *Cauchy* knüpft die Bestimmung der Rotations-Flächen daran, dass eine solche Fläche zwei gleiche Axen hat. Er verfährt hierbei im Wesentlichen auf folgende Art. Die Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der recipoken Werthe der drei Halb-Axen sind:

$$(\sigma^2-A)(\sigma^2-A')(\sigma^2-A'')-(\sigma^2-A)B^2-(\sigma^2-A')B'^2-(\sigma^2-A'')B''^2-2BB'B''=0,$$

lässt sich unter der folgenden Form schreiben:

$$\left(\sigma^2-A+\frac{B'B''}{B}\right)\left(\sigma^2-A'+\frac{BB''}{B'}\right)\left(\sigma^2-A''+\frac{BB'}{B''}\right)-\frac{B'B''}{B}\left(\sigma^2-A'+\frac{BB''}{B'}\right)\left(\sigma^2-A''+\frac{BB'}{B''}\right)$$
$$-\frac{BB''}{B'}\left(\sigma^2-A+\frac{B'B''}{B}\right)\left(\sigma^2-A''+\frac{BB'}{B''}\right)-\frac{BB'}{B''}\left(\sigma^2-A+\frac{B'B''}{B}\right)\left(\sigma^2-A'+\frac{BB''}{B'}\right)=0$$

und wenn wir, der Kürze halber,

$$A-\frac{B'B''}{B}\equiv\lambda,\qquad A'-\frac{BB''}{B'}\equiv\mu,\qquad A''-\frac{BB'}{B''}\equiv\nu$$

setzen und durch $BB'B''(\sigma^2-\lambda)(\sigma^2-\mu)(\sigma^2-\nu)$ dividiren, auch folgendergestalt:

$$\frac{\frac{1}{B^2}}{\sigma^2-\lambda}+\frac{\frac{1}{B'^2}}{\sigma^2-\mu}+\frac{\frac{1}{B''^2}}{\sigma^2-\nu}-\frac{1}{BB'B''}=0.$$

Differentiren wir diese Gleichung in Beziehung auf σ^2, so kommt:

$$\frac{\frac{1}{B^2}}{(\sigma^2-\lambda)^2}+\frac{\frac{1}{B'^2}}{(\sigma^2-\mu)^2}+\frac{\frac{1}{B''^2}}{(\sigma^2-\nu)^2}=0,$$

und diese Gleichung kann nur dann befriedigt werden, wenn

$$\sigma^2=\lambda=\mu=\nu.$$

Diese Gleichungen sind keine andern, als die Gleichungen (16) der 135. Nummer. — (Eigentlich folgt nur, dass σ^2 irgend zweien der drei Werthe λ, μ und ν gleich ist. Das Mangelhafte der Schlussweise wird aber durch das Princip der Symmetrie ergänzt.) Ueber die Theorie des Lichtes. Nach einem lithographirten Memoire des Freih. A. L. Cauchy, frei bearbeitet von F. X. Moth. Wien 1842. (II. Ueber Flächen der zweiten Ordnung).

schneidet und welche nur dann zusammenfallen, wenn diese Fläche eine Rotations-Fläche ist. Um in eine genauere Discussion solcher Kreisschnitte einzugehen, wollen wir die Gleichung der Fläche auf die drei Axen derselben als Coordinaten-Axen beziehen und zuvörderst den Fall des Ellipsoids betrachten. Diese Gleichung sei demnach:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1, \tag{10}$$

dann ist

$$\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\beta^2}=1 \tag{11}$$

die Gleichung einer Kugel, die um denselben Mittelpunct mit einer der drei Halb Axen, für welche wir hier β genommen haben, als Radius beschrieben ist. Ziehen wir ab, so kommt:

$$\left\{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right\}x^2+\left\{\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\beta^2}\right\}z^2=0. \tag{12}$$

Diese Gleichung entspricht der Gleichung (3) und stellt zwei Diametral-Ebenen dar, welche die Fläche in Kreisen schneiden, deren Radien gleich β sind. Diese Ebenen sind nur dann reell, wenn die Halb-Axe β, der Grösse nach, die mittlere der drei Halb-Axen der Fläche ist. Ist β die grösste oder die kleinste Axe, so sind diese beiden Ebenen imaginär, schneiden sich aber fortwährend in einer reellen geraden Linie, nemlich eben in dieser Axe, oder, was hiermit gleichbedeutend ist, dann stellt die letzte Gleichung einen elliptischen Cylinder dar, der durch das Verschwinden zweier seiner Dimensionen sich auf diese Axe reducirt hat. Wir wollen in dem Nachstehenden voraussetzen, es sei:

$$\alpha^2>\beta^2>\gamma^2. \tag{13}$$

Dann sind nur die beiden durch die Halb-Axe β gehenden, und also auf der Ebene der grössten und kleinsten Axe des Ellipsoids senkrecht stehenden, Kreisschnitt-Ebenen reell; die Kreisschnitt-Ebenen, welche durch jede der beiden andern Halb-Axen α und γ gehen, sind imaginär. Jede der drei mit den drei Halb-Axen, als Radien, um den Mittelpunct beschriebenen Kugeln berührt das Ellipsoid in den beiden Endpuncten der bezüglichen Axe, aber nur die mit der mittlern Halb-Axe als Radius beschriebene Kugel schneidet die Fläche, indem sie dieselbe berührt. Für die beiden reellen durch den Mittelpunct der Fläche gehenden Kreisschnitt-Ebenen ergeben sich, indem wir die Gleichung (12) in ihre beiden Factoren zerlegen, die folgenden beiden:

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right\}}.x\pm\sqrt{\left\{\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\beta^2}\right\}}.z=0. \tag{14}$$

Alle Schnitte des Ellipsoids, die in Ebenen liegen, die diesen beiden Diametral-Ebenen parallel sind, sind ebenfalls Kreise und der Ort der Mittelpuncte dieser Kreise diejenigen beiden Durchmesser der Fläche, welche den beiden Diametral-Ebenen conjugirt sind. Diese beiden Durchmesser liegen also in der Ebene der grössten und kleinsten Axe und bilden mit denjenigen beiden, in welchen dieselbe Ebene von den beiden Kreisschnitt-Ebenen (14) geschnitten wird und deren Länge gleich 2β ist, zwei Paare zugeordneter Durchmesser der Ellipse, welche α und γ zu ihren Halb-Axen hat. Sie werden hiernach durch die folgenden beiden Gleichungen dargestellt:

$$y=0, \qquad \sqrt{\left\{\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\beta^2}\right\}}.\frac{x}{\alpha}\mp\sqrt{\left\{\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right\}}.\frac{z}{\gamma}=0,$$

oder

$$y = 0, \qquad \sqrt{|\beta^2 - \gamma^2|}\cdot\frac{x}{\alpha} \mp \sqrt{|\alpha^2 - \beta^2|}\cdot\frac{z}{\gamma} = 0, \tag{15}$$

und wenn wir ihre gemeinschaftliche Länge durch δ bezeichnen, ergibt sich

$$\delta^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2. \tag{16}$$

Jeder Punct, der beliebig auf einem der beiden durch die Gleichung (15) dargestellten Durchmesser angenommen wird, ist der Mittelpunct eines Durchschnitts-Kreises, dessen Ebene auf der Ebene der grössten und kleinsten Axe senkrecht steht. Der Radius dieses Kreises nimmt ab, wenn der Mittelpunct desselben auf einem dieser beiden Durchmesser vom Mittelpunct der Fläche sich entfernt, und reducirt sich auf einen Punct, wenn dieser Mittelpunct mit dem Endpuncte eines dieser beiden Durchmesser zusammenfällt. Die vier auf diese Weise bestimmten Puncte, heissen die Kreispuncte der Fläche: sie bilden den Uebergang von den reellen zu imaginären Durchschnitts-Kreisen. Ihre Entfernung vom Mittelpuncte der Fläche ist δ, ihre Coordinaten bei den vier möglichen Zeichen-Zusammenstellungen:

$$y = 0, \qquad x = \pm\alpha\sqrt{\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\gamma^2}\right)}, \qquad z = \pm\gamma\sqrt{\left(\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}\right)}. \tag{17}$$

Um die Kreisschnitte eines Ellipsoids, dessen drei Axen gegeben sind, zu construiren, brauchen wir nur, nach dem Vorstehenden, in der Ebene der grössten und der kleinsten Axe um den Mittelpunct einen Kreis zu beschreiben mit einem Radius, der der halben mittlern Axe gleich ist. Dieser Kreis schneidet diejenige Ellipse, welche die beiden erstgenannten Axen auch zu den ihrigen hat, in vier Puncten, die sich paarweise durch zwei Durchmesser verbinden lassen. Senkrecht auf der bezeichneten Ebene und parallel mit diesen beiden Durchmessern sind die Kreisschnitt-Ebenen der Fläche. Die vier Kreispuncte der Fläche sind diejenigen vier Puncte der eben bestimmten Ellipse, in welchen sie von einem Kreise geschnitten wird, der aus demselben Mittelpuncte mit einem Radius δ beschrieben ist. Um δ zu erhalten, brauchen wir nur einen Brennpunct derjenigen Ellipse, welche die grösste und mittlere Halb-Axe den Fläche, α und β, zu den ihrigen hat (ein solcher Brennpunct liegt auf der grössten Axe), mit dem Endpuncte der kleinsten Axe zu verbinden; die Länge dieser Linie ist alsdann gleich δ. Wir könnten auch aus dem Endpuncte der mittlern Axe, als Mittelpunct, in der Ebene der grössten und kleinsten Axe, einen Kreis beschreiben, mit einem Radius, der der Entfernung der Scheitel der letztgenannten beiden Axen gleich ist. Dieser Kreis schneidet alsdann die Ellipse mit der grössten und kleinsten Axe in den vier Kreispuncten der Fläche.

142. Für den Fall der beiden Hyperboloide wollen wir ebenfalls an den Bedingungen (13) festhalten. Ist das Hyperboloid ein zweischaliges, wo alsdann β^2 und γ^2 negative Werthe erhalten und wir $\beta_,$ und $\gamma_,$ für $\beta\sqrt{-1}$ und $\gamma\sqrt{-1}$ schreiben wollen*), so gehen die fraglichen Bedingungen in die folgenden über:

$$\alpha^2 > 0, \qquad \gamma_,^2 > \beta_,^2. \tag{18}$$

Die Gleichung der Fläche ist:

*) Zum Behuf der Bestimmung der Dimensionen einer hyperbolischen Fläche bedienen wir uns, um das Imaginäre zu umgehen, des Ausdrucks Neben-Axen. Jeder der Grösse nach imaginären Axe entspricht eine reelle Neben-Axe. Die Quadrate von beiden sind einander gleich, haben aber entgegengesetzte Zeichen.

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta_,^2}-\frac{z^2}{\gamma_,^2}=1; \tag{19}$$

das bisher reelle System der beiden Kreisschnitt-Ebenen (12) wird aber imaginär und muss mit dem folgenden vertauscht werden:

$$\left\{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\gamma_,^2}\right\}x^2-\left\{\frac{1}{\beta_,^2}-\frac{1}{\gamma_,^2}\right\}y^2=0. \tag{20}$$

Diese Gleichung löset sich in die folgenden beiden auf:

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\gamma_,^2}\right\}}.x\pm\sqrt{\left\{\frac{1}{\beta_,^2}-\frac{1}{\gamma_,^2}\right\}}.y=0, \tag{21}$$

welche zwei reelle Ebenen darstellen, die, in der grössern Neben-Axe ($2\gamma_,$) sich schneidend, auf der Ebene der reellen Axe und der kleinern Neben-Axe senkrecht stehen. Die Durchschnitts-Kreise selbst aber sind imaginär, weil ihr Radius γ oder $\gamma_,\sqrt{-1}$ imaginär ist. Jene reellen Schnitt-Ebenen begegnen der Fläche also nicht, woraus zugleich folgt, dass die beiden ihnen zugeordneten Durchmesser, deren Gleichungen

$$z=0, \qquad \sqrt{\{\gamma_,^2-\beta_,^2\}}.\frac{x}{\alpha}\mp\sqrt{\{\alpha^2+\gamma_,^2\}}.\frac{y}{\beta_,}=0, \tag{22}$$

die Fläche in reellen Puncten schneiden. Die vier Kreispuncte der Fläche, die in der Ebene der reellen Axe und der kleineren Neben-Axe liegen, sind also reell; für ihre Coordinaten-Werthe finden wir:

$$z=0, \quad x=\pm\alpha\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\gamma_,^2}{\alpha^2+\beta_,^2}\right)}, \quad y=\pm\beta_,\sqrt{\left(\frac{\gamma_,^2-\beta_,^2}{\alpha^2+\gamma_,^2}\right)}. \tag{23}$$

Für die Entfernung dieser Puncte vom Mittelpuncte der Fläche, oder mit andern Worten, für die Länge desjenigen Halb-Durchmessers der in dem eben bezeichneten Hauptschnitte liegenden Hyperbel, dessen zugeordneter $\gamma\sqrt{-1}$ ist, ergibt sich, ähnlich wie früher:

$$\delta^2-\gamma_,^2=\alpha^2-\beta_,^2. \tag{24}$$

Um δ zu construiren, wollen wir durch einen Scheitel der reellen Axe der Fläche, senkrecht auf dieser, eine Ebene legen. Diese Ebene, welche die Fläche berührt, schneidet ihren Asymptoten-Kegel in einer reellen Ellipse, deren Halb-Axen $\gamma_,$ und $\beta_,$ sind. Die Brennpuncte dieser Ellipse liegen auf der grössern dieser beiden Halb-Axen $\gamma_,$, welche der Axe Z parallel ist. Der Abstand dieser Brennpuncte von dem Scheitel der reellen Axe der Fläche ist gleich $\sqrt{\{\gamma_,^2-\beta_,^2\}}$, ihr Abstand vom Mittelpuncte der Fläche ist also gleich δ. Um die Kreispuncte eines zweischaligen Hyperboloids zu bestimmen, brauchen wir hiernach nur um den Mittelpunct desselben, in der Ebene der reellen Axe und der kleineren Neben-Axe, mit einem Radius δ einen Kreis zu beschreiben. Dieser Kreis schneidet die schon eben bezeichnete Hyperbel, welche dieselbe Axe und Neben-Axe auch zu den ihrigen hat, in vier Puncten, die, weil in Folge der zweiten Bedingung (18) $\delta^2>\alpha^2$, nothwendig reell sind.

Die Kreisschnitt-Ebenen des zweischaligen Hyperboloids sind zugleich auch die Kreisschnitt-Ebenen des Asymptoten-Kegels desselben. Diejenige Ebene, welche die Fläche in einem Kreispuncte berührt, schneidet den Kegel in einem Kreise, dessen Radius der halben grössern Neben-Axe gleich ist. Sind zwei nicht parallele Kreisschnitte des Kegels bekannt, so schneiden diejenigen beiden Durchmesser desselben, welche durch den Mittelpunct dieser Kreisschnitte gehen, die Flächen in den

vier Kreispuncten. Diese beiden Durchmesser sind der geometrische Ort für die Kreispuncte aller zweischaligen Hyperboloide, welche denselben Asymptoten-Kegel haben.

143. Für das einschalige Hyperboloid wollen wir die folgende Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma_{,}^{\,2}}=1 \tag{25}$$

nehmen, und in Uebereinstimmung mit (13)

$$\alpha^2 > \beta^2$$

setzen. Dann erhalten wir für das System der beiden reellen Kreisschnitt-Ebenen die Gleichung:

$$\left\{\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right\}.y^2-\left\{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\gamma_{,}^{\,2}}\right\}.z^2=0, \tag{26}$$

oder aufgelöset:

$$\sqrt{\left\{\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right\}}.y \pm \sqrt{\left\{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\gamma_{,}^{\,2}}\right\}}.z=0, \tag{27}$$

und für die Gleichungen derjenigen beiden Durchmesser, welche der geometrische Ort für die Mittelpuncte der Kreisschnitte sind:

$$x=0, \qquad \sqrt{\{\alpha^2+\gamma_{,}^{\,2}\}}\,\frac{y}{\beta} \mp \sqrt{\{\alpha^2-\beta^2\}}\,\frac{z}{\gamma_{,}}=0. \tag{28}$$

Die Kreisschnitt-Ebenen (27) schneiden sich in der grössern reellen Axe der Fläche und stehen also auf der Ebene der kleinern reellen Axe und der Neben-Axe senkrecht. Wir können sie am einfachsten construiren, wenn wir ihre Durchschnittslinien mit dieser Ebene bestimmen. Zu diesem Ende beschreiben wir in dieser letztern aus dem Mittelpuncte der Fläche mit einem Radius gleich α einen Kreis. Dieser Kreis schneidet die Durchschnitts-Hyperbel in derselben Ebene in vier Puncten, welche nothwendig reell sind, weil die reelle Halb-Axe dieser Hyperbel gleich β, und also der Voraussetzung nach kleiner als α ist. Diejenigen beiden Durchmesser, welche diese vier Puncte, paarweise genommen, verbinden, sind die gesuchten beiden Durchschnittslinien.

Da die beiden Ebenen (27) das einschalige Hyperboloid in reellen Kreisen schneiden (der Radius dieser Kreise ist gleich α), so folgt, dass die beiden zugeordneten Durchmesser (28) der Fläche nicht begegnen. Das einschalige Hyperboloid hat keine reellen Kreispuncte.

144. Eine Kegelfläche ist als ein einschaliges oder zweischaliges Hyperboloid zu betrachten, dessen Axen verschwinden, aber bis zum Verschwinden ein bestimmtes Verhältniss behalten. Stellen wir dieselbe durch die folgende Gleichung dar:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta_{,}^{\,2}}-\frac{z^2}{\gamma_{,}^{\,2}}=0,$$

so können wir, indem wir aus derselben einen geraden elliptischen Kegel schneiden, die Halb-Axen der Basis durch $\beta_{,}$ und $\gamma_{,}$ (wir nehmen letztere für die grössere) und die Höhe desselben durch α bezeichnen. Dann bleiben (21) die Gleichungen der durch den Mittelpunct desselben gehenden Kreisschnitt-Ebenen, in welchen der Kreis sich auf einen Punct reducirt, und (23) die Gleichungen der diesen Kreisschnitt-Ebenen zugeordneten Durchmesser. Diese liegen in demjenigen Hauptschnitte des Kegels, welcher die kleinere Axe der Basis enthält; senkrecht auf diesem Hauptschnitte stehen die Kreisschnitt-Ebenen, deren zwei in der grössern Axe der Basis sich schneiden.

145. Auch die Discussion des Falles eines elliptischen Paraboloids können wir aus dem Vorstehenden unmittelbar ableiten, wenn wir uns dasselbe als aus einem Ellipsoid dadurch hervorgegangen denken, dass α, β und γ unendlich gross geworden sind, zugleich aber berücksichtigen, dass α von derselben Ordnung ist, als β^2 und γ^2. Wenn wir zu diesem Ende den Anfangspunct der Coordinaten in einen Scheitel der grössten Axe des Ellipsoids (10) verlegen, so wird die Gleichung desselben:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=\frac{2x}{\alpha}.$$

Für den Fall des Paraboloids und für Puncte desselben, die nicht unendlich weit liegen, verschwindet das erste Glied dieser Gleichung gegen die übrigen, so dass die Gleichung dieser Fläche die folgende, auf ihren Ursprung hinweisende, Form annimmt:

$$\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=\frac{2x}{\alpha}, \tag{29}$$

die wir auch, indem wir

$$\frac{\beta^2}{\alpha}=p, \qquad \frac{\gamma^2}{\alpha}=q$$

setzen, wo p und q die halben Parameter der beiden Hauptschnitte bedeuten, auf folgende Weise schreiben können:

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x. \tag{30}$$

Hiernach verwandelt sich ferner, um die Richtung der Kreisschnitt-Ebenen für das elliptische Paraboloid zu bestimmen, die Gleichung (12) in die folgende:

$$x^2=\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2}-1\right)z^2, \tag{31}$$

wo wir $\frac{\beta^2}{\gamma^2}$ auch durch das Verhältniss der beiden Halb-Axen-Quadrate irgend einer Durchschnitts-Ellipse, deren Ebene auf der Axe des Paraboloids senkrecht steht, so wie durch $\frac{p}{q}$ ersetzen können. Die durch den Scheitel der Fläche gehenden Kreisschnitt-Ebenen sind hiernach:

$$\sqrt{q}.x \pm \sqrt{|p-q|}.z=0. \tag{32}$$

Ebenso ergibt sich, in Folge der Gleichungen (17), für die Kreispuncte des Paraboloids, deren Anzahl sich auf zwei reducirt:

$$y=0, \quad x=\alpha\left\{1-\sqrt{\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-\gamma^2}\right)}\right\}=\frac{\gamma^2-\beta^2}{2\alpha}, \quad z=\pm\gamma\sqrt{\left\{\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}\right\}}=\pm\sqrt{\left\{\frac{(\beta^2-\gamma^2)\gamma^2}{\alpha^2}\right\}},$$

mithin:

$$y=0, \qquad x=\tfrac{1}{2}|q-p|, \qquad z=\pm\sqrt{|p-q|q}.$$

Die beiden Kreispuncte liegen also in demjenigen der beiden Hauptschnitte, dessen Parameter der kleinere ist, und sind in demselben unmittelbar bestimmt, weil ihr x der halben Entfernung der beiden Brennpuncte der Hauptschnitte von einander gleich ist.

Ein hyperbolisches Paraboloid hat überhaupt keine elliptischen Durchschnitts-Curven, insbesondere also auch keine Kreisschnitte.

Bei einer Rotationsfläche fallen die beiden Kreispuncte paarweise in die Scheitel der Rotations-Axe zusammen.

§. 8.

Vollständige Discussion der Flächen zweiter Classe. Richtung und Grösse ihrer Axen.

146. Ein Plan-Coordinaten System, das, was die Leichtigkeit der Entwicklungen betrifft, dem gewöhnlichen Systeme der Parallel-Coordinaten durchaus nicht nachsteht, ist das am Ende der 7. Nummer der einleitenden Betrachtungen entwickelte. Wir wollen, indem wir dieses System zu Grunde legen:

$$At^2 + A'u^2 + A''v^2 + 2B''tu + 2B'tv + 2Buv + 2Ctw + 2C'uw + 2C''vw + Dw^2 \equiv \Gamma = 0 \quad (1)$$

für die allgemeine Gleichung der Flächen zweiter Classe nehmen. Zur Construction der drei Coordinaten-Werthe einer Ebene sind hier wieder drei Coordinaten-Axen X, Y und Z, von denen wir voraussetzen wollen, dass sie auf einander senkrecht stehen, gegeben und die drei Coordinaten-Werthe $\left(-\frac{t}{w}\right), \left(-\frac{u}{w}\right)$ und $\left(-\frac{v}{w}\right)$ bedeuten die reciproken Werthe derjenigen Segmente, welche die bezügliche Ebene von diesen drei Axen abschneidet. Irgend ein Punct (z', y', x') ist alsdann durch die folgende Gleichung gegeben:

$$w + z'v + y'u + x't = 0.$$

Wenn wir die drei Coordinaten-Axen, parallel mit sich selbst, verschieben, so dass der Durchschnittspunct der drei neuen Axen in irgend einen Punct (z', y', x') fällt, so brauchen wir bloss, während t, u und v unverändert bleiben, w mit

$$(w - z'v - y'u - x't)$$

zu vertauschen. Die Gleichung der Fläche (1) geht hiernach in die folgende über:

$$At^2 + A'u^2 + A''v^2 + 2B''tu + 2B'tv + 2Buv + 2Ctw + 2C'uw + 2C''vw + Dw^2 = 0, \quad (2)$$

indem wir, der Kürze wegen,

$$\begin{aligned}
A - 2Cx' + Dx'^2 &\equiv A, \\
A' - 2C'y' + Dy'^2 &\equiv A', \\
A'' - 2C''z' + Dz'^2 &\equiv A'', \\
B - C'z' - C''y' + Dy'z' &\equiv B, \\
B' - Cz' - C''x' + Dx'z' &\equiv B', \\
B'' - Cy' - C'x' + Dx'y' &\equiv B'', \\
C - Dx' \equiv C, \quad C' - Dy' &\equiv C', \quad C'' - Dz' \equiv C'', \\
D &\equiv D,
\end{aligned}$$

setzen. Um die neue Gleichung zu vereinfachen, können wir verschiedene Annahmen über die Lage des neuen Anfangspunctes der Coordinaten machen.

147. Wir wollen zuvörderst

$$x' = \frac{C}{D}, \qquad y' = \frac{C'}{D}, \qquad z' = \frac{C''}{D} \tag{3}$$

setzen; dann ergibt sich, wenn wir zugleich auf die Bezeichnung der 10. Nummer Rücksicht nehmen:

$$\begin{aligned} AD &\equiv AD - C^2 \equiv Y, & A'D &\equiv A'D - C'^2 \equiv Y_1, & A''D &\equiv A''D - C''^2 \equiv Y_2, \\ BD &\equiv BD - C'C'' \equiv B'D, & \Psi_{30} &\equiv B'D - CC'' \equiv \Psi_{31}, & B''D &\equiv B''D - CC' \equiv \Psi_{32}, \end{aligned}$$

die Gleichung (2) geht hiernach in die folgende über:

$$Yt^2 + Y_1u^2 + Y_2v^2 + 2\Psi_{32}tu + 2\Psi_{31}tv + 2\Psi_{30}uv + D^2w^2 = 0. \tag{4}$$

Die Form dieser Gleichung — nach welcher beliebig angenommenen Werthen von t, u und v, das heisst, einer beliebigen Richtung der umhüllenden Ebene, zwei gleiche und entgegengesetze Werthe von w entsprechen — zeigt, dass die bezügliche Fläche den neuen Anfangspunct zum Mittelpuncte hat. Auf das ursprüngliche Axen-System bezogen, sind also die durch die Gleichungen (3) bestimmten Werthe für x', y' und z' die Coordinaten des Mittelpunctes der Fläche (1) und die Gleichung dieses Mittelpunctes ist:

$$Dw + C''v + C'u + Ct \equiv \tfrac{1}{2}\frac{d\Gamma}{dw} = 0.^*) \tag{5}$$

---

*) Der Mittelpunct einer Fläche zweiter Classe ist der Pol einer unendlich weit liegenden Ebene ($t = 0$, $u = 0$, $v = 0$), die eine bestimmte Richtung verloren hat, wonach sich unmittelbar seine Gleichung (5) und aus dieser die Coordinaten desselben ergeben. Ebenso erhalten wir für die Pole der drei ursprünglichen Coordinaten-Ebenen YZ, XZ und XY, denen bezüglich $w = 0$, $u = 0$, $v = 0$; $w = 0$, $t = 0$, $v = 0$ und $w = 0$, $t = 0$, $u = 0$ entsprechen, die folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \qquad \frac{d\Gamma}{du} = 0, \qquad \frac{d\Gamma}{dv} = 0,$$

oder wenn wir entwickeln:

$$\begin{aligned} At + B''u + B'v + Cw &= 0, \\ B''t + A'u + Bv + C'w &= 0, \\ B't + Bu + A''v + C''w &= 0. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir diese drei Pole bezüglich durch (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) und (x_3, y_3, z_3), so kommt:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{A}{C}, & y_1 &= \frac{B''}{C}, & z_1 &= \frac{B'}{C}; \\ x_2 &= \frac{B''}{C'}, & y_2 &= \frac{A'}{C'}, & z_2 &= \frac{B}{C'}; \\ x_3 &= \frac{B'}{C''}, & y_3 &= \frac{B}{C''}, & z_3 &= \frac{A''}{C''}. \end{aligned}$$

Setzen wir, unbeschadet der Allgemeinheit, $D = 1$, so erhalten wir aus den vorstehenden Ausdrücken und aus den Gleichungen (3) die folgende Constanten-Bestimmung der allgemeinen Gleichung:

$$\begin{aligned} C &= x', & C' &= y', & C'' &= z', \\ A &= x'x_1, & A' &= y'y_1, & A'' &= z'z_1, \\ B'' &= x'y_1 = y'x_2, & B' &= x'z_1 = z'x_3, & B &= y'z_2 = z'y_3. \end{aligned}$$

Wenn insbesondere

$$D = 0,$$

so rückt der Mittelpunct nach einer Richtung, welche durch die Doppel-Gleichung

$$\frac{x'}{C} = \frac{y'}{C'} = \frac{z'}{C''} \tag{6}$$

gegeben ist, unendlich weit. Die Fläche zweiter Classe geht alsdann in ein Paraboloid über und die durch vorstehende Doppel-Gleichung, in der Voraussetzung, dass x', y' und z' als veränderliche Grössen betrachtet werden, dargestellte gerade Linie ist ein Durchmesser desselben.

148. Um die Lage einer Fläche im Raume zu bestimmen, ist es zunächst erforderlich, dass wir die Lage eines Punctes, der zu derselben in einer ausschliesslichen Beziehung steht, kennen. Für den Fall der Flächen mit einem Mittelpuncte, ist dieser für diesen Zweck der geeigneteste Punct, für den Fall der Paraboloide, wo der Mittelpunct unendlich weit gerückt ist, können wir den Scheitel der Fläche nehmen und gleich hier schon die Lage desselben bestimmen. Denn dieser Scheitel ist der Berührungspunct auf derjenigen Tangential-Ebene der Fläche, welche auf der gemeinsamen Durchmesser-Richtung, die wir eben bestimmt haben, senkrecht steht. Die fragliche Tangential-Ebene ist also der durch folgende Gleichung dargestellten Ebene

$$Cx + C'y + C''z = 0$$

parallel. Es sei demnach ihre Gleichung

$$Cx + C'y + C''z + \lambda = 0,$$

wo λ noch zu bestimmen übrig bleibt. Die vier Coordinaten der Ebene sind hiernach:

$$t = C, \qquad u = C', \qquad v = C'', \qquad w = \lambda,$$

und wenn wir diese Coordinaten-Werthe in die Gleichung der Fläche, die, indem wir bloss $D = 0$ setzen, in die folgende übergeht:

$$At^2 + A'u^2 + A''v^2 + 2B''tu + 2B'tv + 2Buv + 2Ctw + 2C'uw + 2C''vw \equiv \Gamma = 0,$$

einsetzen, so ergibt sich zur Bestimmung von λ:

$$\lambda = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{AC^2 + A'C'^2 + A''C''^2 + 2B''CC' + 2B'CC'' + 2BCC''}{C^2 + C'^2 + C''^2} \tag{7}$$

oder auch, wenn wir berücksichtigen, dass D verschwindet, in Folge der drei letzten identischen Gleichungen III der 10. Nummer

$$\lambda = -\tfrac{1}{2}\left\{A + A' + A'' + \frac{\Theta + \Theta_1 + \Theta_2}{C^2 + C'^2 + C''^2}\right\}.$$

Der Berührungspunct auf der fraglichen Tangential-Ebene hat (Einleitende Betrachtungen, 23) folgende Gleichung:

$$\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)t + \left(\frac{d\Gamma}{du}\right)u + \left(\frac{d\Gamma}{dv}\right)v + \left(\frac{d\Gamma}{dw}\right)w = 0,$$

wobei wir, nach der Differentiation, in den umklammerten partiellen Differential-Coefficienten für die vier Veränderlichen bezuglich C, C', C'' und λ einsetzen. Dann ist ferner, wenn wir die drei Coordinaten des fraglichen Punctes x_0, y_0 und z_0 nennen:

$$x_0 = \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)}{\left(\frac{d\Gamma}{dw}\right)}, \qquad y_0 = \frac{\left(\frac{d\Gamma}{du}\right)}{\left(\frac{d\Gamma}{dw}\right)}, \qquad z_0 = \frac{\left(\frac{d\Gamma}{dv}\right)}{\left(\frac{d\Gamma}{dw}\right)}. \tag{8}$$

Entwickeln wir, so kommt:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right) &= AC + B''C' + B'C'' + C\lambda,\\
\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{d\Gamma}{du}\right) &= B''C + A'C' + BC'' + C'\lambda,\\
\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{d\Gamma}{dv}\right) &= B'C + BC' + A''C'' + C''\lambda,\\
\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\Gamma}{dw}\right) &= C^2 + C'^2 + C''^2.
\end{aligned}$$

Endlich finden wir für die Axe des Paraboloids, als desjenigen Durchmessers, welcher durch den Scheitel desselben geht, die folgenden beiden, in eine einzige zusammengezogene Gleichung:

$$\frac{x - x_0}{C} = \frac{y - y_0}{C'} = \frac{z - z^0}{C''}. \tag{9}$$

149. Wenn die sechs ersten Glieder der Gleichung (4) sich in zwei Factoren des ersten Grades auflösen lassen, was unter folgender Bedingungs-Gleichung Statt findet:

$$YY_1Y_2 - Y(\Psi_{30})^2 - Y_1(\Psi_{31})^2 - Y_2(\Psi_{32})^2 + 2\Psi_{30}\Psi_{31}\Psi_{32} \equiv D^2\Phi = 0, \tag{10}$$

und also fordert, das Φ verschwinde — so treten in dieser Gleichung statt der drei Veränderlichen t, u und v zwei lineare Functionen derselben in Evidenz und folglich stellt dann diese Gleichung, so wie auch die allgemeine Gleichung (1), eine ebene Curve zweiter Classe mit einem Mittelpuncte dar. Für die Coordinaten derjenigen Ebene, in welcher diese Curve liegt, bestehen, indem wir wiederum die allgemeine Gleichung (1) zu Grunde legen, gleichzeitig die folgenden vier Gleichungen:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \qquad \frac{d\Gamma}{du} = 0, \qquad \frac{d\Gamma}{dv} = ,0 \qquad \frac{d\Gamma}{dw} = 0.$$

Aus den drei ersten erhalten wir sogleich, nach Analogie früherer Entwickelungen (2 Nummer):

$$\frac{t}{w} = \frac{\Delta_{03}}{\Theta_3}, \qquad \frac{u}{w} = \frac{\Delta_{13}}{\Theta_3}, \qquad \frac{v}{w} = \frac{\Delta_{23}}{\Theta_3}, \tag{11}$$

also für die Gleichung dieser Ebene in Punct-Coordinaten:

$$\Delta_{03}.x + \Delta_{13}.y + \Delta_{23}.z + \Theta_3 = 0. \tag{12}$$

Die Mittelpuncts-Coordinaten behalten ihre bisherigen Werthe:

$$x' = \frac{C}{D}, \qquad y' = \frac{C'}{D}, \qquad z' = \frac{C''}{D},$$

und geben, in die vorstehende Gleichung eingesetzt,

$$C\Delta_{03} + C'\Delta_{13} + C''\Delta_{23} - D\Theta_3 = 0: \tag{13}$$

eine Bedingungs-Gleichung, welche dem Verschwinden von Φ entspricht.

Je nachdem die beiden Factoren, die, nach dem Vorstehenden, den sechs ersten Gliedern der Gleichung (4) entsprechen, reell oder imaginär und demnach die Ausdrücke

$$YY_1-(\Psi_{32})^2\equiv D\Theta_2, \qquad YY_2-(\Psi_{31})^2\equiv D\Theta_1, \qquad Y_1Y_2-(\Psi_{30})^2\equiv D\Theta, \quad (14)$$

negativ oder positiv sind, ist die Fläche eine Hyperbel oder eine Ellipse. Den Uebergang zwischen beiden bildet ein System von zwei Puncten, ein Fall der dadurch angezeigt wird, dass

$$\Theta = 0, \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \Theta_2 = 0.$$

Dann lässt sich die Gleichung (4) in die folgenden beiden Gleichungen ersten Grades auflösen:

$$t\sqrt{-Y}+u\sqrt{-Y_1}+v\sqrt{-Y_2}\pm Dw = 0. \quad (15)$$

Die beiden dargestellten Puncte sind reell oder imäginär, je nachdem

$$Y, \qquad Y_1, \qquad Y_2$$

negativ oder positiv sind. Ihnen entsprechen, indem wir den Mittelpunct zum Anfangspuncte nehmen, die Coordinaten-Werthe:

$$x = \frac{\pm\sqrt{-Y}}{D}, \qquad y = \frac{\pm\sqrt{-Y_1}}{D}, \qquad z = \frac{\pm\sqrt{-Y_2}}{D},$$

mithin bei der ursprünglichen Lage des Anfangspunctes:

$$x = \frac{C\pm\sqrt{-Y}}{D}, \qquad y = \frac{C'\pm\sqrt{-Y_1}}{D}, \qquad z = \frac{C''\pm\sqrt{-Y_2}}{D}. \quad (16)$$

Wenn die beiden Puncte zusammenfallen sollen, so müssen die Coefficienten der sechs ersten Glieder der Gleichung (4) verschwinden:

$$Y = 0, \quad Y_1 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad \Psi_{30} = 0, \quad \Psi_{31} = 0, \quad \Psi_{32} = 0,$$

und dann sind die bisherigen Coordinaten des Mittelpunctes die Coordinaten der zusammenfallenden Puncte selbst.

150. Es bleibt noch übrig, in demjenigen Falle, wo die Fläche in eine Parabel ausartet, die Lage dieser Curve zu bestimmen. Der erste Theil der Gleichung (10) ist hier, in Folge davon, dass D verschwindet, identisch gleich Null. Für die Ebene der Parabel erhalten wir aber immer noch, wie in dem Falle, dass die Curve, in welche die Fläche ausgeartet ist, einen Mittelpunct hat, unverändert die Gleichung (12) und die Bedingungs-Gleichung (13), welche dem Verschwinden von Φ, wodurch neben dem Verschwinden von D der fragliche Fall characterisirt wird, entspricht, verwandelt sich in die folgende:

$$C\Delta_{03}+C'\Delta_{13}+C''\Delta_{23} = 0. \quad (17)$$

Die Durchmesser-Richtung der Parabel ist durch die Doppel-Gleichung (6) auch hier bestimmt, so wie es auch die Coordinaten ihres Scheitels durch die Gleichungen (8) sind.

Wenn endlich auch noch die Parabel in ein System von zwei Puncten ausartet, von welchen einer alsdann nach bestimmter Richtung unendlich weit liegt, so werden durch das Verschwinden von D die ersten Theile der Gleichungen (14) identisch gleich Null. Die Gleichungen (16) geben für die Coordinaten eines der beiden gegebenen Puncte unendlich grosse Werthe und zeigen zugleich, dass die Richtung nach welcher dieser Punct unendlich weit liegt, durch die folgende Doppel-Gleichung gegeben ist:

$$\frac{x}{C} = \frac{y}{C'} = \frac{z}{C''},$$

während die Coordinaten des andern Punctes:

$$x = \frac{C - \sqrt{C^2 - AD}}{D}, \qquad y = \frac{C' - \sqrt{C'^2 - A'D}}{D}, \qquad z = \frac{C'' - \sqrt{C''^2 - A''D}}{D},$$

durch das Verschwinden von D, unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ sich darstellen. Verfahren wir nach bekannter Weise, so erhalten wir für die wahren Werthe dieser Coordinaten:

$$x = \frac{A}{2C}, \qquad y = \frac{A'}{2C'}, \qquad z = \frac{A''}{2C''}.$$

151. Wenn aus der Gleichung (2) durch das Verschwinden von A das mit t^2 behaftete Glied ausfällt, so entspricht gegebenen Werthen von $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$ nur ein einziger Werth von $\frac{t}{w}$, weil der andere unendlich gross wird: die Ebene YZ ist alsdann eine Tangential-Ebene der Fläche. Auf gleiche Weise wird, wenn A' und A'' verschwinden, die Fläche von den Coordinaten-Ebenen XZ und YZ berührt. Bestimmen wir also den neuen Anfangspunct so, dass gleichzeitig

$$\begin{aligned} A &\equiv A - 2C\,x' + Dx'^2 = 0, \\ A' &\equiv A' - 2C'\,y' + Dy'^2 = 0, \\ A'' &\equiv A'' - 2C''\,z' + Dz'^2 = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

so wird die, nun durch die folgende Gleichung

$$2B''tu + 2B't v + 2Buv + 2Ctw + 2C'uw + 2C''vw + D^2w^2 = 0 \tag{19}$$

dargestellte Fläche gleichzeitig von der drei Coordinaten-Ebenen berührt. Die Gleichungen (18) bestimmen die acht Winkelpuncte eines der Fläche umschriebenen rechtwinkeligen Parallelepipeds.

Wenn insbesondere die Fläche ein Paraboloid ist, so reduciren sich die Gleichungen (18), dem entsprechend, dass es jedesmal nur eine Tangential-Ebene gibt, die einer gegebenen Ebene parallel ist, auf den ersten Grad und geben

$$x = \frac{A}{2C}, \qquad y = \frac{A'}{2C'}, \qquad z = \frac{A''}{2C''}.$$

Wir erhalten hier also nur einen einzigen Punct, in welchem drei den Coordinaten-Ebenen parallele Tangential-Ebenen der Fläche sich schneiden. Die Gleichungen einer Ebene, die auf der Durchmesser-Richtung des Paraboloids senkrecht steht, ist nach der 148. Nummer im Allgemeinen die folgende:

$$Cx + C'y + C''z + \lambda' = 0$$

und wenn diese Ebene durch den eben bestimmten Punct gehen soll, kommt insbesondere

$$\lambda' = -\tfrac{1}{2}(A + A' + A'').$$

In der eben angezogenen Nummer haben wir die Tangential-Ebene im Scheitel der Fläche bestimmt, für den Abstand der beiden Ebenen von einander ergibt sich:

$$\frac{\lambda - \lambda'}{\sqrt{C^2 + C'^2 + C''^2}} = -\tfrac{1}{2}\frac{\Theta + \Theta_1 + \Theta_2}{(C^2 + C'^2 + C''^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

152. Indem wir wieder die allgemeine Gleichung

$$At^2 + A'u^2 + A''v^2 + 2B''tu + 2B'tv + 2Buv + 2Ctw + 2C'uw + 2C''vw + Dw^2 \equiv \Gamma = 0 \tag{1}$$

zu Grunde legen, wollen wir zuvörderst diejenigen Flächen zweiter Classe betrachten, die einen

Mittelpunct haben, und, in Gemässheit der Gleichung (4) der 147. Nummer,

$$At^2 + A'u^2 + A''v^2 + 2B''tu + 2B'tv + 2Buv = w^2 \tag{2}$$

für die allgemeine Gleichung solcher Flächen nehmen, wobei wir, der Kürze wegen,

$$\begin{gathered} -\frac{Y}{D^2} \equiv A, \quad -\frac{Y_1}{D^2} \equiv A', \quad -\frac{Y_2}{D^2} \equiv A'', \\ -\frac{\Psi_{32}}{D^2} \equiv B'', \quad -\frac{\Psi_{31}}{D^2} \equiv B', \quad -\frac{\Psi_{30}}{D^2} \equiv B, \end{gathered} \tag{3}$$

setzen, und dann zunächst an diese Gleichungs-Form die Bestimmung der Richtung und der Grösse der Axen einer gegebenen Fläche knüpfen.

Wir wollen hierbei von der Anschauung ausgehen, dass, wenn wir eine Schnitt-Ebene durch den Mittelpunct legen, der Pol dieser Ebene nach bestimmter Richtung unendlich weit liegt, und dass, wenn diese Richtung auf der Schnitt-Ebene senkrecht steht, diese ein Hauptschnitt der Fläche zweiter Classe ist.

Die Gleichung der Schnitt-Ebene in gewöhnlichen Coordinaten sei:

$$t'x + u'y + v'z = 0, \tag{4}$$

wonach die beiden Gleichungen einer auf derselben im Anfangspuncte senkrechten geraden Linie die folgenden sind:

$$\frac{x}{z} = \frac{t'}{v'}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{u'}{v'}. \tag{5}$$

Für die Gleichung des Poles der Schnitt-Ebene erhalten wir, indem wir berücksichtigen, dass die Coordinaten dieser letztern

$$t = t', \qquad u = u', \qquad v = v', \qquad w = 0,$$

sogleich die folgende:

$$(At' + B''u' + B'v')t + (B''t' + A'u' + Bv)u + (B't' + Bu' + A''v')v = 0.$$

Dieser Pol liegt, weil in seiner Gleichung w fehlt, unendlich weit; die Richtung nach welcher er unendlich weit liegt, muss also mit der Richtung der Linie (5) zusammenfallen, wenn die Gleichung (4) einen Hauptschnitt der Fläche darstellen soll. Diess findet Statt, wenn

$$\frac{At' + B''u' + B'v'}{B't' + Bu' + A''v'} = \frac{t'}{v'}, \qquad \frac{B''t' + A'u' + Bv'}{B't' + Bu' + A''v'} = \frac{u'}{v'}$$

oder, nach Fortschaffung der Nenner:

$$\begin{gathered} \left(A \cdot \frac{t'}{v'} + B'' \cdot \frac{u'}{v'} + B'\right) - \left(B' \cdot \frac{t'}{v'} + B \cdot \frac{u'}{v'} + A''\right)\frac{t'}{v'} = 0, \\ \left(B'' \cdot \frac{t'}{v'} + A' \cdot \frac{u'}{v'} + B\right) - \left(B' \cdot \frac{t'}{v'} + B \cdot \frac{u'}{v'} + A''\right)\frac{u'}{v'} = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Diese Gleichungen stimmen genau mit den Gleichungen (5) der 103. Nummer überein, wenn wir für $\frac{t'}{v'}$ und $\frac{u'}{v'}$ bezüglich a und b setzen, und geben also immer drei reelle Werthen-Paare für

$\frac{t'}{v'}$ und $\frac{u'}{v'}$, wie die letztgenannten Gleichungen für a und b. Setzen wir nach einander jedes der drei reellen Werthen-Paare in die Gleichung (4), so stellt diese die drei Hauptschnitte der Fläche dar.

153. Wenn wir einen Hauptschnitt der Fläche kennen, so ist es leicht die Länge der ihm zugeordneten Halb-Axe, die wir r nennen wollen, zu finden. Sie ist der kürzeste Abstand des Mittelpunctes von einer der beiden diesem Hauptschnitte parallelen Tangential-Ebenen der Fläche. Zur Bestimmung solcher Tangential-Ebenen brauchen wir bloss in die Gleichung der Fläche, der wir folgende Form geben wollen

$$A\left(\frac{t}{v}\right)^2+A'\left(\frac{u}{v}\right)^2+A''+2B''\left(\frac{t}{v}\right)\left(\frac{u}{v}\right)+2B'\left(\frac{t}{v}\right)+2B\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{w}{v}\right)^2,$$

für $\frac{t}{v}$ und $\frac{u}{v}$ die auf den Hauptschnitt sich beziehenden Werthe einzusetzen, wo alsdann die entsprechenden Werthe von $-\left(\frac{w}{v}\right)$ die von den fraglichen Tangential-Ebenen auf der Axe Z abgeschnittenen Segmente bedeuten. Das Quadrat dieser Segmente ist offenbar gleich

$$\left\{1+\left(\frac{t'}{v'}\right)^2+\left(\frac{u'}{v'}\right)^2\right\}r^2,$$

und hiernach ergibt sich:

$$A\left(\frac{t'}{v'}\right)^2+A'\left(\frac{u'}{v'}\right)^2+A''+2B''\left(\frac{t'}{v'}\right)\left(\frac{u'}{v'}\right)+2B'\left(\frac{t'}{v'}\right)+2B\left(\frac{u'}{v'}\right)=\left\{1+\left(\frac{t'}{v'}\right)^2+\left(\frac{u'}{v'}\right)^2\right\}r^2.$$

Diese Gleichung geht wiederum, wenn wir $\frac{t'}{v'}$ und $\frac{u'}{v'}$ mit a und b und überdiess r^2 mit s^2 vertauschen in die Gleichung (3) der 111. Nummer über. Wenn wir sie daher mit den Gleichungen (6) verbinden, um a und b zu eliminiren, so können wir uns allen analytischen Entwickelungen überheben und erhalten, den Gleichungen (4) (5) und (6) der zuletzt angezogenen Nummer entsprechend, sogleich die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}B't'+Bu'+(A''-r^2)v'^2&=0,\\ B''t'+Bv'+(A'-r^2)u'^2&=0,\\ B''u'+Bv'+(A-r^2)t'^2&=0;\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$(A-r^2)(A'-r^2)(A''-r^2)-B^2(A-r^2)-B'^2(A'-r^2)-B''^2(A''-r^2)+2BB'B''=0, \quad (8)$$

$$r^6-(A+A'+A'')r^4+\{(AA'-B''^2)+(AA''-B'^2)+(A'A''-B^2)\}r^2$$
$$-\{AA'A''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2+2BB'B''\}=0. \quad (9)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen (8) und (9) ist ersichtlich, dass die Bestimmung der Quadrate der drei Halb-Axen gerade ebenso von den Coefficienten der Gleichung (2) abhängt, als die Bestimmung der reciproken Werthe dieser Quadrate von den Coefficienten der entsprechenden Gleichung (1) der 111. Nummer, in der die Punct-Coordinaten x, y, z an die Stelle der Plan-Coordinaten

$$\left(\frac{t}{w}\right),\ \left(\frac{u}{w}\right),\ \left(\frac{v}{w}\right)$$

treten. Hieraus folgt, dass auch — so lange nemlich die Fläche auf ihren Mittelpunct als Anfangspunct der Coordinaten bezogen ist — dieselben Bedingungen zwischen den Coefficienten der Flächen-

Gleichung ausdrücken, ob die Axen reell oder imaginär sind, oder mit andern Worten, ob die Fläche ein reelles oder imaginäres Ellipsoid, oder ein ein- oder zweischaliges Hyperboloid ist. Wenn durch das Verschwinden des letzten Gliedes der Gleichung (9) eine Wurzel gleich Null wird, so wird auch eine Axe gleich Null, während unter der entsprechenden Bedingung früher eine Axe unendlich gross wurde. Dann geht die Fläche in eine ebene Curve mit einem Mittelpuncte über und die Quadrate der beiden Halb-Axen dieser Curve sind durch die folgende quadratische Gleichung gegeben:

$$r^4 - (A+A'+A'')r^2 + \{(AA'-B''^2)+AA''-B'^2)+(A'A''-B^2)\} = 0. \qquad (10)$$

Liegt die Curve in der Ebene XY, so geht ihre Gleichung durch das Verschwinden von A'', B und B' in die folgende über:

$$At^2+A'u^2+2B''tu = w^2,$$

wobei wir von der dritten Dimension ganz absehen können, und erhalten dann zur Bestimmung der beiden Halb-Axen-Quadrate die Gleichung:

$$r^4 - (A+A')r^2 + (AA'-B''^2) = 0. \qquad (10a)$$

154. Endlich bleiben auch die Bedingungen, unter welchen zwei oder drei Wurzeln der Gleichung (9) einander gleich sind und mithin die Fläche eine Rotations-Fläche ist, identisch dieselben als früher. Es ist nemlich, wenn wir die halbe Länge der Umdrehungs-Axe durch r und den Radius der Aequatorial-Curve durch ρ bezeichnen:

$$A-\frac{B'B''}{B} = A'-\frac{BB''}{B'} = A''-\frac{BB'}{B''} = \rho^2, \qquad (11)$$

$$A+\frac{BB''}{B'}+\frac{BB'}{B''} = A'+\frac{B'B''}{B}+\frac{BB'}{B''} = A''+\frac{B'B''}{B}+\frac{BB''}{B'} = r^2, \qquad (12)$$

$$\frac{B'B''}{B}+\frac{BB''}{B'}+\frac{BB'}{B''} = r^2-\rho^2. \qquad (13)$$

Wenn die Fläche ein Ellipsoid ist, so ist dasselbe, je nachdem der Werth für $(r^2-\rho^2)$ positiv oder negativ ist ein verlängertes oder abgeplattetes Sphäroid: also umgekehrt wie früher, weil an die Stelle der Halb-Axen ihre reciproken Werthe getreten sind.

Um die Richtung der Rotations-Axe zu bestimmen, wenden wir uns zu den Gleichungen (6) zurück, welche in diesem Falle, nach Analogie der 130. Nummer einen gemeinschaftlichen Factor von der Form:

$$\frac{t'}{v'}+k.\frac{u'}{v'}+l$$

haben müssen, was uns dann wiederum zu den beiden Bedingungs-Gleichungen, unter welchen die Fläche eine Rotations-Fläche ist, zurückführt. Abgesehen von diesem Factor, erhalten wir alsdann

$$\frac{t'}{v'} = m = \frac{B''}{B}, \qquad \frac{u'}{v'} = n = \frac{B''}{B'},$$

und wenn wir diese Werthe in die Gleichungen (4) und (5) einsetzen:

$$\frac{x}{B}+\frac{y}{B'}+\frac{z}{B''} = 0 \qquad (14)$$

für die Gleichung des vollkommen bestimmten Hauptschnittes, in welchem der Aequatorial-Kreis liegt und

$$Bx = B'y = B''z \tag{15}$$

für die Doppel-Gleichung der Rotations-Axe.

Für die Coordinaten der Aequatorial-Ebene erhalten wir unmittelbar:

$$t = \frac{1}{B}, \quad u = \frac{1}{B'}, \quad v = \frac{1}{B''}, \quad w = 0, \tag{16}$$

und um die Rotations-Axe in Plan-Coordinaten auszudrücken, die beiden Gleichungen:

$$\frac{t}{B} + \frac{u}{B'} + \frac{v}{B''} = 0, \qquad w = 0. \tag{17}$$

Jede Ebene deren Coordinaten diese Gleichungen befriedigen, ist ein durch die Rotations-Axe gehender Hauptschnitt.

155. Die bisher Statt gefundene Uebereinstimmung in der doppelten Coordinaten-Annahme hört auf, wenn die Fläche der zweiten Classe nicht mehr auf ihren Mittelpunct als Anfangspunct der Coordinaten bezogen wird. Legen wir die, an die Spitze dieses Paragraphen gestellte, allgemeine Gleichung zu Grunde, so verwandeln sich in Folge der Gleichungen (3) die Gleichungen (6), wodurch die Richtung der drei Axen bestimmt wird, in die folgenden beiden:

$$\left(Y.\frac{t'}{v'} + \Psi_{32}.\frac{u'}{v'} + \Psi_{31}\right) - \left(\Psi_{31}.\frac{t'}{v'} + \Psi_{30}.\frac{u'}{v'} + Y_2\right)\frac{t'}{v'} = 0,$$

$$\left(\Psi_{32}.\frac{t'}{v'} + Y_1.\frac{u'}{v'} + \Psi_{30}\right) - \left(\Psi_{31}.\frac{t'}{v'} + \Psi_{30}.\frac{u'}{v'} + Y_2\right)\frac{u'}{v'} = 0.$$

Wenn die Fläche insbesondere eine Rotations-Fläche sein soll, so geht die Doppel-Bedingung (11) in die folgende über:

$$Y - \frac{\Psi_{31}\Psi_{32}}{\Psi_{30}} = Y_1 - \frac{\Psi_{30}\Psi_{32}}{\Psi_{31}} = Y_2 - \frac{\Psi_{30}\Psi_{31}}{\Psi_{32}}. \tag{18}$$

Für die Aequatorial-Ebene ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{x}{\Psi_{30}} + \frac{y}{\Psi_{31}} + \frac{z}{\Psi_{32}} = 0, \tag{20}$$

und für die Rotations-Axe:

$$\Psi_{30}.x = \Psi_{31}.y = \Psi_{32}.z. \tag{21}$$

156. Wir haben:

$$A + A' + A'' = -\frac{Y + Y_1 + Y_2}{D^2},$$

ferner mit Berücksichtigung der identischen Gleichungen IV. der 10. Nummer:

$$AA' - B''^2 = \frac{YY_1 - (\Psi_{32})^2}{D^4} = \frac{\Theta_2}{D^3},$$

$$AA'' - B'^2 = \frac{YY_2 - (\Psi_{31})^2}{D^4} = \frac{\Theta_1}{D^3},$$

$$A'A'' - B^2 = \frac{Y_1Y_2 - (\Psi_{30})^2}{D_4} = \frac{\Theta}{D^3},$$

mithin

$$(AA'-B''^2)+(AA''-B'^2)+(A'A''-B^2)=\frac{\Theta+\Theta_1+\Theta_3}{D^3},$$

Endlich ist, mit Berücksichtigung der 4. identischen Gleichung VIII, a der 10. Nummer

$$AA'A''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2+2BB'B''$$
$$=-\frac{1}{D^6}\left\{YY_1Y_2-Y(\Psi_{30})^2-Y_1(\Psi_{31})^2-Y_2(\Psi_{32})^2+2\Psi_{30}\Psi_{31}\Psi_{32}\right\}$$
$$=-\frac{\Phi}{D^4}.$$

Hiernach geht die Gleichung (9) deren drei Wurzeln immer reell und gleich den Quadraten der drei Halb-Axen sind, bezogen auf die ursprüngliche Gleichung (1), in die folgende über:

$$r^6+(Y+Y_1+Y_2)\frac{r^4}{D^2}+(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)\frac{r^2}{D^3}+\frac{\Phi}{D^4}=0. \qquad (22)$$

157. Wir können an die Discussion der vorstehenden Gleichung (22) zuvörderst die Unterscheidung der verschiedenen Fälle von Flächen zweiter Classe, die einen Mittelpunct haben, anknüpfen. Wenn

$$\Phi>0, \qquad (23)$$

so sind die drei, immer reellen Wurzeln dieser Gleichung entweder alle drei negativ oder zwei derselben sind positiv während die dritte negativ ist: die Fläche selbst ist alsdann entweder imaginär oder ein einschaliges Hyperboloid. Ersteres findet Statt, wenn gleichzeitig

$$Y+Y_1+Y_2>0, \qquad D\{\Theta+\Theta_1+\Theta_2\}>0: \qquad (24)$$

Bedingungen, welche sich in die folgenden

$$Y>0, \qquad Y_1>0, \qquad Y_2>0,$$

und darin auflösen, dass Θ, Θ_1, Θ_2 unter sich und mit D im Zeichen übereinstimmen.*) Wenn neben der Bedingung (23) nicht gleichzeitig beide Bedingungen (24) befriedigt werden, so ist die Fläche ein einschaliges Hyperboloid.

Wenn

$$\Phi<0, \qquad (25)$$

so sind die drei Wurzeln entweder alle drei positiv oder zwei sind negativ, während die dritte positiv ist. Dem entsprechend ist die Fläche entweder ein Ellipsoid oder ein zweischaliges Hyperboloid. Im Falle des Ellipsoids bestehen gleichzeitig die beiden Bedingungen:

$$Y+Y_1+Y_2<0, \qquad D(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)>0, \qquad (26)$$

welche sich dahin auflösen, dass Y, Y_1 und Y_2 negativ sind und Θ, Θ_1 und Θ_2 unter sich und

*) In Folge der letzten der beiden Bedingungen (24) ist nach den drei letzten identischen Gleichungen IV:

$$YY_1+YY_2+Y_1Y_2>0,$$

ergibt sich und hiernach mit Berücksichtigung der ersten dieser Bedingungen, dass wenigstens zwei der drei Ausdrücke Y, Y_1, Y_2 positiv sind. (112, Note.) Also stimmen nach den drei letzten identischen Gleichungen IX in Folge von (23) die Ausdrücke Θ, Θ_1, Θ_2 unter sich im Zeichen überein, also auch mit D. Nach IV und der ersten Bedingung (24) sind hiernach Y, Y_1, Y_2 sämmtlich positiv.

mit D im Zeichen übereinstimmen.*) Wenn diese Bedingungen nicht gleichzeitig erfüllt werden, so ist die Fläche ein zweischaliges Hyperboloid.

158. Wenn insbesondere

$$\Phi = 0, \tag{27}$$

so stellt, dem Verschwinden einer Wurzel entsprechend, die allgemeine Gleichung (1) eine ebene Curve dar, deren Axen durch folgende Gleichung gegeben sind:

$$r^4 + \frac{(Y+Y_1+Y_2)}{D^2} \cdot r^2 + \frac{(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{D^3} = 0. \tag{28}$$

Wenn

$$D(\Theta+\Theta_1+\Theta_2) < 0,$$

eine Bedingung, die sich nach den drei letzten identischen Gleichungen IX dahin auflöset, dass Θ, Θ_1 und Θ_2 unter sich gleiches aber mit D entgegengesetztes Zeichen haben, so haben die beiden Halb-Axen-Quadrate entgegengesetzte Zeichen und die ebene Curve ist eine Hyperbel.

Wenn

$$D(\Theta+\Theta_1+\Theta_2) > 0,$$

so sind die Halb-Axen-Quadrate beide positiv oder beide negativ und dem entsprechend ist die ebene Curve eine reelle oder imaginäre Ellipse, je nachdem:

$$Y+Y_1+Y_2 < 0 \quad \text{oder} \quad Y+Y_1+Y_2 > 0.$$

Dann stimmen die Ausdrücke Θ, Θ_1 und Θ_2 unter sich und mit D im Zeichen überein, während Y, Y_1 und Y_2 in dem einen Falle sämmtlich negativ, in dem andern sämmtlich positiv sind.

Wenn

$$\Phi = 0,$$
$$\Theta = 0, \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \Theta_2 = 0,$$

so artet die ebene Curve in ein System von zwei Puncten aus, deren halbe Entfernung durch die folgende Gleichung:

$$r^2 + (Y+Y_1+Y_2)\frac{1}{D^2} = 0$$

bestimmt wird, und die reell oder imaginär sind, je nachdem

$$Y < 0, \qquad Y_1 < 0, \qquad Y_2 < 0,$$

oder

$$Y > 0, \qquad Y_1 > 0, \qquad Y_2 > 0,$$

und die zusammenfallen, wenn

$$Y = 0, \qquad Y_1 = 0, \qquad Y_2 = 0.$$

159. Wenn

$$D = 0, \tag{29}$$

so werden die drei Axen der Fläche, die alsdann in ein Paraboloid übergeht, unendlich gross, aber die Ordnung des Unendlichgrossen ist nicht dieselbe, was ein Blick auf die Gleichung

---

*) In Folge der zweiten der beiden Bedingungen (26) ergibt sich nach IV

$$YY_1+YY_2+YY_2 > 0$$

wonach, wenn wir zugleich die erste der genannten Bedingungen berücksichtigen, wenigstens zwei der drei Ausdrücke Y, Y_1, Y_2 negativ sind. Nach IX stimmen hiernach Θ, Θ_1 und Θ_2 unter sich und also auch mit D überein, nach IV sind dann endlich Y, Y_1 und Y_2 sämmtlich negativ.

$$r^6 + \frac{(Y+Y_1+Y_2}{D^2} \cdot r^4 + \frac{(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)}{D^3} \cdot r^2 + \frac{\Phi}{D^4} = 0 \tag{22}$$

unmittelbar zeigt. Für die grösste Wurzel dieser Gleichung erhalten wir auf der Stelle:

$$r^2 = -\frac{Y+Y_1+Y_2}{D^2}, \tag{30}$$

und dann, mit Vernachlässigung dieser Wurzel, zur Bestimmung der beiden übrigen, die folgende quadratische Gleichung in ρ^2:

$$(Y+Y_1+Y_2)\,\rho^4 + (\Theta+\Theta_1+\Theta_2)\,\frac{\rho^2}{D} + \frac{\Phi}{D^2} = 0. \tag{31}$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung, die nothwendig reell sind, haben entgegengesetzte Zeichen, und dann ist die Fläche ein hyperbolisches Paraboloid, wenn

$$\Phi > 0;$$

denn nach den identischen Gleichungen I der 10. Nummer ist:

$$Y+Y_1+Y_2 = -(C^2+C'^2+C''^2),$$

also immer negativ. Wenn

$$\Phi < 0,$$

so stimmen die beiden Wurzeln im Zeichen überein, wonach die Fläche ein elliptisches Paraboloid ist. Wenn wir die letzte Gleichung berücksichtigen, und die Wurzeln der Gleichung (31) durch ρ'^2 und ρ''^2 bezeichnen, ergibt sich:

$$\rho'^2 + \rho''^2 = \frac{\Theta+\Theta_1+\Theta_2}{C^2+C'^2+C''^2} \cdot \frac{1}{D},$$

$$\rho'^2\,\rho''^2 = -\frac{\Phi}{C^2+C'^2+C''^2} \cdot \frac{1}{D^2},$$

$$r^2 = \frac{C^2+C'^2+C''^2}{D^2},$$

und hiernach, wenn wir die halben Parameter der beiden Hauptschnitte des Paraboloids p' und p'' nennen, für diese $\frac{\rho'^2}{r}$ und $\frac{\rho''^2}{r}$, folglich

$$p' + p'' = \frac{\Theta+\Theta_1+\Theta_2}{(C^2+C'^2+C''^2)^{3/2}}, \tag{32}$$

$$p'\,p'' = \frac{-\Phi}{(C+C'^2+C''^2)^2}, \tag{33}$$

so dass wir zur Bestimmung von p' und p'' die nachstehende quadratische Gleichung erhalten:

$$p^2 - \frac{\Theta+\Theta_1+\Theta_2}{(C+C'^2+C''^2)^{3/2}} \cdot p - \frac{\Phi}{(C^2+C'^2+C''^2)^2} = 0. \tag{34}$$

Wenn $\Phi > 0$, so haben die beiden halben Parameter entgegengesetzte Zeichen, die Parabeln in den beiden Hauptschnitten öffnen sich nach entgegengesetzter Richtung und das Paraboloid ist ein hyperbolisches. Als besonderer Fall gehört hierher, dass

$$\Theta+\Theta_1+\Theta_2 = 0,$$

dann sind die beiden Parameter, abgesehen vom Zeichen, einander gleich. Das hyperbolische Paraboloid heisst alsdann ein gleichseitiges.

Die beiden Wurzeln der vorstehenden Gleichung sind einander gleich, wenn

$$(\Theta+\Theta_1+\Theta_2)^2+4\,(C^2+C'^2+C''^2)\,\Phi=0.$$

Dann ist die Fläche ein elliptisches Rotations-Paraboloid, für dessen halben Parameter wir

$$p=\frac{\sqrt{-\Phi}}{C^2+C'^2+C''^2}$$

erhalten.

Wenn endlich

$$\Phi=0, \qquad \Theta+\Theta_1+\Theta_2=0,$$

so werden zwei Axen gleich Null, während die dritte unendlich gross bleibt. Die Parabel geht in ein System zweier Puncte über, von welchen einer nach gegebener Richtung unendlich weit liegt.

160. Die Coefficienten der Gleichung

$$r^6+\frac{Y+Y_1+Y_2}{D^2}.r^4+\frac{\Theta+\Theta_1+\Theta_2}{D^3}r^2+\frac{\Phi}{D^4}=0, \tag{22}$$

deren drei Wurzeln die Halb-Axen-Quadrate der durch die allgemeine Gleichung

$$\Gamma=0 \tag{1}$$

dargestellten Fläche sind, bleiben unverändert dieselben, wie wir auch die Lage dieser Fläche gegen die Coordinaten-Axen ändern mögen, eine Lagen-Aenderung, die sich in eine parallele Verschiebung der Fläche und eine Drehung derselben um den Anfangspunct auflösen lässt. Bringen wir die Fläche in eine solche Lage, dass ihr Mittelpunct mit dem Anfangspuncte zusammenfällt, so können wir, indem die Gleichung der Fläche in die folgende übergeht:

$$At^2+A'u^2+A''v^2+2B''tu+2B'tv+2Buv=w^2, \tag{2}$$

die Gleichung (22) unter der folgenden einfacheren Form schreiben:

$$r^6-(A+A'+A'')r^4+[(AA'-B''^2)+(AA''-B'^2)+(A'A''-B^2)]r^2 \\ -(AA'A''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2+2BB'B'')=0. \tag{9}$$

Es bedeuten aber A, A', A'' die Quadrate derjenigen Perpendikel die, vom Mittelpuncte der Fläche aus, auf diejenigen Tangential-Ebenen, die den drei Coordinaten-Ebenen parallel sind, gefällt werden können. Die Summe dieser Quadrate ist also, da wir voraussetzen, dass die Coordinaten-Ebenen auf einander senkrecht stehen, gleich dem Quadrate des Abstandes des Durchschnittspunctes dreier solcher Tangential-Ebenen vom Mittelpuncte der Fläche. Da hiernach der Ausdruck

$$A+A'+A''\equiv-\frac{Y+Y_1+Y_2}{D^2}$$

bei jeder Drehung der Fläche um ihren Mittelpunct constant bleibt, so ist der nachstehende Satz bewiesen.

Der geometrische Ort für solche körperliche Ecken, welche von drei beliebigen paarweise auf einander senkrechten Tangential-Ebenen einer gegebenen Fläche der zweiten Classe gebildet werden, ist eine Kugel, deren Radius der Quadratwurzel aus der Summe der drei Halbaxen-Quadrate der Fläche gleich ist.

Wenn A für sich constant ist, so ist es auch $(A'+A'')$. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn die Coordinaten-Ebene YZ ihre Richtung behält, während die beiden anderen Coordinaten-Ebenen eine beliebige Lage erhalten. Dann ergibt sich der Satz, dass die Durchschnitts-Linie zweier auf einander senkrechten Ebenen, dir sich so bewegen, dass sie in allen ihren Lagen eine gegebene Fläche zweiter Classe mit einem Mittelpuncte berühren, einen geraden Cylinder mit kreisförmiger Basis beschreiben. Wenn insbesondere $A = 0$, so ist die durch den Mittelpunct gehende Coordinaten-Ebene YZ selbst eine Tangential-Ebene der Fläche und also zugleich eine Tangential-Ebene des Asymptoten-Kegels. Die Fläche ist also ein Hyperboloid und der Radius des beschriebenen Cylinders gleich der Quadrat-Wurzel aus der Summe der Quadrate der drei Halb-Axen.

Zwei Ebenen, die einen Kegel in geraden Linien berühren, bilden einen Winkel, dessen Grösse sich π (oder 0) um so mehr annähert, je näher diese Berührungs-Linien einander rücken. Aber nicht jedesmal lässt sich demselben eine rechtwinklige Kante umschreiben: es gibt im Allgemeinen ein maximum der Entfernung des Durchschnitts-Winkel der beiden Berührungs-Ebenen von π (oder 0). Ist für dieses maximum der fragliche Durchschnitts-Winkel $> \frac{1}{2}\pi$ (oder $< \frac{1}{2}\pi$), das heisst, wird, indem wir aus der unbegrenzten Kegelfläche einen geraden Kegel mit elliptischer Basis abschneiden, die kleinere Axe dieser Basis von der Spitze aus unter einem Winkel gesehen, der grösser ist als ein rechter — so lässt sich keine rechtwinklige Kante der Kegelfläche umschreiben. Also auch nur in dem entgegengesetzten Falle, wo diess möglich ist, können wir annehmen, dass gleichzeitig $A = 0$ und $A' = 0$, wonach A'' constant wird. Wenn man also senkrecht auf der Durchschnitts-Linie irgend zweier auf einander senkrechter Tangential-Ebenen des Asymptoten-Kegels eine Tangential-Ebene an das Hyperboloid legt, so ist der Abstand einer solchen Tangential-Ebene vom Mittelpuncte constant. Wenn insbesondere auch $A'' = 0$, und also auch die Quadrat-Summe der drei Halb-Axen-Quadrate gleich Null ist, so verschwindet der fragliche Abstand, und auch die dritte Coordinaten-Ebene, berührt, indem sie durch den Mittelpunct geht, den Asymptoten-Kegel. Wir haben hiermit zugleich den Satz bewiesen, dass wenn sich einem Kegel zweiter Ordnung überhaupt eine rechtwinklige Ecke umschreiben lässt, sich demselben solcher Ecken unendlich viele umschreiben lassen, in der Art, dass jede durch die Spitze des Kegels gehende Ebene, welche auf zwei auf einander senkrechten Tangential-Ebenen senkrecht steht, ebenfalls den Kegel berührt.

Der allgemeine Satz dieser Nummer behält seine volle Geltung, auch dann, wenn an die Stelle der Fläche eine ebene Curve zweiter Classe tritt.

Der geometrische Ort für solche Ecken, die von drei paarweise auf einander senkrechten Ebenen, die fortwährend eine Curve zweiter Classe berühren, gebildet werden, ist eine Kugel, deren Radius gleich ist der Quadrat-Wurzel aus der Summe der beiden Halb-Axen-Quadrate und deren Mittelpunct mit dem Mittelpuncte der Curve zusammenfällt.

Es kann auch noch die ebene Curve in ein System von zwei Puncten übergehen und dann eine körperliche Ecke gebildet werden, indem zwei der drei Tangential-Ebenen und also auch ihre Durchschnitts-Linie (die übrigens eine ganz beliebige sein kann) durch den einen Punct gehen, während die dritte Tangential-Ebene, die auf dieser Durchschnitts-Linie senkrecht ist, durch den anderen Punct geht. Dann kommt also der Satz darauf hinaus, dass, wenn man, von einem festen Puncte aus, auf Ebenen, die durch einen zweiten festen Punct gehen, Perpendikel fällt, der Fusspunct dieser Perpendikel eine Kugel ist, welche die Verbindungs-Linie der beiden festen Puncte zu einem ihrer Durchmesser hat.

161. Analoge Sätze gibt es auch für den Fall der parabolischen Flächen. Um diese zu erhalten, wollen wir an die Stelle der Gleichung (22) die Gleichung (34) setzen, deren Wurzeln, in dem Falle der genannten Flächen, die halben Parameter der beiden Hauptschnitte sind. So lange die Fläche dieselbe bleibt und nur ihre Lage gegen die Coordinaten-Axen sich ändert, behält der Coefficient des zweiten Gliedes

$$-\frac{\Theta+\Theta_1+\Theta_2}{(C^2+C'^2+C''^2)^{3/2}}$$

denselben Werth, indem er immer, wenn wir sein Zeichen ändern, der Summe der beiden halben Parameter gleich ist. Diesem Ausdrucke sind wir bereits schon in der 151. Nummer begegnet. Wenn wir nemlich um das Paraboloid eine rechtwinklige körperliche Ecke beschreiben, die von drei den Coordinaten-Ebenen parallelen Ebenen gebildet wird, so erhalten wir den Abstand dieser Ecke von der Tangential-Ebene im Scheitel der Fläche gleich der Hälfte des vorstehenden Ausdrucks. Dieser Abstand bleibt also constant bei einer beliebigen Drehung des Coordinaten-Systems, und somit ist der folgende Satz bewiesen.

Der geometrische Ort für die Scheitel rechtwinkliger körperlicher Ecken, die einem gegebenen, elliptischen oder hyperbolischen, Paraboloide umschrieben sind, ist eine Ebene, die der Tangential-Ebene im Scheitel parallel ist und von dieser, auf entgegengesetzter Seite, doppelt so weit absteht, als die Mitte zwischen den beiden auf der Axe der Fläche liegenden Brennpuncte der Hauptschnitte.

Für den Fall des Rotations-Paraboloids steht diese Ebene doppelt so weit von dem Scheitel ab, als die Polar-Ebene des Brennpunctes der Fläche; für den Fall des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids, das durch die Bedingungs-Gleichung

$$\Theta+\Theta_1+\Theta_2 = 0$$

characterisirt ist, fällt diese Ebene mit der Tangential-Ebene im Scheitel zusammen. Wenn endlich die Fläche in eine Parabel ausartet, so geht die fragliche Ebene durch die Directrix dieser Parabel und steht auf der Ebene derselben senkrecht.

162. Zur Veranschaulichung füge ich noch einige Bemerkungen hinzu. Eine körperliche Ecke, die überhaupt einer Fläche zweiter Ordnung und Classe umschrieben ist, ist zugleich auch einem Kegel umschrieben, der seinerseits der Fläche umschrieben ist. Wenn die körperliche Ecke eine rechtwinklige ist, so gibt es unendlich viele solcher Ecken mit demselben Scheitel, die alle dem Kegel und also auch der Fläche umschrieben sind, in der Art, dass jeder Punct der Kugel-Oberfläche, die wir in der vorigen Nummer als geometrischen Ort für die, der Fläche umschriebenen, rechtwinkligen körperlichen Ecken erhalten haben, der Scheitel von unendlich vielen solchen Ecken ist. Legen wir durch irgend einen Punct dieser Kugel-Oberfläche irgend eine Tangential-Ebene an die Fläche, so gibt es immer zwei andere durch denselben Punct gehende Tangential-Ebenen, die auf der ersten senkrecht stehen und auch einander rechtwinklig durchschneiden. Die fragliche Kugel-Oberfläche ist hiernach zugleich auch der geometrische Ort für die Mittelpuncte solcher Kegel, denen überhaupt rechtwinklige körperliche Ecken sich einschreiben lassen. In dem Falle des Ellipsoids entspricht jedem Puncte der Kugel-Oberfläche ein reeller Kegel mit unendlich vielen umschriebenen rechtwinkligen Ecken; ebenso in dem Falle des zweischaligen Hyperboloids. In diesem letztern Falle wird die Kugel-Oberfläche durch den Asymptoten-Kegel in drei Zonen getheilt. Bezeichnen wir diejenigen beiden Puncte, in welchen dieselbe von der

reellen Axe der Fläche geschnitten wird, als ihre Pole, so ziehen sich um die beiden Pole zwei, im Allgemeinen, durch Linien doppelter Krümmung umschlossenen Zonen, denen Kegel entsprechen, welche die näher liegende Schale der Fläche in einer Ellipse berühren. Die dritte Zone liegt zu beiden Seiten des Aequators und ihr entsprechen Kegel, welche beide Schalen in einer Hyperbel berühren. Diejenigen Kegel, deren Mittelpuncte auf der Durchschnitts-Curve der Kugel-Oberfläche und des Asymptoten-Kegels liegen, berühren die näherliegende Schale in einer Parabel. Wenn die Fläche ein einschaliges Hyperboloid ist, so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Wir wollen die grössere reelle Halb-Axe α, die kleinere β und die halbe Neben-Axe γ' $(\equiv\gamma\sqrt{-1})$ nennen und überhaupt voraussetzen, dass die Kugel-Oberfläche reell ist, was

$$\alpha^2+\beta^2 > \gamma'^2$$

fordert. Die Kugel-Oberfläche schneidet entweder die Fläche oder schneidet sie nicht. Im letztern Falle ist ihr Radius kleiner als die kleinere reelle Axe, oder was hiermit gleichbedeutend ist:

$$\alpha^2 < \gamma^2.$$

Der Asymptoten-Kegel theilt hier wiederum die Kugel-Oberfläche in drei Zonen und wenn wir hier die Neben-Axe als die Axe der Kugel betrachten, so erhalten wir dieselbe Bestimmung wie eben über Kegel, die die Fläche in Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln berühren, wodurch zugleich auch ein Unterschied über die Art gegeben ist, wie die entsprechenden rechtwinkligen Ecken von dem zwei- oder einschaligen Hyperboloide berührt werden. Wenn der Radius der Kugel grösser ist als die kleinere reelle Axe und demnach

$$\alpha^2 > \gamma'^2,$$

so wird das einschalige Hyperboloid von der Kugel geschnitten, und die Durchschnitts-Curve bezeichnet auf der Kugel-Oberfläche die Gränze zwischen Puncten die die Mittelpuncte reeller und die Mittelpuncte imaginärer Kegel sind. Für einen Punct der fraglichen Durchschnitts-Curve artet der entsprechende Kegel in ein System von zwei zusammenfallenden Ebenen aus, dem eine einzige körperliche Ecke zugehört. Die Berührungs-Ebene ist die eine der, diese Ecke bildenden, Ebenen, die beiden andern (ebenfalls als Tangential-Ebenen des ausgearteten Kegels zu betrachten) schneiden sich in der Normalen. Die beiden durch diese Normale gehenden Tangential-Ebenen der Fläche müssen sich also rechtwinklig schneiden, oder, mit andern Worten, die beiden in dem Durchschnittspuncte von Kugel und Hyperboloid sich schneidenden beiden Erzeugenden des letztern stehen auf einander senkrecht. Beiläufig ist also der folgende Satz bewiesen.

Der geometrische Ort für die Scheitel der einem gegebenen einschaligen Hyperboloid aufgeschriebenen rechten Winkel, ist die Durchschnitts-Curve dieser Fläche und einer Kugel, deren Radius-Quadrat der Summe der drei Halb-Axen-Quadrate $(\alpha^2+\beta^2-\gamma'^2)$ gleich ist.

Wenn

$$\alpha^2 = \gamma'^2,$$

so reducirt sich die Durchschnitts-Curve auf einen Punct. Sie besteht aus zwei Theilen, wenn

$$\alpha^2 > \gamma'^2, \qquad \beta^2 < \gamma'^2,$$

die in den Scheiteln der grössern Axe zusammenstossen, wenn

$$\beta^2 = \gamma'^2,$$

und sich wieder in anderem Sinne trennen, wenn

$$\alpha^2 > \beta^2 > \gamma'^2.$$

Der Ort für die Mittelpuncte imaginärer Kegel bildet einen Theil der Aequatorial-Zone der Kugel und liegt dem Aequator am nächsten.

Wenn das Hyperboloid eine Rotations-Fläche ist, so wird es von der fraglichen Kugel in zwei gleichen parallelen Kreisen geschnitten, die, im Falle des gleichseitigen Rotations-Hyperboloids, mit dem Kreise des Hauptschnittes zusammenfallen.

In dem Falle der beiden Paraboloide artet die Kugel-Oberfläche in eine Ebene aus, welche, wenn das Paraboloid ein hyperbolisches ist, dieses in einer Hyperbel schneidet. Diese Hyperbel ist der geometrische Ort für die Scheitel der, der Fläche aufgeschriebenen, rechten Winkel. In dem Falle des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids fällt die fragliche Ebene mit der Tangential-Ebene im Scheitel desselben zusammen, und ist mithin auch eine gemeinsame Tangential-Ebene aller entsprechenden Kegel. Durch jede gerade Linie, welche auf dieser Tangential-Ebene senkrecht steht, mit andern Worten durch jeden Durchmesser der Fläche, lassen sich also zwei auf einander senkrechte Tangential-Ebenen an dieselbe legen. Wir erhalten diese Tangential-Ebenen, wenn wir, einerseits durch den Durchmesser und andrerseits durch die, in Durchschnittspuncte der Fläche und des Durchmessers sich schneidenden, beiden Erzeugenden zwei Ebenen legen. Und somit kommt das erhaltene Resultat darauf hinaus, dass die Linien der beiden Erzeugungen eines Paraboloides überhaupt zweien gegebenen Ebenen parallel sind, die auf der Tangential-Ebene im Scheitel der Fläche senkrecht stehen, so dass die Projectionen dieser Linien in der letztgenannten Ebene mit einander einen constanten Winkel bilden, der in dem Falle des gleichseitigen Paraboloids ein rechter ist.

Wenn die Fläche in eine ebene Curve ausartet, so ist insbesondere die Ebene der Curve selbst als eine Tangential-Ebene derselben anzusehen, und somit erhalten wir den bekannten Satz der Planimetrie, dass der geometrische Ort für die Scheitel rechter Winkel, die einem gegebenen Kegelschnitte umschrieben sind, ein Kreis ist, der, wenn der Kegelschnitt in eine Parabel sich verwandelt, in die Directrix derselben übergeht.

163. Um den Ausdruck

$$AA'-B''^2 \equiv \frac{\Theta_2}{D^3} \qquad (35)$$

geometrisch zu deuten, brauchen wir bloss in der allgemeinen Gleichung (2)

$$v = 0$$

zu setzen, wonach wir für diejenigen Tangential-Ebenen der Fläche, die auf der Ebene XY senkrecht stehen, die Gleichung

$$At^2+A'u^2+2B''tu = w^2$$

erhalten. Diese Gleichung stellt, in Verbindung mit der vorhergehenden, denjenigen der Eläche umschriebenen Cylinder dar, welcher auf der Ebene XY senkrecht steht oder auch, allein für sich, wobei wir von der dritten Dimension ganz abstrahiren können, die Projection der gegebenen Fläche auf die genannte Coordinaten-Ebene. Die identischen Ausdrücke (35) bedeuten also, in Gemässheit der Gleichung (10a), das Product der beiden Halb-Axen-Quadrate dieser Projection. Ebenso bedeuten $\frac{\Theta_1}{D^3}$ und $\frac{\Theta}{D^3}$ die Producte der beiden Halb-Axen-Quadrate der Projection der Fläche auf die Ebenen XZ und YZ. Da für eine gegebene Fläche der Coefficient des dritten Gliedes der Gleichung (9)

oder (22) unverändert bleibt, welche Lage die gegebene Fläche gegen die Coordinaten-Axen auch haben mag, so ergibt sich hiernach der folgende Satz.

Die Quadrat-Summe der drei Projections-Flächen eines gegebenen Ellipsoids auf irgend drei auf einander senkrechte Ebenen ist constant.

Die Modificationen dieses Satzes, wenn an die Stelle des Ellipsoids eines der beiden Hyperboloide tritt, ergeben sich leicht. Für den Fall des zweischaligen Hyperboloids ist die Projection ein reeller Kegelschnitt und dann immer eine Hyperbel, wenn derjenige Durchmesser der Fläche, welcher auf der Projections-Ebene senkrecht steht, ausserhalb des Asymptoten-Kegels liegt. Für den Fall des einschaligen Hyperboloids ist die Projection reell und dann nothwendig eine Ellipse, wenn derjenige Durchmesser, welcher auf der Projections-Ebene senkrecht steht, innerhalb des Asymptoten-Kegels liegt. Wenn also in dem Falle des einschaligen Hyperboloids innerhalb des Asymptoten-Kegels rechtwinkliche Ecken sich legen lassen, so behält der vorstehende Satz seine unmittelbare Geltung. Wenn die Projections-Ebene auf irgend einer Seite des Asymptoten-Kegels senkrecht steht, so verschwindet die Fläche der Projection. Nimmt man, wenn es überhaupt möglich ist, irgend zwei solche Seiten des Kegels, die auf einander senkrecht stehen, für die Axen Y und Z, so wird durch das Verschwinden von Θ_2 und Θ_1 der Ausdruck $\frac{\Theta}{D^3}$ constant. Die Projection eines gegebenen Hyperboloids auf jede Durchmesser-Ebene, die den Asymptoten-Kegel in einem rechten Winkel schneidet, hat einen constanten Flächen-Inhalt. Auch dieser ist insbesondere gleich Null, wenn sich eine rechtwinklige körperliche Ecke in den Asymptoten-Kegel beschreiben lässt. Die auf diese Weise particularisirte Fläche wird durch die folgende Bedingungs-Gleichung charakterisirt:

$$\Theta_2+\Theta_1+\Theta = 0.$$

164. Das Product der drei Halb-Axen-Quadrate der Fläche ist gleich dem, mit entgegengesetztem Zeichen genommenen, letzten Gliede der Gleichung (22), nemlich gleich

$$-\frac{\Phi}{D_4} \equiv -\frac{\Theta\Theta_1-(\Delta_{01})^2}{D^4\,Y_2} \equiv J^2. \qquad (36)$$

In eine geometrische Discussion dieses Ausdrucks wollen wir hier nicht näher eingehen, und verweisen in dieser Beziehung auf die analogen Erörterungen des 6. Paragraphen (116). Nur eine Bemerkung wollen wir an die Form des vorstehenden Ausdrucks noch anknüpfen. Es bedeuten $-\frac{Y}{D^2}$, $-\frac{Y_1}{D^2}$ und $-\frac{Y_2}{D^2}$ die Quadrate derjenigen Perpendikel, die, vom Mittelpuncte der Fläche aus, auf diejenigen Tangential-Ebenen derselben, welche den willkührlich angenommenen, auf einander senkrechten, Coordinaten-Ebenen parallel sind, gefällt werden können, wonach

$$-\frac{YY_1Y_2}{D^6} \equiv J'^2 \qquad (37)$$

das Quadrat des achten Theiles des Inhaltes desjenigen Parallelepipeds ist, dessen Seiten-Flächen den Coordinaten-Ebenen parallel sind, so wie J^2 das Quadrat des achten Theiles des Inhalts desjenigen Parallelepipeds ist, dessen Seiten-Flächen den drei Hauptschnitten parallel sind. Es ist in Folge von (36):

$$(-Y_2)\,D^4J^2 \equiv \Theta\Theta_1-(\Delta_{01})^2 < \Theta\Theta_1, \qquad (38)$$

ferner, in Folge der drei letzten identischen Gleichungen IV:

$$\Theta\Theta_1 \equiv \frac{|Y_1 Y_2 - (\Psi_{30})^2|\,|YY_2 - (\Psi_{31})^2|}{D^2} < \frac{YY_1 (Y_2)^2}{D^2} \equiv$$

$$-Y_2\left(-\frac{YY_1 Y_2}{D^2}\right) \equiv (-Y_2)\, D^4 J'^2. \tag{39}$$

Bei diesen Schlussfolgen ist vorausgesetzt, dass die Werthe von Θ und Θ_1 im Zeichen übereinstimmen und dass Y, Y_1 und Y_2 sämmtlich negative Werthe haben, was für den Fall des Ellipsoids immer Statt findet. Stellen wir hiernach die Ausdrücke (38) und (39) zusammen, so ergibt sich, nach Hinweglassung des positiven Factors $(-Y_2)\, D^4$:

$$J^2 < J'^2.$$

Es ist hiermit bewiesen, dass unter allen, einem gegebenen Ellipsoide umschriebenen, rechtwinkligen Parallelepipeden dasjenige das kleinste ist, dessen Seiten-Ebenen den drei Hauptschnitten parallel sind.

Hieraus folgt weiter, dass das grösste Ellipsoid, welches einem gegebenen Parallelepiped sich einschreiben lässt, dasjenige ist, dessen drei Hauptschnitte den Seitenflächen desselben parallel sind, und das also diese Seitenflächen in ihren Mittelpuncten berührt. Denn das Product der drei Axen dieses Ellipsoids ist dem Inhalte des gegebenen Parallelepipeds gleich und das Product der drei Axen jedes andern eingeschriebenen Ellipsoids nach dem eben bewiesenen Satze kleiner als derselbe.*)

Da alle rechtwinkligen Parallelepipede, die einem gegebenen Ellipsoid umschrieben, zugleich einer Kugel eingeschrieben sind, so ist das grösste dieser Kugel eingeschriebene Parallelepiped, welches, wie bekannt ein Würfel ist, zugleich auch das grösste der Fläche umschriebene. Es bleibt nur noch nachzuweisen, dass einem gegebenen Ellipsoide, das wir, in der Voraussetzung

---

*) Auf *maximum*- und *minimum*-Bestimmungen der vorstehenden Art werden wir noch ausführlicher und im Zusammenhange zurückkommen. Nur bemerken wir gleich hier schon, dass die Sätze des Textes sogleich in die nachstehenden sich verallgemeinern lassen.

Unter allen einem gegebenen Ellipsoid umschriebenen Parallelepipeden, für welche die Neigung der Seitenflächen gegen einander gegeben ist, hat dasjenige (wenn überhaupt ein solches vorhanden ist) den kleinsten Inhalt, dessen Seitenflächen dreien zugeordneten Durchmesser-Ebenen parallel sind.

Von allen irgend einem gegebenen Parallelepiped eingeschriebenen Ellipsoiden hat dasjenige den grössten Inhalt, welches drei den Seiten desselben parallele zugeordnete Durchmesser hat.

Wir brauchen hierbei nur zu erwägen, dass, wenn wir die Gleichung (2) auf irgend ein schiefwinkliges Coordinaten-System beziehen, in welchen zwei der drei Axen den Winkel ε einschliessen und die dritte Axe mit der Ebene dieser beiden den Winkel δ bildet und wir dann

$$-\frac{YY_1 Y_2}{D^6} = J'^2, \qquad \frac{\Phi}{D^4} = J^2,$$

setzen, die Ausdrücke

$$J' \sin\varepsilon \sin\delta, \qquad J \sin\varepsilon \sin\delta$$

bezüglich den Inhalt desjenigen umschriebenen Parallelepipeds, dessen Seitenflächen den Coordinaten-Ebenen parallel sind, und desjenigen, in welches dieses übergeht, wenn wir das Coordinaten-System so drehen, dass es, nach der Drehung, mit drei zugeordneten Durchmessern zusammenfällt, darstellen.

rechtwinkliger Coordinaten-Axen, durch folgende Gleichung darstellen wollen:

$$\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2 + \gamma^2 v^2 = w^2, \tag{40}$$

sich wirklich ein Würfel umschreiben lässt. Ein solcher Würfel muss, weil er einer concentrischen Kugel, deren Radius $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ zum Quadrate hat, eingeschrieben ist, zugleich einer zweiten Kugel umschrieben sein, deren Radius-Quadrat gleich $\frac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ ist, und deren Gleichung hiernach

$$\tfrac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(t^2+u^2+v^2) = w^2. \tag{41}$$

Um die Richtung der Seiten des Würfels zu bestimmen, müssen wir w^2 zwischen den beiden vorstehenden Gleichungen eliminiren; wir finden alsdann

$$(2\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)t^2+(2\beta^2-\alpha^2-\gamma^2)u^2+(2\gamma^2-\alpha^2-\beta^2)v^2 = 0. \tag{42}$$

Das System dieser und der folgenden Gleichung

$$w = 0$$

stellt einen Kegel dar, als geometrischen Ort, der von allen Ebenen umhüllt wird, die, parallel mit den Seitenflächen aller dem Ellipsoid umschriebenen Würfel, durch den Mittelpunkt dieser Fläche gehen. Dieser Kegel ist immer reell, denn die Summe der drei Coefficienten von t^2, u^2 und v^2 ist gleich Null, woraus — was die Natur der Sache von Vorne herein verlangt — zugleich folgt, dass demselben sich unendlich viele rechtwinklige körperliche Ecken umschreiben lassen. Jeder solchen Ecke entspricht ein der Fläche umschriebener Würfel. Für den Fall des Ellipsoids sind die unendlich vielen umschriebenen Würfel sämmtlich reell.

Wenn wir statt des Ellipsoids eines der beiden Hyperboloide betrachten, so gibt es keine umschriebenen Parallelepipede mehr, deren Seitenflächen den drei Hauptschnitten parallel sind; wenn es aber umschriebene rechtwinklige Parallelepipede gibt, so haben unter ihnen die Würfel immer noch den grössten Inhalt.

§. 9.

Bestimmung der Axen in dem Systeme der Punct- und Plan-Coordinaten bei schiefwinkligen Coordinaten-Axen. Discussion besonderer Formen.

165. Bei der Bestimmung eines Systems dreier zugeordneter Durchmesser einer Fläche zweiter Classe mit einem Mittelpuncte kommt es, abgesehen von seiner Lage, auf die Länge der drei Durchmesser und diejenigen drei Winkel an, welche dieselben, paarweise genommen, mit einander bilden. Es seien ρ, σ, τ die drei Halb-Durchmesser-Längen und ε'', ε', ε die drei fraglichen Winkel. Dann geben die Sätze der 119.—121. Nummer, auf deren Beweis in dem Systeme der Plan-Coordinaten wir hier nicht mehr zurückkommen wollen, die folgenden drei Relationen zwischen den sechs zu bestimmenden Stücken:

$$\rho^2+\sigma^2+\tau^2 = -\frac{Y+Y_1+Y_2}{D^2},$$

$$\rho^2\sigma^2\sin^2\varepsilon''+\rho^2\tau^2\sin^2\varepsilon'+\sigma^2\tau^2\sin^2\varepsilon = \frac{\Theta+\Theta_1+\Theta_2}{D^3}, \qquad (1)$$

$$\rho^2\sigma^2\tau^2(1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2\varepsilon''+2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'') = -\frac{\Phi}{D^4}.^*)$$

Die vorstehenden Gleichungen bestimmen unmittelbar die drei Coefficienten der Gleichung (22) der 156. Nummer, wenn die Längen irgend dreier zugeordneter Durchmesser der Fläche und die von je zwei derselben gebildeten Winkel gegeben sind. Wird also diese Fläche zweiter Ordnung und Classe in dem Systeme der Punct- und Plan-Coordinaten durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\sigma^2}+\frac{z^2}{\tau^2} = 1,$$
$$\rho^2t^2+\sigma^2u^2+\tau^2v^2 = w^2,$$

indem wir beidesmal irgend drei zugeordnete Durchmesser derselben zu Coordinaten-Axen nehmen, so erhalten wir zur Bestimmung der drei Halb-Axen-Quadrate die folgende Gleichung des dritten Grades:

$$r^6-(\rho^2+\sigma^2+\tau^2)r^4$$
$$+(\rho^2\sigma^2\sin^2\varepsilon''+\rho^2\tau^2\sin^2\varepsilon'+\sigma^2\tau^2\sin^2\varepsilon)r^2$$
$$-\rho^2\sigma^2\tau^2(1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2\varepsilon''+2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'') = 0. \qquad (2)$$

166. Die allgemeine Aufgabe „die Grösse der Axen einer Fläche zweiter Ordnung und Classe zu bestimmen, wenn dieselbe, bei gegebener Richtung der Coordinaten-Axen, durch die allgemeine Gleichung in Punct- oder Plan-Coordinaten gegeben ist“ haben wir, in der Voraussetzung, dass die Coordinaten-Axen sich unter rechten Winkeln schneiden, vollständig in der 111. und 156. Nummer gelöset, und in der Voraussetzung schiefwinkliger Coordinaten-Axen für den besondern Fall, dass diese mit irgend drei zugeordneten Durchmessern zusammenfallen (165). Um diese Aufgabe bei schiefwinkligen Axen vollständig zu lösen ist uns der directe Weg unmittelbar gewiesen, indem wir die frühern Entwicklungen nur zu verallgemeinern brauchen.

Legen wir zum Beispiel Punct-Coordinaten zu Grunde, indem wir wieder, jedoch unter der

---

*) Wenn wir, was die Ableitung der letzten Gleichung betrifft, wie in den angezogenen Nummern, denjenigen Winkel, welchen der dritte Durchmesser mit der Ebene der beiden ersten bildet, durch δ'' und denjenigen Winkel, welcher am ersten Durchmesser, von den beiden Ebenen, die gleichzeitig mit diesem Durchmesser auch noch bezüglich den zweiten und dritten enthalten, gebildet werden, durch ζ bezeichnen, so ist

$$\sin\delta'' = \sin\varepsilon'\sin\zeta,$$
$$\cos\zeta = \frac{\cos\varepsilon-\cos\varepsilon'\cos\varepsilon''}{\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''}.$$

Wenn wir zwischen den beiden vorstehenden Gleichungen ζ eliminiren, so ergibt sich nach einfachen Reductionen:

$$(\sin\delta''\sin\varepsilon'')^2 = 1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2\varepsilon''+2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'',$$

wobei wir im ersten Theile $\sin\delta''\sin\varepsilon''$ auch mit $\sin\delta'\sin\varepsilon'$ und $\sin\delta\sin\varepsilon$ vertauschen können.

Voraussetzung, dass die drei Coordinaten-Axen paarweise genommen mit einander irgend drei gegebene Winkel ε'', ε' und ε bilden, von der Gleichung

$$Ax^2+Ay^2+A''z^2+2B''xy+2B'xz+2Byz = 1$$

ausgehen, so nehmen wir wieder den Anfangspunct der Coordinaten in dem Mittelpuncte der Fläche an. Dann sind

$$x = az, \qquad y = bz, \tag{1}$$

die Gleichungen irgend eines Durchmessers, und wenn wir, der Kürze wegen,

$$\begin{aligned} Aa + B''b+B' &\equiv g,\\ B''a + A'b + B &\equiv h,\\ B'a + Bb+A'' &\equiv k \end{aligned}$$

setzen, erhalten wir für die Gleichung der zugeordneten Diametral-Ebene:

$$gx+hy+kz = 0.$$

Derjenige Durchmesser, welcher auf dieser Ebene senkrecht steht, hat, wenn wir wiederum der Kürze wegen

$$\begin{aligned} \frac{k(\cos\varepsilon\cos\varepsilon''-\cos\varepsilon')+h(\cos\varepsilon\cos\varepsilon'-\cos\varepsilon'')+g\sin^2\varepsilon}{k\sin^2\varepsilon''+h(\cos\varepsilon'\cos\varepsilon''-\cos\varepsilon)+g(\cos\varepsilon\cos\varepsilon''-\cos\varepsilon')} &\equiv m\\ \frac{k(\cos\varepsilon'\cos\varepsilon''-\cos\varepsilon)+h\sin^2\varepsilon'+g(\cos\varepsilon\cos\varepsilon'-\cos\varepsilon'')}{k\sin^2\varepsilon''+h(\cos\varepsilon'\cos\varepsilon''-\cos\varepsilon)+g(\cos\varepsilon\cos\varepsilon''-\cos\varepsilon')} &\equiv n \end{aligned}$$

setzen, die folgenden beiden Gleichungen:

$$x = mz, \qquad y = nz.^*)$$

Um also auszudrücken, dass die Gleichungen (1) insbesondere eine der drei Axen der Fläche darstellen, erhalten wir die Bedingungen

$$a = m, \qquad b = n, \tag{2}$$

wodurch die Richtungen der Axen vollkommen bestimmt sind.

Stellen wir die Axen-Gleichungen (1) mit der Gleichung der Fläche zusammen, und nennen die Länge der bezüglichen halben Axe r, so kommt:

$$\begin{aligned} (Aa^2+Bb^2+A'')+2B''ab+2B'a+2Bb)x^2 &= 1,\\ r^2 &= (1+a^2+b^2+2ab\cos\varepsilon''+2a\cos\varepsilon'+2b\cos\varepsilon)x^2, \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} &(Aa^2+A'b^2+A''+2B''ab+2B'a+2Bb)r^2\\ &= (1+a^2+b^2+2ab\cos\varepsilon''+2a\cos\varepsilon'+2b\cos\varepsilon). \end{aligned}$$

Wenn wir zwischen dieser Gleichung und den beiden Gleichungen (2) a und b eliminiren, so ergibt sich die verlangte Gleichung des dritten Grades in r^2.

167. Der am Schlusse der vorigen Nummer angezeigten Elimination, die, wenn auch nicht unsere Kräfte, doch unsere Geduld übersteigt, können wir uns überheben, und, durch Induction geleitet, das Resultat sogleich hinschreiben, und dann nachweisen, dass es nothwendig das richtige ist. Diesen Weg wollen wir bei der Bestimmung der Axen der Fläche sowohl in dem Systeme der Punct-Coordinaten als auch in dem Systeme der Plan-Coordinaten einschlagen.

---

*) Vergl. Magnus S. 32.

Es sei hiernach, indem wir zuerst Plan-Coordinaten zu Grunde legen,

$$At^2+A'u+^2A''v^2+2B''tu+2B'tv+2Buv+2Ctw+2C'uw+2C''vw+Dw^2 = 0 \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung der Fläche, bezogen auf irgend drei gegebene Coordinaten-Axen, von welchen die erste und zweite, die erste und dritte und die zweite und dritte bezüglich die Winkel ε'', ε' und ε einschliessen. Verschieben wir diese Axen parallel mit sich selbst bis ihr Durchschnitt mit dem Mittelpuncte der Fläche zusammenfällt, so geht die vorstehende Gleichung, gerade wie in der 152. Nummer, indem wir

$$-\frac{Y}{D^2} \equiv A, \quad -\frac{Y_1}{D^2} \equiv A', \quad -\frac{Y_2}{D^2} \equiv A'',$$

$$-\frac{\Psi_{30}}{D^2} \equiv B, \quad \frac{\Psi_{31}}{D^2} \equiv B', \quad -\frac{\Psi_{32}}{D^2} \equiv B''$$

setzen, in die folgende über:

$$At^2+A'u^2+A''v^2+2B''tu+2B'tv+2Buv = w^2.$$

Wir behaupten, dass alsdann folgende in Beziehung auf r^2 cubische Gleichung

$$\begin{aligned} r^6 - \{&A+A'+A''+2B''\cos\varepsilon''+2B'\cos\varepsilon'+2B\cos\varepsilon\}\, r^4 \\ +\Big\{&(AA'-B''^2)\sin^2\varepsilon''-2(A''B''-BB')(\cos\varepsilon''-\cos\varepsilon\cos\varepsilon') \\ &+(AA''-B'^2)\sin^2\varepsilon'-2(A'B'-BB'')(\cos\varepsilon'-\cos\varepsilon\cos\varepsilon'') \\ &+(A'A''-B^2)\sin^2\varepsilon-2(AB-B'B'')(\cos\varepsilon-\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'')\Big\}\, r^2 \\ &-(AA'A''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2+2BB'B'')\times \\ &(1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2\varepsilon''+2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'') \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

die drei Halb-Axen-Quadrate der Fläche zu ihren Wurzeln hat. Beziehen wir uns auf die ursprüngliche Flächen-Gleichung (1) zurück, so geht diese Gleichung, unter Beibehaltung der Bezeichnung der 10. Nummer in die nachstehende über:

$$\begin{aligned} r^6 + &\{Y+Y_1+Y_2+2\Psi_{32}\cos\varepsilon''+2\Psi_{31}\cos\varepsilon'+2\Psi_{30}\cos\varepsilon\}\frac{r^4}{D^2} \\ + &\{\Theta_2\sin^2\varepsilon''+\Theta_1\sin^2\varepsilon'+\Theta\sin^2\varepsilon \\ -\,&2\Delta_{12}(\cos\varepsilon-\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'')-2\Delta_{02}(\cos\varepsilon'-\cos\varepsilon\cos\varepsilon'')-2\Delta_{01}(\cos\varepsilon''-\cos\varepsilon\cos\varepsilon')\}\frac{r^2}{D^3} \\ + &\frac{\Phi}{D^4}(1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2\varepsilon''+2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'') = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Bei diesem Uebergange kommen die in der 156. Nummer bereits angewandten Substitutionen wiederum vor. Ueberdiess ist noch, in Folge der drei letzten identischen Gleichungen VII., der 10. Nummer,

$$AB-B'B'' \equiv \frac{Y\Psi_{30}-\Psi_{31}\Psi_{32}}{D^4} \equiv \frac{\Delta_{12}}{D^3},$$

$$A'B'-BB'' \equiv \frac{Y_1\Psi_{31}-\Psi_{30}\Psi_{32}}{D^4} \equiv \frac{\Delta_{02}}{D^3},$$

$$A''B''-BB' \equiv \frac{Y_2\Psi_{32}-\Psi_{30}\Psi_{31}}{D^4} \equiv \frac{\Delta_{01}}{D^3}.$$

Die Gleichungen (3) und (4) bleiben unverändert, wenn wir die drei Coordinaten-Axen mit einander vertauschen.

Die genannten Gleichungen, deren Richtigkeit nachzuweisen uns noch obliegt, müssen ihre Geltung auch dann behalten, wenn die Fläche zweiter Classe sich particularisirt, und insbesondere also auch in dem Falle, dass sie in ein System von zwei Puncten ausartet. Alsdann reducirt sich die Gleichung (3), indem zwei der drei Wurzel-Quadrate verschwinden, auf:

$$r^2 = A+A'+A''+2B''\cos\varepsilon''+2B'\cos\varepsilon'+2B\cos\varepsilon, \qquad (5)$$

wobei r die Entfernung jedes der beiden Puncte des Systems von ihrer gemeinschaftlichen Mitte bedeutet.

Indem wir das System der beiden Puncte, deren Coordinaten wir in dem zu Grunde gelegten Coordinaten-Systeme durch x, y, z und (−x), (−y), (−z) bezeichnen wollen, durch die Gleichung

$$At^2+A'u^2+A''v^2+2B''tu+2B'tv+2Buv = w^2$$

darstellen, ergibt sich

$$A = x^2,\ A' = y^2,\ A'' = z^2,\ B'' = xy,\ B' = xz,\ B = yz,$$

wonach die vorstehende Gleichung folgende wird:

$$(xt+yu+zv)^2 = 1.$$

Für den Abstand dieser Puncte vom Anfangspuncte erhält man

$$x^2+y^2+z^2+2xy\cos\varepsilon''+2xz\cos\varepsilon'+2yz\cos\varepsilon:$$

in Uebereinstimmung mit der Gleichung (5).

Der Coefficient des zweiten Gliedes der Gleichung (3) (und mithin auch der Gleichung (4)) ist also, für den eben betrachteten besondern Fall, der richtige. Er ist überhaupt der richtige, weil er die Coefficienten der Gleichung (2), die von der zweiten Dimension sind, nur in der ersten Potenz enthalten kann, und die Relationen, welche zwischen diesen Coefficienten bestehen müssen, wenn die Fläche in ein System von zwei Puncten ausarten soll, durch die folgenden nicht linearen Gleichungen zwischen diesen Coefficienten

$$AB-B'B'' = 0, \qquad A'B'-BB'' = 0$$

ausgedrückt werden, und also die allgemeine Form des fraglichen Coefficienten nicht modificiren können.

168. Wir wollen ferner particularisiren, indem wir annehmen, dass die Fläche zweiter Classe in eine ebene Curve, etwa eine Ellipse übergehe. Weil alsdann eines der drei Wurzel-Quadrate der Gleichung (3) verschwindet, geht diese Gleichung, nach Vernachlässigung desselben, in die folgende über:

$$\begin{aligned} r^4 - \{&A+A'+A''+2B''\cos\varepsilon''+2B'\cos\varepsilon'+2B\cos\varepsilon\}r^2 \\ + (&AA'-B''^2)\sin^2\varepsilon''-2(A''B''-BB')(\cos\varepsilon''-\cos\varepsilon\cos\varepsilon') \\ + (&AA''-B'^2)\sin^2\varepsilon'-2(A'B'-BB'')(\cos\varepsilon'-\cos\varepsilon\cos\varepsilon'') \\ + (&A'A''-B^2)\sin^2\varepsilon-2(AB-B'B'')(\cos\varepsilon-\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'') \\ &= 0. \end{aligned} \qquad (6)$$

Das Product der beiden Halb-Axen-Quadrate der ebenen Curve ist also gleich dem letzten, von r^2 unabhängigem, Gliede dieser Gleichung. Dieses Glied können wir allgemein, indem wir die Neigungs-Winkel der Coordinaten-Ebenen gegen einander durch ζ, ζ' und ζ'' bezeichnen, wonach

$$\cos\varepsilon - \cos\varepsilon'\cos\varepsilon'' = \sin\varepsilon'\sin\varepsilon''\cos\zeta,$$
$$\cos\varepsilon' - \cos\varepsilon\cos\varepsilon'' = \sin\varepsilon\sin\varepsilon''\cos\zeta',$$
$$\cos\varepsilon'' - \cos\varepsilon\cos\varepsilon' = \sin\varepsilon\sin\varepsilon'\cos\zeta'',$$

folgendergestalt schreiben:

$$\{\Theta_2\sin^2\varepsilon'' + \Theta_1\sin^2\varepsilon'^2 + \Theta\sin^2\varepsilon$$
$$- 2\Delta_{12}\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''\cos\zeta - 2\Delta_{02}\sin\varepsilon\sin\varepsilon''\cos\zeta' - 2\Delta_{01}\sin\varepsilon\sin\varepsilon'\cos\zeta''\}\frac{1}{D^3}$$

und für den besondern Fall, den wir betrachten, wo durch das Verschwinden von Φ, in Folge der identischen Gleichungen IX. der 10. Nummer:

$$\Delta_{12} = \pm\sqrt{\Theta_2\Theta_1}, \qquad \Delta_{02} = \pm\sqrt{\Theta_2\Theta}, \qquad \Delta_{01} = \pm\sqrt{\Theta_1\Theta},$$

auch folgendergestalt:

$$\{\Theta_2\sin^2\varepsilon'' + \Theta_1\sin^2\varepsilon' + \Theta\sin^2\varepsilon$$
$$\mp 2\sqrt{\Theta_1\Theta_2}\cdot\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''\cos\zeta \mp 2\sqrt{\Theta\Theta_2}\cdot\sin\varepsilon\sin\varepsilon''\cos\zeta' \mp 2\sqrt{\Theta\Theta_1}\cdot\sin\varepsilon\sin\varepsilon'\cos\zeta''\}\frac{1}{D^3},$$

oder kürzer:

$$L^2 + M^2 + N^2 \mp 2LM\cos\zeta \mp 2LN\cos\zeta' \mp 2MN\cos\zeta'', \qquad (7)$$

indem wir

$$\sqrt{\frac{\Theta_2}{D^3}}\cdot\sin\varepsilon'' \equiv L, \qquad \sqrt{\frac{\Theta_1}{D^3}}\cdot\sin\varepsilon' \equiv M, \qquad \sqrt{\frac{\Theta}{D^3}}\cdot\sin\varepsilon \equiv N,$$

setzen. Es bedeuten aber hiernach πL, πM, πN den Flächen-Inhalt der drei Projectionen der Fläche zweiter Classe auf den drei Coordinaten-Ebenen, hier insbesondere den Flächen-Inhalt der drei Projectionen der ebenen Curve (Ellipse). Bei diesen Voraussetzungen aber ist der Ausdruck (7), wenn wir ihn noch mit π^2 multipliciren und die obern Zeichen nehmen dem Quadrate des Flächen-Inhaltes dieser Curve, er selbst also dem Producte der Quadrate ihrer beiden Halb-Axen gleich.*)

---

*) Schneiden wir von der durch die drei Coordinaten-Ebenen gebildeten Ecke durch eine beliebige Ebene eine Pyramide ab, deren Basis wir in dieser Ebene annehmen und durch R bezeichnen wollen, während wir den Flächen-Inhalt der drei Seiten-Flächen L, M, N nennen, so ist nach bekanntem Satze:

$$R^2 = L^2 + M^2 + N^2 - 2LM\cos\zeta - 2LN\cos\zeta' - 2MN\cos\zeta''. \qquad (a)$$

Dieses Resultat ergibt sich leicht. Bezeichnen wir nemlich diejenigen Winkel, welche die Basis der Pyramide mit den drei Seitenflächen derselben bildet bezüglich durch w, w' und w'', so ist:

$$R = L\cos\omega + M\cos\omega' + N\cos\omega'',$$
$$L = R\cos\omega + M\cos\zeta + N\cos\zeta',$$
$$M = R\cos\omega' + L\cos\zeta + N\cos\zeta'',$$
$$N = R\cos\omega'' + L\cos\zeta' + N\cos\zeta''.$$

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit R, und nehmen dann aus den folgenden drei Gleichungen die Werthe von $R\cos\omega$, $R\cos\omega'$ und $R\cos\omega''$ um dieselben in die erste Gleichung einzusetzen, so ergibt sich unmittelbar die Gleichung (a).

Wir können die Gleichung (a) noch unter einem allgemeinern Gesichtspuncte auffassen. Wenn wir nemlich parallel mit den Coordinaten-Axen auf die gegenüberliegenden Coordinaten-Ebenen projiciren, so sind die Seitenflächen der Pyramide L, M und N, die Projectionen der Basis R. Diese Projectionen aber behalten denselben Flächen-Inhalt, wenn wir der projectirten Fläche R. irgend eine andere Begrenzung

Die vorstehende Bestimmung der Vorzeichen bezieht sich nur auf die numerischen Werthe von Δ_{12}, Δ_{02} und Δ_{01}, keineswegs aber auf die Vorzeichen, mit welchen die durch diese Symbole vertretenen algebraischen Ausdrücke genommen werden müssen. Das Princip der Symmetrie fordert von Vorne herein, dass diese Vorzeichen übereinstimmen müssen, aber nur ein vorliegender Fall kann entscheiden, ob die in der Gleichung (6) genommenen negativen Vorzeichen die richtigen sind oder mit den entgegengesetzten vertauscht werden müssen. Wir wollen zu diesem Ende den Fall der Kugel nehmen, und diese auf irgend drei beliebige Durchmesser beziehen. Setzen wir überdiess den Radius der Kugel der Einheit gleich, so ist ihre Gleichung die folgende:

$$\frac{t^2}{\sin^2\delta}+\frac{u^2}{\sin^2\delta'}+\frac{v^2}{\sin^2\delta''}-2\,.\,\frac{tu\cos\zeta''}{\sin\delta\sin\delta'}-2\,.\,\frac{tv\cos\zeta'}{\sin\delta\sin\delta''}-2\,.\,\frac{uv\cos\zeta}{\sin\delta'\sin\delta''}=w^2.\text{*)}$$

Um also die Gleichung (3) zu entwickeln, haben wir

$$A=\frac{1}{\sin^2\delta},\qquad A'=\frac{1}{\sin^2\delta'},\qquad A''=\frac{1}{\sin^2\delta''},$$

$$B''=\frac{-\cos\zeta''}{\sin\delta\sin\delta'},\qquad B'=\frac{-\cos\zeta'}{\sin\delta\sin\delta''},\qquad B=\frac{-\cos\zeta}{\sin\delta'\sin\delta''}$$

und finden für dieselbe, wenn wir, der Kürze wegen,

$$\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{1}{\sin^2\delta'}+\frac{1}{\sin^2\delta''}-\frac{2\cos\varepsilon''\cos\zeta''}{\sin\delta\sin\delta'}-\frac{2\cos\varepsilon'\cos\zeta'}{\sin\delta\sin\delta''}-\frac{2\cos\varepsilon\cos\zeta}{\sin\delta'\sin\delta''}\equiv K$$

setzen, nach einigen trigonometrischen Reductionen:

$$r^6-Kr^4+Kr^2-1=0.$$

Um darüber zu entscheiden ob im Coefficienten des dritten Gliedes der Gleichung (3) die drei letzten Glieder wirklich das negative Zeichen haben, oder ob das entgegengesetzte Zeichen das richtige ist, setzen wir K der Summe der Producte je zweier der drei Halb-Axen-Quadrate gleich, also gleich 3; dann kommt:

$$\cot g^2\delta+\cot g^2\delta'+\cot g^2\delta''=2\left(\frac{\cos\varepsilon''\cos\zeta''}{\sin\delta\sin\delta'}+\frac{\cos\varepsilon'\cos\zeta'}{\sin\delta\sin\delta''}+\frac{\cos\varepsilon\cos\zeta}{\sin\delta'\sin\delta''}\right):$$

eine Gleichung, die wir nicht weiter zu verificiren brauchen, weil es in die Augen springt, dass der zweite Theil derselben unmöglich statt des positiven Zeichens das negative haben kann.

---

geben, ohne dabei ihren Inhalt zu ändern, und die Ebene dieser Fläche, mit sich selbst parallel, beliebig verschieben. Nach diesen Bemerkungen ergibt sich unmittelbar der folgende Satz.

Wenn wir eine begränzte ebene Fläche nach der Richtung dreier gegebener Coordinaten-Axen auf die gegenüberliegenden Coordinaten-Ebenen projiciren, so ist die Quadrat-Summe der drei Projectionen weniger der doppelten Producte je zweier dieser Projectionen mit dem jedesmaligen Cosinus des von den Ebenen derselben gebildeten Winkel multiplicirt, gleich dem Quadrate der projicirten Fläche.

*) Die vorstehende Gleichung ergibt sich unmittelbar aus dem Ausdrucke, dem wir in der 172. Nummer begegnen werden, um den Abstand des Anfangspunctes der Coordinaten von der durch die Gleichung

$$ax+a'y+a''z+1=0$$

dargestellten Ebene zu bestimmen; wir brauchen nur diesen Abstand der Einheit gleich zu nehmen und a, a' und a'' bezüglich mit $\frac{t}{w}$, $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$ zu vertauschen.

Der Coefficient des dritten Gliedes der Gleichung (3), so wie der Gleichung (4), ist also, für den fraglichen Fall, wo die Fläche in eine ebene Curve ausartet, auch was die Zeichen betrifft, der richtige. Er ist überhaupt der richtige, weil in diesem Coefficienten die Constanten der Gleichung (2) nur im Quadrate oder paarweise mit einander multiplicirt (Ausdrücke von der vierten Dimension) vorkommen können, und daher die allgemeine Form dieses Ausdrucks, durch die Bedingungs-Gleichung

$$-\frac{\Phi}{D^4} \equiv AA'A''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2+2BB'B''=0,$$

welche den particulären Fall characterisirt, nicht modificirt werden kann.

169. Das von r^2 unabhängige Glied der Gleichung (3) ist nothwendig in Beziehung auf die Constanten der Gleichung (2) von der dritten Dimension, und kann daher, da es verschwinden muss, wenn in Folge der letzten Gleichung der vorigen Nummer, die Fläche in eine ebene Curve zweiter Classe ausartet, nur die folgende Form haben

$$\lambda \cdot \frac{\Phi}{D^4},$$

wobei λ unabhängig von den Constanten der Gleichung (2) ist. Um λ zu bestimmen brauchen wir also nur, indem wir ein Coordinaten-System, dessen Axen nicht auf einander senkrecht stehen, zu Grunde legen, die Gleichung zu kennen, deren Wurzeln die Axen-Quadrate der gegebenen Fläche sind. Beziehen wir die Fläche auf irgend drei ihrer zugeordneten Durchmesser als Coordinaten-Axen, wonach ihre Gleichung die folgende wird:

$$A^2+A'u+A''v^2=w^2,$$

so sind, in Gemässheit der 165. Nummer die Quadrate ihrer Halb-Axen durch folgende Gleichung gegeben

$$\begin{aligned} &r^6-(A+A'+A'')r^4 \\ &+AA'\sin^2\varepsilon''+AA''\sin^2\varepsilon'+A'A''\sin^2\varepsilon \\ &-AA'A''(1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2\varepsilon''+2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'')=0. \end{aligned}$$

Es hat sich hier durch das Verschwinden von B, B′ und B″ der Ausdruck $\frac{\Phi}{D^4}$ auf $(-AA'A'')$ reducirt, wonach

$$\lambda=(1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2\varepsilon''+2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'')$$

und also die Form der Gleichung (3), die auf die ursprüngliche Flächen-Gleichung (1) bezogen, in die Gleichung (4) übergeht, vollständig gerechtfertigt ist.

170. Wenn wir von der Annahme schiefwinkliger Coordinaten-Axen wieder zu der Voraussetzung, dass die Coordinaten-Axen sich rechtwinklig schneiden, zurückgehen wollen, so brauchen wir nur

$$\cos\varepsilon=\cos\varepsilon'=\cos\varepsilon''=0$$

zu setzen, wonach die Gleichung (4) in diejenige übergeht, welche wir in der 156. Nummer direct entwickelt haben.

Wenn wir endlich in der allgemeinen Gleichung der Fläche (1)

$$A''=0,\quad B=0,\quad B'=0,\quad C''=0,$$

setzen, so ist die resultirende Gleichung

$$At^2+A'u^2+2B''tu+2Ctw+2C'uw+Dw^2 = 0$$

die allgemeine Gleichung einer in der Ebene XY liegenden Curve zweiter Classe, die wir, indem wir von der dritten Dimension ganz abstrahiren, uns durch eine gerade Linie in der fraglichen Ebene umhüllt denken können, und zur Bestimmung der beiden Halb-Axen-Quadrate dieser Curve erhalten wir alsdann aus (4):

$$r^4+\left\{Y+Y_1+2\Psi_{32}\cos^2\varepsilon''\right\}\frac{r^2}{D^2}+\frac{\Theta_2}{D^4}\sin^2\varepsilon''=0 \qquad (8)$$

eine Gleichung, die ich im zweiten Bande der Entwickelungen n. 511 direct abgeleitet habe.

171. Es sei zweitens

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2B''xy+2B'xz+2Byz+2Cx+2C'y+2C''z+D = 0 \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung der Flächen zweiter Ordnung, wobei wir wiederum ein schiefwinkliges Coordinaten-System zu Grunde legen. Wenn der Anfangspunct in den Mittelpunct der Fläche rückt, so geht die vorstehende Gleichung in die folgende über:

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2B''xy+2B'xy+2Byz+\frac{\Phi}{\Theta_3} = 0. \qquad (2)$$

Wir behaupten, dass die drei Halb-Axen-Quadrate der Fläche die Wurzeln der nachstehenden Gleichung des dritten Grades sind:

$$r^6+\frac{\Xi_2+\Xi_1+\Xi-2\Psi_{03}\cos\varepsilon-2\Psi_{13}\cos\varepsilon'-2\Psi_{23}\cos\varepsilon''}{\Theta_3}\cdot\frac{\Phi}{\Theta_3}\cdot r^4$$

$$+\frac{A\sin^2\varepsilon+A'\sin^2\varepsilon'+A''\sin^2\varepsilon-2B''(\cos\varepsilon''-\cos\varepsilon\cos\varepsilon')-2B'(\cos\varepsilon'-\cos\varepsilon\cos\varepsilon'')-2B(\cos\varepsilon-\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'')}{\Theta_3}\cdot\left(\frac{\Phi}{\Theta_3}\right)^2 r^2$$

$$+\frac{1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2\varepsilon''+2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon''}{\Theta_3}\left(\frac{\Phi}{\Theta_3}\right)^3 = 0. \qquad (3)$$

Setzen wir, unbeschadet der Allgemeinheit,

$$\frac{\Phi}{\Theta_3} = -1,$$

so geht die Gleichung der Fläche in die folgende über

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2B''xy+2B'xz+2Byz = 1, \qquad (4)$$

und bei dieser Bezeichnung verwandelt sich die Gleichung (3) nach einigen trigonometrischen Substitutionen, die in den bisherigen Entwickelungen öfter schon vorgekommen sind, in die folgende:

$$\Theta_3 r^6-(\Xi_2+\Xi_1+\Xi-2\Psi_{03}\cos\varepsilon-2\Psi_{13}\cos\varepsilon'-2\Psi_{23}\cos\varepsilon'')r^4$$
$$+(A\sin^2\varepsilon+A'\sin^2\varepsilon'+A''\sin^2\varepsilon''-2B''\sin\varepsilon\sin\varepsilon'\cos\zeta''-2B'\sin\varepsilon\sin\varepsilon''\cos\zeta'-2B\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''\cos\zeta)r^2$$
$$-\sin^2\varepsilon\sin^2\delta = 0. \qquad (5)$$

Es bleibt uns übrig, die Richtigkeit der Gleichungen (3) und (5) darzulegen, wobei wir auf ähnliche Weise, wie in dem Falle der Plan-Coordinaten verfahren können. Zuvörderst sehen wir, dass diese Gleichungen die Bedingung der Symmetrie erfüllen. Ferner können wir dieselben in zwei Voraussetzungen verificiren, einmal in der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, wobei sie in die, in der 111. Nummer direct abgeleiteten Gleichungen übergehen; das andere Mal in

der Voraussetzung, dass die Coordinaten-Axen mit irgend drei zugeordneten Durchmessern zusammenfallen. Nehmen wir nemlich, hiermit in Uebereinstimmung, statt der Gleichung (1) die folgende:

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\sigma^2}+\frac{z^2}{\tau^2}=1,$$

wonach

$$B=B'=B''=0, \qquad C=C'=C''=0,$$
$$A=\frac{1}{\rho^2}, \quad A'=\frac{1}{\sigma^2}, \quad A''=\frac{1}{\tau^2} \quad D=-1,$$
$$\Psi_{03}=\Psi_{13}=\Psi_{23}=0,$$
$$\Xi_2=\left(\frac{1}{\rho\sigma}\right)^2, \ \Xi_1=\left(\frac{1}{\rho\tau}\right)^2, \ \Xi=\left(\frac{1}{\sigma\tau}\right)^2, \ \Theta_3=\left(\frac{1}{\rho\sigma\tau}\right)^2,$$

und also die Gleichung (5) in die Gleichung (2) der 165. Nummer übergeht.

Wenn

$$\Phi=0,$$

so gibt die Gleichung (3), der Kegelfläche entsprechend, für r^2 drei verschwindende Werthe. Die Gleichungs-Form (4) ist hier unmöglich und wollen wir der Gleichung (5) noch ihre Geltung lassen, so müssen wir Θ_3 unendlich gross nehmen. Alle Gleichungen erhalten ihre unbedingte Geltung wieder, wenn die Kegelfläche in eine Cylinderfläche übergeht, wobei Φ und Θ_3 beide verschwinden und

$$\frac{\Phi}{\Theta_3}=\frac{\Theta_2}{\Xi_2}.$$

Die Gleichung (5) muss also, wenn Θ_3 verschwindet eine Wurzel haben, die unendlich gross wird und Θ_2 daher als Coefficient des ersten Gliedes erscheinen. Nehmen wir Θ_3 als vollständigen Coefficienten dieses Gliedes, so ist, im Falle rechtwinkliger Coordinaten-Axen, das letzte Glied gleich (-1) und dieses Glied kann, wenn wir diese Axen ganz beliebig annehmen, nur eine Function derjenigen Winkel sein, von welchen die gegenseitige Richtung der Coordinaten-Axen abhängt. Diese Function können wir in dem speciellen Fall, dass diese Axen mit irgend drei zugeordneten Durchmessern der Fläche zusammenfallen, direct bestimmen und erhalten alsdann nach dem Vorstehenden für dieses letzte Glied:

$$\sin^2\varepsilon\sin^2\delta=\sin^2\varepsilon'\sin^2\delta'=\sin^2\varepsilon''\sin^2\delta''$$
$$=1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2\varepsilon''+2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon''. \qquad (6)$$

Betrachten wir den Fall des Cylinders, so ergibt sich, indem wir

$$\Theta_3\equiv AA'A''-AB^2-A'B'^2-A''B''^2+2BB'B''=0$$

setzen, die folgende quadratische Gleichung in r^2:

$$(\Xi_2+\Xi_1+\Xi-2\Psi_{03}\cos\varepsilon-2\Psi_{13}\cos\varepsilon'-2\Psi_{23}\cos\varepsilon'')\,r^4$$
$$-(A\sin^2\varepsilon+A'\sin^2\varepsilon'+A''\sin^2\varepsilon''-2B''\sin\varepsilon\sin\varepsilon'\cos\zeta''$$
$$-2B'\sin\varepsilon\sin\varepsilon''\cos\zeta'-2B\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''\cos\zeta)\,r^2$$
$$+\sin^2\varepsilon\sin^2\delta=0, \qquad (7)$$

in deren Coefficienten durch das Verschwinden von Θ_3 keine Form-Aenderung hervorgebracht werden kann. Es ist also, um die Richtigkeit des zweiten Coefficienten der Gleichungen (3) und (5) zu constatiren, bloss zu zeigen nöthig, dass, in dem Falle des Cylinders, der Coefficient des zweiten Gliedes durch das letzte Glied getheilt, dem reciproken Werthe des Productes der beiden Halb-Axen-Quadrate des Cylinders gleich ist.

Dem Verschwinden von Θ_3 entspricht (10, IV):

$$\Psi_{03} = \pm\sqrt{\Xi_1\Xi_2},\quad \Psi_{13} = \pm\sqrt{\Xi\Xi_2},\quad \Psi_{23} = \pm\sqrt{\Xi\Xi_1},$$

wonach der fragliche Quotient die folgende Form annimmt:

$$\frac{\Xi_2+\Xi_1+\Xi\pm\sqrt{\Xi_1\Xi_2}\cos\varepsilon\pm\sqrt{\Xi\Xi_2}\cos\varepsilon'\pm\sqrt{\Xi\Xi_1}\cos\varepsilon''}{\sin^2\varepsilon\sin^2\delta}. \tag{8}$$

Bezeichnen wir Product der beiden Halb-Axen der drei Durchschnitts-Curven des Cylinders mit den drei Coordinaten-Ebenen XY, XZ und YZ durch L, M und N, so ist *)

$$\Xi_1 = \frac{\sin^2\varepsilon''}{L^2},\qquad \Xi_2 = \frac{\sin^2\varepsilon'}{M^2},\qquad \Xi = \frac{\sin^2\varepsilon}{N^2},$$

wonach der vorstehende Ausdruck, mit Berücksichtigung der Gleichungen (6), in den folgenden übergeht:

$$\frac{1}{L^2\sin^2\delta''}+\frac{1}{M^2\sin^2\delta'}+\frac{1}{N^2\sin^2\delta}$$
$$\pm 2\frac{\cos\varepsilon}{LM\sin\delta''\sin\delta'}\pm 2\frac{\cos\varepsilon'}{LN\sin\delta''\sin\delta}\pm 2\frac{\cos\varepsilon''}{MN\sin\delta'\sin\delta}. \tag{9}$$

Wenn überhaupt irgend ein gerades Prisma, oder irgend ein gerader Cylinder, deren Basis wir πS nennen wollen, durch drei beliebige Ebenen — diejenigen, die wir zu Coordinaten-Axen genommen haben — geschnitten wird und wir die Flächen der Durchschnitte durch πL, πM, und πN, und die Winkel, welche diese Ebenen mit der Ebene der Basis bilden, durch ω'', ω' und ω bezeichnen, so ist

$$\frac{S}{L} = \cos\omega'',\qquad \frac{S}{M} = \cos\omega',\qquad \frac{S}{N} = \cos\omega.$$

Zwischen den drei Winkeln ω'', ω' und ω, von welchen zwei den dritten bestimmen, besteht die folgende Relation:

$$1 = \frac{\cos^2\omega''}{\sin^2\delta''}+\frac{\cos^2\omega'}{\sin^2\delta'}+\frac{\cos^2\omega}{\sin^2\delta}$$
$$+2\frac{\cos\omega''\cos\omega'}{\sin\delta''\sin\delta'}\cdot\cos\varepsilon+2\frac{\cos\omega''\cos\omega}{\sin\delta''\sin\delta}\cdot\cos\varepsilon'+2\frac{\cos\omega'\cos\omega}{\sin\delta'\sin\delta}\cdot\cos\varepsilon''.\text{**)} \tag{10}$$

---

*) Analyt. geom. Entwickelungen, erster Band, n. 251.

**) Um diese Gleichung der Coordinaten-Geometrie abzuleiten, wähle ich vorzugsweise den folgenden Weg, der uns zugleich zu einer allgemeinen Bemerkung führt.

Stellen wir mit unserm Coordinaten-Systeme ein zweites zusammen, dessen Axen auf den Ebenen des ersten, und dessen Ebenen also auch, umgekehrt, auf den Axen des ersten senkrecht stehen, so können wir die positive Richtnng der neuen Axen so nehmen, dass die von den Coordinaten-Axen jedes der beiden Systeme gebildeten Winkel diejenigen Winkel, welche von den Coordinaten-Ebenen des andern gebildet werden zu zwei Rechten ergänzen. (Es entsprechen die von den Coordinaten-Axen der beiden Systeme gebildeten körperlichen Ecken zweien sphärischen Dreiecken, von welchen eines das Polar-Dreieck des andern ist.) Bezeichnen wir in dem zweiten Systeme die Winkel der Axen, indem wir uns zur Unterscheidung unten angehängter Marken bedienen, durch ε_0, $\varepsilon_,$, $\varepsilon_{,,}$ und die Winkel der Ebenen durch ζ_0, $\zeta_,$, $\zeta_{,,}$, so ist insbesondere

$$\cos\zeta_0 = -\cos\varepsilon,\qquad \cos\zeta_, = -\cos\varepsilon',\qquad \cos\zeta_{,,} = -\cos\varepsilon''. \tag{a}$$

Wenn wir in diese Gleichung für $\cos\omega''$, $\cos\omega'$ und $\cos\omega$ die vorstehenden Werthe einsetzen und dann durch S^2 dividiren, so geht der erste Theil dieser Gleichung in $\frac{1}{S^2}$ und der zweite Theil derselben in den Ausdruck (9) über, vorausgesetzt, dass wir in diesem die obern Vorzeichen nehmen. Hiernach können wir, wenn die Flächen der Durchschnitte eines geraden Prismas oder eines geraden Cylinders mit irgend drei Ebenen, deren gegenseitige Lage bekannt ist, der Grösse nach gegeben sind, die kleinste Schnittfläche S, bestimmen. Nehmen wir insbesondere den oben betrachteten Cylinder, so ist bewiesen, was bewiesen werden sollte.

Die Bestimmung der Vorzeichen in den Ausdrücken (8) und (9) beruht darauf, dass wir die Wurzeln in dem erstern Ausdrucke, denen L, M und N in dem zweiten entsprechen, als absolut positive Grössen ansehen, und hat keine directe Beziehung zu den Vorzeichen von Ψ_{03}, Ψ_{13} und Ψ_{23} in der Gleichung (6), so wie in den Gleichungen (5) und (3), wobei die genannten drei Ausdrücke, an und für sich, sowohl positive als auch negative Werthe haben können. Ob dieselben alle drei mit positivem oder alle drei mit negativem Zeichen genommen werden müssen, darüber gibt uns erst ein anderer besonderer Fall Aufschluss.

Die Gleichung einer Kugel, bezogen auf ihren Mittelpunct als Anfangspunct der Coordinaten, ist, indem wir den Radius derselben gleich Eins nehmen, die folgende:

$$x^2+y^2+z^2+2xy\cos\varepsilon''+2xz\cos\varepsilon'+2yz\cos\varepsilon = 1.$$

Hierbei ergibt sich

In dem zweiten Systeme bleiben diejenigen Winkel, welche jede der drei Axen mit den gegenüberliegenden Coordinaten-Ebenen bildet, dieselben als im ersten Systeme: $\sin\delta$, $\sin\delta'$ und $\sin\delta''$ behalten dieselbe Bedeutung auch in dem zweiten Coordinaten-Systeme. Wenn wir eine gerade Linie willkührlich annehmen, welche mit den Axen dieses zweiten Systems die drei Winkel ω, ω' und ω'' bildet, so bildet eine Ebene, welche auf der Richtung dieser geraden Linie senkrecht steht, dieselben Winkel mit den Coordinaten-Ebenen des ersten Systems. Nach *Magnus* (Seite 5) besteht aber, zwischen den drei Winkeln ω, ω' und ω'', welche in dem zweiten Systeme eine beliebige gerade Linie mit den drei Coordinaten-Axen bildet die folgende Relation:

$$(1-\cos^2\varepsilon_0-\cos^2\varepsilon_{,}-\cos^2\varepsilon_{,,}+2\cos\varepsilon_0\cos\varepsilon_{,}\cos\varepsilon_{,,})$$
$$-\sin^2\varepsilon_{,,}\cos^2\omega''-\sin^2\varepsilon_{,}\cos^2\omega'-\sin^2\varepsilon_0\cos^2\omega$$
$$+2(\cos\varepsilon_0-\cos\varepsilon_{,}\cos\varepsilon_{,,})\cos\omega'\cos\omega''+2(\cos\varepsilon_{,}-\cos\varepsilon_0\cos\varepsilon_{,,})\cos\omega\cos\omega''+2(\cos\varepsilon_{,,}-\cos\varepsilon_0\cos\varepsilon_{,})\cos\omega\cos\omega'=0,$$

die wir, nach bekannter Umformung, auch folgendergestalt schreiben können:

$$1 = \frac{\cos^2\omega''}{\sin^2\delta''}+\frac{\cos^2\omega'}{\sin^2\delta'}+\frac{\cos^2\omega}{\sin^2\delta}$$
$$-2.\frac{\cos\omega''\cos\omega'}{\sin\delta''\sin\delta'}\cos\zeta-2.\frac{\cos\omega''\cos\omega}{\sin\delta''\sin\delta}\cos\zeta'-2\frac{\cos\omega'\cos\omega}{\sin\delta'\sin\delta}\cos\zeta''.$$

Gehen wir zum ersten Systeme zurück, so finden wir die Gleichung (9) des Textes, wobei dann ω, ω' und ω'' diejenigen Winkel bedeuten, die eine beliebige Ebene mit den drei Coordinaten-Ebenen bildet.

Das Vorstehende enthält ein Beispiel, welches uns darauf hinweiset, in diejenigen Entwickelungen, welche an die Annahme eines schiefwinkligen Coordinaten-Systems sich anknüpfen, solche Betrachtungen aufzunehmen, die der Betrachtung der Polar-Dreiecke in der sphärischen Trigonometrie entsprechen, und den Erklärungs-Grund für die Form-Verwandtschaft analytischer Ausdrücke enthalten.

$$\Theta_3 = \sin^2\varepsilon\sin^2\delta$$

$$\Xi_2 = \sin^2\varepsilon'', \qquad \Xi_1 = \sin^2\varepsilon', \qquad \Xi = \sin^2\varepsilon,$$

$$\Psi_{03} = \sin\varepsilon''\sin\varepsilon'\cos\zeta, \qquad \Psi_{13} = \sin\varepsilon''\sin\varepsilon\cos\zeta', \qquad \Psi_{23} = \sin\varepsilon'\sin\varepsilon\cos\zeta'',$$

wonach die Gleichung (5) in die nachstehende übergeht:

$$r^6 - Kr^4 + Kr^2 - 1 = 0,$$

indem wir wiederum der Kürze wegen

$$\frac{1}{\sin^2\delta} + \frac{1}{\sin^2\delta'} + \frac{1}{\sin^2\delta''} - \frac{2\cos\varepsilon''\cos\zeta''}{\sin\delta\sin\delta'} - \frac{2\cos\varepsilon'\cos\zeta'}{\sin\delta\sin\delta''} - \frac{2\cos\varepsilon\cos\zeta}{\sin\delta'\sin\delta''} \equiv K$$

setzen. Diese Gleichung ist die richtige (168) und namentlich der Coefficient von r^4 gleich (-3). Somit ist bewiesen, dass wir Ψ_{03}, Ψ_{13} und Ψ_{23}, wie geschehen, mit dem negativen Zeichen nehmen müssen.

172. Der zweite Coefficient der allgemeinen Gleichungen (3) und (5), dessen Richtigkeit vollständig nachgewiesen worden ist, muss, abgesehen von jeder besonderen Annahme der Coordinaten-Axen zugleich mit Θ_3 verschwinden, wenn der in der vorigen Nummer betrachtete Cylinder in ein System von zwei parallelen Ebenen ausarten soll. In diesem Falle ist (29, 18):

$$\Xi_2 = 0, \qquad \Xi_1 = 0, \qquad \Xi = 0.$$

woraus folgt, dass auch

$$\Psi_{03} = 0, \qquad \Psi_{13} = 0, \qquad \Psi_{23} = 0.$$

In Folge dieser Bedingungs-Gleichungen verschwindet wirklich der fragliche Coefficient, während dieselben, so wenig als das Verschwinden von Θ_3, irgend einen Einfluss auf die Form des Coefficienten von r^2 haben können. Es bleibt uns hiernach bloss nachzuweisen übrig, dass der letztgenannte Coefficient für den besondern Fall der richtige ist. In diesem Falle können wir die Gleichung (4) auf folgende Weise schreiben:

$$(ax + a'y + a''z)^2 = 1,$$

so dass

$$A = a^2, \quad A' = a'^2, \quad A'' = a''^2, \quad B'' = aa', \quad B' = aa'', \quad B = a'a'',$$

hiernach geht die Gleichung (5), nachdem zwei ihrer Wurzeln unendlich gross geworden sind, auf den esten Grad sich reducirend, in die folgende über:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{a''^2}{\sin^2\delta''} + \frac{a'^2}{\sin^2\delta'} + \frac{a^2}{\sin^2\delta} - \frac{2a'a''\cos\zeta}{\sin\delta'\sin\delta''} - \frac{2aa''\cos\zeta'}{\sin\delta\sin\delta''} - \frac{2aa'\cos\zeta''}{\sin\delta\sin\delta'}. \tag{11}$$

Es bedeutet hierbei r die Höhe einer Pyramide, deren Basis in einer der beiden parallelen Ebenen liegt, und deren drei Seiten in die drei Coordinaten-Axen fallen und bezüglich gleich $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a'}$ und $\frac{1}{a''}$ sind. Die drei Seitenflächen einer solchen Pyramide sind aber

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\varepsilon''}{aa'}, \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\varepsilon'}{aa''}, \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\varepsilon}{a'a''},$$

und hiernach ergibt sich, in Gemässheit der Note zur 168. Nummer für das Quadrat der Fläche der Basis:

$$\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\sin\varepsilon''}{aa'}\right)^2+\left(\frac{\sin\varepsilon'}{aa''}\right)^2+\left(\frac{\sin\varepsilon}{a'a''}\right)^2\right.$$
$$\left.-2\cdot\frac{\sin\varepsilon''}{aa'}\cdot\frac{\sin\varepsilon'}{aa''}\cdot\cos\zeta-2\cdot\frac{\sin\varepsilon''}{aa'}\cdot\frac{\sin\varepsilon}{aa''}\cdot\cos\zeta'-2\cdot\frac{\sin\varepsilon'}{aa''}\cdot\frac{\sin\varepsilon}{a'a''}\cdot\cos\zeta''\right\}.$$

Der Inhalt der Pyramide ist aber

$$\frac{1}{2}\frac{\sin\varepsilon}{a'a''}\cdot\frac{1}{3}\frac{\sin\delta}{a}=\frac{1}{6}\cdot\frac{\sin\varepsilon\sin\delta}{aa'a''}.$$

Dividiren wir das Quadrat der Basis durch das Quadrat des dreifachen Inhaltes der Pyramide, so erhalten wir das Quadrat des reciproken Werthes ihrer Höhe, und für dasselbe den zweiten Theil der Gleichung (11).

Wir haben hiermit das uns vorgesteckte Ziel vollständig erreicht.

173. Um von der Gleichung (3), welche die drei Halb-Axen-Quadrate einer Fläche zweiter Ordnung zu ihren Wurzeln hat, zu derjenigen Gleichung überzugehen, deren Wurzeln die beiden Halb-Axen-Quadrate einer Curve zweiter Ordnung sind, nehmen wir für die Fläche einen Cylinder, der auf der Ebene XY senkrecht steht, und machen überdiess die Voraussetzung, dass die Axe Z auf den beiden Axen X und Y senkrecht stehet, während diese beiden Axen mit einander den beliebigen Winkel ε'' bilden. Alsdann ist die Gleichung des Cylinders

$$Ax^2+A'y^2+2B''xy+2Cx+2C'y+D=0,$$

indem wir von der dritten Dimension abstrahiren, zugleich auch die Gleichung seiner Basis und die beiden endlichen Axen des Cylinders sind auch die Axen dieser Basis. Indem wir hiernach

$$A''=0,\quad B=0,\quad B'=0,\quad C''=0,\quad \varepsilon=\varepsilon'=\tfrac{1}{2}\pi,$$
$$\Theta_3=0,\quad \frac{\Phi}{\Theta_3}=\frac{\Theta_2}{\Xi_2};$$

setzen, geht die Gleichung (3) in die folgende über:

$$\Xi_2 r^4+(A+A'-2B''\cos\varepsilon'')\frac{\Theta_2}{\Xi_2}\cdot r^2+\left(\frac{\Theta_2}{\Xi_2}\right)^2\sin^2\varepsilon''=0.$$

174. Auf gleiche Weise, wie wir in der 159. Nummer aus der Gleichung (22) der 157. Nummer, welche überhaupt (indem wir Plan-Coordinaten und rechtwinklige Coordinaten-Axen zu Grunde legen) die drei Halb-Axen-Quadrate einer Fläche zweiter Classe gibt, durch die Gleichungen (30) und (31) hindurchgehend, die Gleichung (34), die für den Fall eines Paraboloids die beiden halben Parameter desselben zu Wurzeln hat, abgeleitet haben: so können wir auch, bei Annahme schiefwinkliger Axen, verfahren, und unmittelbar zum Resultate gelangen, indem wir die Coefficienten der Gleichung (4) der 166. Nummer an die Stelle der Coefficienten der eben angezogenen Gleichung setzen. Es sei demnach erstens

$$At^2+A'u^2+A''v^2+2B''tu+2B'tv+2Buv+2Ctw+2C'uw+2C''vw=0$$

die Gleichung des Paraboloids, wobei zugleich

$$Y=-C^2,\quad Y_1=-C'^2,\quad Y_2=-C''^2,\quad \Psi_{32}=-CC',\quad \Psi_{31}=-CC'',\quad \Psi_{30}=-C'C'';$$

dann ist die gesuchte, an die Stelle der Gleichung (34) der 159. Nummer tretende allgemeine Gleichung:

$$p^2 - \frac{\Theta_2\sin^2\varepsilon'' + \Theta_1\sin^2\varepsilon' + \Theta\sin^2\varepsilon - 2\Delta_{12}(\cos\varepsilon - \cos\varepsilon'\cos\varepsilon'') - 2\Delta_{02}(\cos\varepsilon' - \cos\varepsilon\cos\varepsilon'') - 2\Delta_{01}(\cos\varepsilon'' - \cos\varepsilon\cos\varepsilon')}{(C^2 + C'^2 + C''^2 + 2CC'\cos\varepsilon'' + 2CC''\cos\varepsilon'' + 2CC''\cos\varepsilon)^{3/2}} \cdot p$$

$$- \frac{\Phi(1 - \cos^2\varepsilon - \cos^2\varepsilon' - \cos^2\varepsilon'' + 2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'')}{(C^2 + C'^2 + C''^2 + 2CC'\cos\varepsilon'' + 2CC''\cos\varepsilon' + 2C'C''\cos\varepsilon)^2} = 0.$$

Wenn wir das Paraboloid zweitens durch die allgemeine Gleichung in schiefwinkligen Parallel-Coordinaten x, y, z darstellen, so erhalten wir, indem wir zu der **123.** Nummer und der beigefügten Note zurückgehen und in dem dortigen Entwickelungsgange die Gleichung (3) der **171.** Nummer der zu Grunde gelegten Gleichung substituiren, ohne alle Mühe die folgende quadratische Gleichung:

$$q^2 \mp \{(A\sin^2\varepsilon + A'\sin^2\varepsilon' + A''\sin^2\varepsilon' - 2B''(\cos\varepsilon'' - \cos\varepsilon\cos\varepsilon') - 2B'(\cos\varepsilon' - \cos\varepsilon\cos\varepsilon'') - 2B(\cos\varepsilon - \cos\varepsilon\cos\varepsilon')\}$$

$$\sqrt{\left(-\frac{\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi - 2\Psi_{03}\cos\varepsilon - 2\Psi_{13}\cos\varepsilon' - 2\Psi_{23}\cos\varepsilon''}{\Phi}\right)} \cdot \frac{q}{\sin\varepsilon\sin\delta}$$

$$- \frac{(\Xi_2 + \Xi_1 + \Xi - 2\Psi_{03}\cos\varepsilon - 2\Psi_{13}\cos\varepsilon' - 2\Psi_{23}\cos\varepsilon'')^2}{\Phi\sin^2\varepsilon\sin^2\delta} = 0.$$

deren Wurzeln die reciproken Werthe der beiden halben Parameter des Paraboloids sind.

Der Raum verbietet, in weitere Discussionen einzugehen.

175. Unter den zugeordneten Durchmessern einer Ellipse sind die einander gleichen besonders ausgezeichnet. Die Aufforderung liegt nahe, auch über die gleichen zugeordneten Durchmesser eines Ellipsoids in nähere Untersuchungen einzugehen. Nehmen wir drei solche Durchmesser zu Coordinaten-Axen, so ergibt sich für die Gleichungen des Ellipsoids in den beiden Coordinaten-Systemen

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varkappa^2, \tag{1}$$

$$t^2 + u^2 + v^2 = \frac{w^2}{\varkappa^2}, \tag{2}$$

wobei $\varkappa$ die gleichen Halb-Durchmesser bezeichnet. Diese Gleichungs-Formen enthalten — es ist nicht zu übersehen, dass die drei von je zwei der drei Coordinaten-Axen gebildeten Winkel für die Bestimmung der Fläche maassgebend sind — zehn Constante, und unter diesen eine überzählige, so dass also ein System dreier gleicher zugeordneten Durchmesser in keiner ausschliesslichen Beziehung zur Fläche stehen kann, sondern dass es vielmehr solcher Systeme unendlich viele geben muss.

Wenn wir der Kürze wegen, diejenige Gleichung, deren Wurzeln die drei Halb-Axen-Quadrate des Ellipsoids sind, auf folgende Weise schreiben:

$$r^3 + gr^2 + hr + k = 0, \tag{3}$$

so erhalten wir überhaupt (165) die folgenden drei Bedingungs-Gleichungen zwischen den Grössen irgend dreier Halb-Durchmesser ρ, σ, τ und denjenigen drei Winkeln, ε'' ε', ε, welche die Richtungen derselben, paarweise genommen, mit einander bilden:

$$\rho^2 + \sigma^2 + \tau^2 = -g, \tag{4}$$

$$\rho^2\sigma^2\sin\varepsilon'' + \rho^2\tau^2\sin^2\varepsilon' + \sigma^2\tau^2\sin^2\varepsilon = h, \tag{5}$$

$$\rho^2\sigma^2\tau^2(1 - \cos\varepsilon^2 - \cos^2\varepsilon' - \cos^2\varepsilon'' + 2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'') = -k. \tag{6}$$

Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung können wir die letzte Gleichung (165, Note) auch unter folgende Formen bringen:

$$(\rho\sigma\tau\sin\varepsilon\sin\delta)^2 = (\rho\sigma\tau\sin\varepsilon'\sin\delta')^2 = (\rho\sigma\tau\sin\varepsilon''\sin\delta'')^2 = -k$$

und erhalten, wenn wir dieselbe in die vorherige dividiren, dem Satze der 121. Nummer entsprechend:

$$\left(\frac{1}{\rho\sin\delta}\right)^2+\left(\frac{1}{\sigma\sin\delta'}\right)^2+\left(\frac{1}{\tau\sin\delta''}\right)^2=-\frac{h}{k}. \tag{7}$$

Die Gleichung (4) zeigt, dass überhaupt wenn das Verhältniss der Grösse dreier zugeordneter Durchmesser gegeben ist, diese Durchmesser selbst der Grösse nach gegeben sind. Wenn diese insbesondere einander gleich sein sollen, so kommt:

$$\varkappa^2=-\tfrac{1}{3}g. \tag{8}$$

Die drei gleichen zugeordneten Durchmesser aller möglichen solcher Systeme sind hiernach alle unter einander gleich. Sie bilden eine Kegelfläche, welche durch diejenige Curve geht, in welcher das Ellipsoid von einer Kugel geschnitten wird, deren Radius-Quadrat dem dritten Theile der Quadrat-Summe der drei Halb-Axen-Quadrate gleich ist. Das Ellipsoid wird von einer solchen Kugel, deren Radius hiernach kleiner als die grösste und grösser als die kleinste Halb-Axe ist, immer geschnitten. Die fragliche Kegelfläche ist also immer reell. Um hiernach drei gleiche zugeordnete Durchmesser zu construiren, nehmen wir eine Seite dieser Kegelfläche willkührlich an und bestimmen diejenige Durchmesser-Ebene des Ellipsoids, deren zugeordneter Durchmesser diese Kegelseite ist, und die Kegelfläche noch in einer zweiten und dritten Kegelseite schneidet. Die drei Kegelseiten bilden alsdann ein System dreier gleicher zugeordneten Durchmesser.

Ist

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \tag{9}$$

die Gleichung des gegebenen Ellipsoids, bezogen auf seine drei Axen, so ist die Gleichung der fraglichen Kugel:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{\frac{1}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}=1,$$

und wenn wir abziehen, erhalten wir für die Gleichung der Kegelfläche, die der geometrische Ort für die gleichen zugeordneten Durchmesser ist, die folgende:

$$\frac{2\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2}.x^2+\frac{2\beta^2-\alpha^2-\gamma^2}{\beta^2}.y^2+\frac{2\gamma^2-\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2}.z^2=0. \tag{10}$$

Nehmen wir irgend drei gleiche zugeordnete Durchmesser zu Coordinaten-Axen, so finden wir für Ellipse, Kugel und Kegel die folgenden Gleichungen:

$$x^2+y^2+z^2=\varkappa^2,$$
$$x^2+y^2+z^2+2xy\cos\varepsilon''+2xz\cos\varepsilon'+2yz\cos\varepsilon=\varkappa^2,$$
$$xy\cos\varepsilon''+xz\cos\varepsilon'+yz\cos\varepsilon=0.$$

Es ist bekannt, dass, wenn wir eine gegebene positive Grösse in drei Theile zerlegen, das Product dieser drei Theile dann ein *maximum* ist, wenn dieselben einander gleich sind. Für ein gegebenes Ellipsoid tritt also das *maximum* des Productes $\rho^2\sigma^2\tau^2$ dann ein, wenn ρ^2, σ^2 und τ^2, deren Summe constant ist, einander gleich sind, und dem entsprechend gibt die Gleichung (6) für

$$1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\varepsilon'-\cos^2\varepsilon''+2\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon''$$

ein *minimum*. Dieser Ausdruck aber bestimmt die Grösse der Oeffnung derjenigen körperlichen Ecke, die von den drei zugeordneten Durchmessern gebildet wird, er ist gleich dem Quadrate des sechsten Theiles des Inhaltes einer Pyramide, die durch diese Ecke bestimmt wird, wenn wir auf

diesen Durchmessern die Seiten der Einheit gleich nehmen, und je kleiner er wird, desto mehr entfernt sich die körperliche Ecke von einer rechtwinkligen. Für diese ist er gleich Eins; überhaupt bleibt er derselbe, wenn wir statt der Seiten der ursprünglichen Ecke beliebig die Verlängerungen derselben nehmen, um neue Ecken zu bilden. Wir sind hiermit zu dem folgenden Satze gelangt.

Körperliche Ecken, deren Seiten in irgend drei zugeordnete Durchmesser eines gegebenen Ellipsoids fallen, weichen dann am meisten von einer rechtwinkligen ab, wenn diese Durchmesser drei gleiche sind.

Wenn wir durch irgend zwei Halb-Durchmesser eines gegebenen Ellipsoids eine Ebene legen, so bestimmen in dieser Ebene die Endpuncte dieser Halbdurchmesser und der Mittelpunct dann das grösste Dreieck, wenn die beiden Halb-Dnrchmesser irgend zwei zugeordnete der Durchschnitts-Curve sind. Nehmen wir dieses Dreieck zur Basis einer Pyramide, deren vierter Eckpunct in der Fläche liegt, so hat diese Pyramide dann den grössten Inhalt, wenn ihre Höhe die grösseste ist, und jener vierte Eckpunct also in den Endpunct des der Ebene zugeordneten Durchmessers fällt. Die von drei zugeordneten Halb-Durchmessern eines gegebenen Ellipsoids gebildeten Pyramiden, die in Folge der Gleichung (6) alle gleichen Inhalt haben, sind folglich die grössesten, welche überhaupt von drei Halb-Durchmessern gebildet werden können. Hiernach sind die Systeme dreier gleicher zugeordneten Durchmesser auch dadurch bestimmt, dass ihnen dem Kegel (10) eingeschriebene Pyramiden entsprechen, deren Inhalt (bei gegebenen Seiten-Längen) ein *maximum* ist.

Während der geometrische Ort für die gleichen zugeordneten Durchmesser die Kegelfläche (10) ist, wird eine zweite Kegelfläche von den entsprechenden zugeordneten Diametral-Ebenen umhüllt. Um diese zu bestimmen sei (x', y', z') der Endpunct irgend eines der gleichen zugeordneten Durchmesser; dann ist die Gleichung der Tangential-Ebene des Ellipsoids (9) in diesem Puncte

$$\frac{x'x}{\alpha^2}+\frac{y'y}{\beta^2}+\frac{z'z}{\gamma^2}=1.$$

Parallel mit dieser Tangential-Ebene ist diejenige Diametral-Ebene, die dem obigen Durchmesser zugeordnet ist. Für die Coordinaten derselben ergeben sich hiernach die folgenden:

$$w=0 \qquad \frac{x'}{\alpha^2}=t, \qquad \frac{y'}{\beta^2}=u, \qquad \frac{z''}{\gamma^2}=v,$$

und da die Coordinaten des Endpunctes des Durchmessers die Gleichung (10) befriedigen, finden wir für die Gleichungen der fraglichen zweiten Kegel-Fläche in Plan-Coordinaten:

$$\alpha^2(2\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)t^2+\beta^2(2\beta^2-\alpha^2-\gamma^2)u^2+\gamma^2(2\gamma^2-\alpha^2-\beta^2)v^2=0,$$
$$w=0. \qquad (11)$$

In Punct-Coordinaten erhalten wir für dieselbe Kegel-Fläche hieraus sogleich die folgende Gleichung:

$$\frac{x^2}{\alpha^2(2\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)}+\frac{y^2}{\beta^2(2\beta^2-\alpha^2-\gamma^2)}+\frac{z^2}{\gamma^2(2\gamma^2-\alpha^2-\beta^2)}=0. \qquad (12)$$

Die Systeme dreier gleichen zugeordneten Durchmesser bilden hiernach körperliche Ecken, die gleichzeitig der Kegelfläche (10) eingeschrieben und der Kegelfläche (12) umschrieben sind.

Für den Fall dreier gleichen zugeordneten Durchmesser geben die Gleichungen (5) und (7)

$$\sin^2\varepsilon+\sin^2\varepsilon'+\sin^2\varepsilon''=\frac{9h}{g^2}, \qquad (13)$$

$$\frac{1}{\sin^2\delta}+\frac{1}{\sin^2\delta'}+\frac{1}{\sin^2\delta''}=\frac{gh}{3k}. \qquad (14)$$

Die erste dieser beiden Gleichungen für sich und in Verbindung mit (6) führt zu den folgenden:

$$\cos^2\varepsilon+\cos^2\varepsilon'+\cos^2\varepsilon'' = \frac{3(g^2-3h)}{g^2}, \tag{15}$$

$$\cos\varepsilon\cos\varepsilon'\cos\varepsilon'' = \frac{27k-9gh+2g^3}{2g^3}. \tag{16}$$

Diese letzten Gleichungen insbesondere sagen aus, dass die Quadrat-Summe und das Product der Cosinus der von je zwei der drei gleichen zugeordneten Durchmesser gebildeten Winkel für alle Systeme solcher Durchmesser desselben Ellipsoids constant ist.

Die Coefficienten der Gleichung (3)

$$r^3+gr^2+hr+k = 0 \tag{3}$$

sind in der Art zusammengesetzt, dass, in Folge dieser Zusammensetzung, die Wurzeln dieser Gleichung nothwendig reelle Werthe erhalten. Wir haben diess früher auf die einfachste Weise gezeigt. Die Bedingung aber, dass die fragliche Gleichung, welche, wenn wir

$$r = q - \tfrac{1}{3}g$$

setzen, in die folgende übergeht:

$$q^3+\tfrac{1}{3}(3h-g^2)q+\tfrac{1}{27}(27k-9gh+2g^3) = 0,$$

drei reelle Wurzeln habe, ist bekanntlich die nachstehende:

$$(g^2-3h)^3 > (27k-9gh+2g^3)^2, \tag{17}$$

oder, entwickelt:

$$g^2h^2+18ghk-4h^3-4g^3k-27k^2 > 0,\ ^*) \tag{18}$$

ein Ausdruck, der unverändert derselbe bleibt, wenn g und k gleichzeitig ihr Zeichen ändern. Ein Blick auf die beiden Gleichungen (15) und (16) zeigt, dass wir die Bedingung (17) auch folgendergestalt schreiben können:

$$(\cos^2+\cos^2\varepsilon'+\cos^2\varepsilon'')^3 > 27\cos^2\varepsilon\cos^2\varepsilon'\cos^2\varepsilon''. \tag{19}$$

Hierin ist also eine geometrische Interpretation der allgemeinen Bedingnng enthalten, unter welcher überhaupt eine Gleichung des dritten Grades mit einer unbekannten Grösse drei reelle Wurzeln hat. Was die Bedingung (19) eigentlich aussagt, können wir nicht verkennen, wenn wir ihr die folgende Form geben:

$$[\tfrac{1}{3}(a+b+c)]^3 > abc,$$

wobei wir die drei Cosinus-Quadrate durch die drei Zahlen-Grössen a, b und c ersetzt haben. Es heisst dieselbe nichts anders, und dasselbe bedeuten auch die frühern Bedingungen (17) und (18), als dass, wenn wir eine Zahl in drei Theile zerlegen, das Product dieser Theile dann ein *maximum* ist, wenn dieselben einander gleich sind. Dieser Satz hört aber dann auf richtig zu sein, wenn die

---

*) Herr Kummer ist zu dem in analytischer Hinsicht merkwürdigen Resultate gelangt, dass der Ausdruck bei (18) sich als die Summe von sieben Quadraten darstellen lässt, und hat so direct gezeigt, dass die Wurzeln der Gleichung (3) sämmtlich reell sind. Geht die Fläche insbesondere in eine Rotations-Fläche über, so müssen, damit der fragliche Ausdruck verschwinde, die sieben Quadrate gleichzeitig gleich Null sein, was sieben Bedingungs-Gleichungen gibt, die sich aber auf zwei, die wir früher entwickelt haben, reduciren. Bemerkungen über die cubische Gleichung, durch welche die Haupt-Axen der Flächen zweiten Grades bestimmt werden. Crelle's Journal XXVI S. 268.

drei Theile nicht mehr sämmtlich positiv sind und somit reducirt sich die fragliche geometrische Interpretation darauf, dass die Cosinus der von den gleichen zugeordneten Durchmessern aller Flächen zweiter Ordnung gebildeten Winkel reell sind. Die diesen Cosinus entsprechenden Winkel selbst sind aber nur dann reell, wenn die Quadrate jener kleiner als die Einheit sind.

Aus den beiden Gleichungen (15) und (16), die sich auf keine Weise ändern, wenn g und k gleichzeitig das entgegengesetzte Zeichen annehmen, folgt dass dieselben Richtungen gleicher zugeordneter Durchmesser unendlich vielen Ellipsoiden entsprechen, deren Durchmesser-Längen durch Null hindurchgehend, auch imaginär werden können. Für das reelle, wie für das imaginäre Ellipsoid ist die Summe der drei Cosinus-Quadrate, die in Gemässheit der allgemeinen Bedingung (17) positiv ist, überdiess, weil $h > 0$, kleiner als 3, und das Product der drei Cosinus-Quadrate kleiner als die Einheit. Hiernach gibt es denn auch immer, welchen Werth dieses Product haben mag, drei Cosinus, zu denen reelle Winkel gehören. Es kann insbesondere der Werth dieses Productes,

$$\left(\frac{27k - 9gh + 2g^3}{2g^3}\right) \equiv K,$$

verschwinden, dann ist einer der drei Cosinus, etwa $\cos\varepsilon''$, gleich Null, die beiden entsprechenden zugeordneten Durchmesser schneiden sich also unter rechten Winkeln und die Ebene derselben ist ein Kreisschnitt des Ellipsoids. Da überdiess der diesem Kreisschnitte zugeordnete Halb-Durchmesser dem Radius dieses Kreises, mithin der mittlern Axe der Fläche, β, gleich sein muss, so ergibt sich unmittelbar die Bedingungs-Gleichung

$$2\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2, \tag{20}$$

und wir können auch leicht uns überzeugen, dass in Folge dieser Gleichung

$$27k - 9gh + 2g^3 = 0,$$

und also K verschwindet. Die mittlere Axe der Fläche ist alsdann den beiden gleichen zugeordneten Durchmessern des Hauptschnittes in der Ebene der kleinsten und grössten Axe gleich. Die beiden Kreisschnitte, welche auf dieser Ebene senkrecht stehen, gehen durch diese beiden gleichen zugeordneten Durchmesser, und jeder ist der, durch den andern gehenden, Kreisschnitt-Ebene zugeordnet. In Uebereinstimmung hiermit, reducirt sich die Gleichung (10), welche denjenigen Kegel darstellt, der der geometrische Ort für die gleichen zugeordneten Durchmesser ist, auf

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0,$$

wonach dieser Kegel in das System der beiden Kreisschnitt-Ebenen ausartet, so dass zu jedem Durchmesser, den wir in einer dieser Ebenen willkührlich annehmen irgend zwei, in der andern liegende und auf einander senkrecht stehende, als zugeordnete gehören, und ihm überdiess noch gleich sind. Die Gleichung (15) gibt im vorliegenden Falle, indem wir $\cos\varepsilon''$ gleich Null setzen:

$$\cos^2\varepsilon + \cos^2\varepsilon' = \frac{3(g^2 - 3h)}{g^2} = \frac{\beta^4 - \alpha^2\gamma^2}{\beta^4},$$

wobei wir sogleich sehen, dass der zweite Theil dieser Gleichung kleiner als die Einheit und in Folge der Gleichung (20) immer positiv ist. Insbesondere können wir also auch noch ε' einem rechten Winkel gleich nehmen, wo dann die mittlere Axe selbst einer der drei gleichen Durchmesser ist, und der Winkel der beiden andern, die auch die gleichen zugeordneten Durchmesser des oben betrachteten Hauptschnittes sind, wird dann durch die Gleichung

$$\cos^2\varepsilon = \frac{\beta^4 - \alpha^2\gamma^2}{\beta^4}$$

bestimmt.

176. Wir wollen in dieser Nummer denjenigen Fall noch besonders hervorheben, dass nicht nur die drei zugeordneten Durchmesser einander gleich sind, sondern dass sie überdiess auch, paarweise genommen, mit einander gleiche Winkel bilden. In dieser Voraussetzung gehen, indem wir $\varepsilon'' = \varepsilon' = \varepsilon$ setzen, die Gleichungen (15) und (16) in die folgenden über:

$$g^2\cos^2\varepsilon = g^2 - 3h,$$
$$2g^3\cos^3\varepsilon = 27k - 9gh + 2g^3,$$

und wenn wir zwischen diesen beiden Gleichungen $\cos\varepsilon$ eliminiren ergibt sich die folgende Bedingungs-Gleichung:

$$4(g^2 - 3h)^3 = (27k - 9gh + 2g^3)^2. \qquad (21)$$

Diese Bedingungs-Gleichung wird befriedigt, wenn die Gleichung (3) zwei gleiche Wurzeln hat, und die Fläche also eine Rotations-Fläche ist. Nur eine solche Fläche kann also drei zugeordnete Durchmesser haben, die einander gleich sind und sich überdiess unter gleichen Winkeln schneiden.*)

---

*) Eine geometrische Interpretation der Bedingung (21), welche überhaupt zwischen den drei Coefficienten der allgemeinen Gleichung des dritten Grades

$$r^3 \pm gr^2 + hr \pm k = 0, \qquad (a)$$

(in der wir g, h und k als positiv betrachten können und die obern und untern Zeichen zusammennehmen) Statt finden muss, wenn diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln haben soll, knüpft sich an das Zusammenbestehen der folgenden drei Gleichungen, die, in den Voraussetzungen des Textes, aus den Gleichungen (4), (5) und (6) hervorgehen:

$$\varkappa^2 = \mp\tfrac{1}{3}g,$$
$$\varkappa^4\sin^2\varepsilon = \tfrac{1}{3}h,$$
$$\varkappa^6(1+2\cos\varepsilon)(1-\cos\varepsilon)^2 = \varkappa^6\sin^2\varepsilon\sin^2\delta = \mp k.$$

Wenn die allgemeine Gleichung (a) des dritten Grades mit einer unbekannten Grösse, drei positive oder drei negative Wurzeln und unter diesen Wurzeln zwei gleiche hat, so lässt sich immer eine gerade Pyramide, mit einem gleichseitigen Dreieck als Basis, construiren, so dass das Quadrat jeder Seite ($\frac{1}{3}g$), das Quadrat jeder Seitenfläche ($\frac{1}{12}h$) und das Quadrat des Inhaltes ($\frac{1}{36}k$) ist.

Das Zusammenbestehen der drei vorstehenden Gleichungen reducirt sich auf das Zusammenbestehen irgend zweier der folgenden drei Gleichungen:

$$\sin^2\varepsilon = \frac{3h}{g^2}, \quad \sin^2\delta = \frac{9k}{gh}, \quad \sin^2\zeta = \frac{3kg}{h^2},$$

Wenn wir eine körperliche Ecke construiren, deren Seiten, paarweise genommen, einen Winkel ε bilden, deren Sinus vermittelst der ersten der drei vorstehenden Gleichungen durch die Coefficienten der Gleichung (a) bestimmt ist, so bestimmen sich, wenn diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, die Neigungs-Winkel je zweier der Seitenflächen der Ecke gegeneinander vermittelst der zweiten der vorstehenden Gleichungen und die Neigungs-Winkel der Seiten gegen die gegenüberliegenden Seitenflächen vermittelst der dritten dieser Gleichungen durch die Coefficienten der Gleichung (a).

Schreiben wir die letzte Gleichung, nach Analogie des Frühern, in folgender Weise:

$$(\cos^2\varepsilon+\cos^2\varepsilon'+\cos^2\varepsilon'')^3-27\cos^2\cos^2\varepsilon'\cos^2\varepsilon''=0,$$

so sehen wir dass, umgekehrt, ein Rotations-Ellipsoid nur solche gleiche zugeordnete Durchmesser haben kann, die gleiche Winkel mit einander bilden.

Es sei, indem wir $\alpha^2=\beta^2$ nehmen, hierbei aber unentschieden lassen ob $\alpha^2>\gamma^2$ oder $\alpha^2<\gamma^2$,

$$\frac{x^2+y^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \tag{22}$$

die Gleichung des Rotations-Ellipsoids; dann gehen die Gleichungen (10) und (12), welche diejenigen Kegelflächen darstellen, die bezüglich von den gleichen zugeordneten Durchmessern der Fläche gebildet und von den durch sie bestimmten zugeordneten Durchmesser-Ebenen umhüllt werden, in die folgenden über:

$$\frac{x^2+y^2}{\alpha^2}-\frac{2z^2}{\gamma^2}=0, \tag{23}$$

$$\frac{x^2+y^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{2\gamma^2}=0. \tag{24}$$

Diese Kegel-Flächen sind also Rotations-Flächen, welche mit dem Ellipsoid dieselben Rotations-Axen haben, und dieses folglich in zwei Kreisen schneiden.

Stellen wir insbesondere die Gleichung (23) mit der Gleichung (22) zusammen, so erhalten wir unmittelbar für diejenigen Kreise, in welchen die Fläche von ihren gleichen zugeordneten Durchmessern geschnitten wird,

$$z^2=\tfrac{1}{3}\gamma^2,$$
$$x^2+y^2=\tfrac{2}{3}\alpha^2,$$

ferner aus (15) zur Bestimmung der von je zwei derselben gebildeten Winkel

$$\cos^2\varepsilon=\pm\frac{\sqrt{g^2-3h}}{g}=\pm\frac{\alpha^2-\gamma^2}{2\alpha^2+\gamma^2} \tag{25}$$

Um drei gleiche zugeordnete Durchmesser der Rotations-Fläche (22) zu erhalten, brauchen wir also nur auf der leicht zu bestimmenden Kegelfläche drei solche Seiten zu nehmen, welche mit einander gleiche Winkel bilden, oder welche, mit andern Worten, die eben bestimmten Kreise in den drei Winkelpuncten eines eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks schneiden. Für die Länge der Seiten eines solchen Dreiecks ergibt sich aus dem Radius des Kreises, dem es eingeschrieben ist, $\alpha\sqrt{2}$, und hiernach zur Bestimmung von ε, als desjenigen Winkels, der in einem Dreiecke von zwei gleichen Seiten $\sqrt{2\alpha^2+\gamma^2}$ eingeschlossen wird und der dritten Seite $\alpha\sqrt{2}$ gegenübersteht, in Uebereinstimmung mit der Gleichung (25):

$$\cos\varepsilon=-\frac{\alpha^2-\gamma^2}{2\alpha^2+\gamma^2}$$

Zugleich ist ersichtlich, dass wir im letzten Ausdrucke der eben angezogenen Gleichung das untere Zeichen dann nehmen müssen, wenn wir bei der Bestimmung von ε solche Erstreckungen der gleichen zugeordneten Durchmesser wählen, welche demselben derjenigen beiden Doppel-Kegel, die im Mittelpuncte der Fläche zusammenstossen, angehören. Der so bestimmte Winkel ε ist hiernach ein spitzer oder stumpfer, je nachdem die Aequatorial-Axe kleiner oder grösser als die Rotations-Axe ist.

Diejenigen beiden Kreise, in welchen das Rotations-Ellipsoid von seinen gleichen zugeordneten Durchmessern geschnitten wird, bestimmen einen geraden der Fläche eingeschriebenen Cylinder. Ueberhaupt lassen sich dem Ellipsoide solcher Cylinder unendlich viele einschreiben, deren Basen in der Fläche desselben liegende Kreise sind: von allen diesen Cylindern hat der eben bestimmte den grössten Inhalt. Nehmen wir für die Höhe irgend eines der fraglichen Cylinder $2z$, so kommt für das Quadrat des Radius seiner in der Fläche liegenden Kreis-Basen

$$\alpha^2\left(1-\frac{z^2}{\gamma^2}\right),$$

und für seinen Inhalt, den wir C nennen wollen,

$$C = 2\pi\alpha^2\left(\frac{\gamma^2 z - z^3}{\gamma^2}\right).$$

Differentiiren wir, so ergibt sich

$$\frac{dC}{dz} = 2\pi\,\frac{\alpha^2}{\gamma^2}(\gamma^2 - 3z^2),$$

$$\frac{d^2C}{dz^2} = -\frac{12\pi\alpha^2 z}{\gamma^2},$$

wonach der fragliche Inhalt, wenn wir wie früher

$$z = \gamma\sqrt{1/3}$$

setzen, ein *maximum* wird und gleich ist:

$$\frac{4}{3\sqrt{3}}\cdot\pi\alpha^2\gamma.$$

Wir sehen hieraus, dass der Inhalt des Cylinders sich zu dem Inhalte des Ellipsoids wie $1:\sqrt{3}$ verhält. Jeder der beiden Rotations-Kegel, deren Spitzen im Mittelpuncte der Fläche zusammenstossen und von den gleichen zugeordneten Durchmessern gebildet werden, haben den sechsten Theil des obigen Ausdruckes zu ihrem Inhalte.*) —

*) Wenn wir die allgemeinen Flächen zweiter Ordnung, in der Voraussetzung, dass die drei Coordinaten-Axen gegebene Winkel ε, ε', ε'' mit einander bilden durch die Gleichung:

$$x^2+y^2+z^2 = \varkappa^2$$

darstellen, so findet sich in dieser Gleichung eine überzählige Constante, weil zu den sechs Constanten, von welchen die Lage des Coordinaten-Systems überhaupt abhängt, jene drei Winkel und $\varkappa$ noch hinzukommen. Die Lage der drei Coordinaten-Axe gegen die Fläche kann also keine ausschliessliche sein.

Von den neun Constanten einer Fläche zweiter Ordnung und Classe kommen sechs auf die Lagen-Bestimmung derselben und die drei übrigen auf die Bestimmung ihrer Natur. Wenn eine Fläche sich particularisirt, so hängt sie von weniger als neun Constanten ab, und dann ist zu erwägen, welche Constanten diese Particularisation betrifft. Eine Rotations-Fläche hängt nur von sieben Constanten ab, von den beiden ausgefallenen Constanten kommt nur eine auf die Natur der Fläche, der Bedingung entsprechend, dass zwei Axen derselben einander gleich sind. Die Constanten der Lage reduciren sich also auf fünf, so dass es keine drei Coordinaten-Axen mehr geben kann, die eine ausschliessliche Lage zur Fläche haben. Die Constanten der Lage zerfallen wieder in zwei Gruppen. Im Allgemeinen bestimmen die drei Constanten der einen Gruppe die Coordinaten eines Punctes, welcher zu der Fläche eine ausschliessliche Lage hat, und die drei Constanten der andern Gruppe die Richtungen dreier durch diesen

177. Die vorstehenden Erörterungen würden eine Lücke fühlbar lassen, wenn wir nicht, die beiden Hyperboloide ins Auge fassend, das Entsprechende aufsuchen wollten. Wir finden diess, wenn wir einmal die zugeordneten Durchmesser des Ellipsoids durch Asymptoten der Hyperboloide, das andere Mal die zugeordneten Durchmesser-Ebenen des Ellipsoids durch Tangential-Ebenen des Asymptoten-Kegels ersetzen.

Nehmen wir erstens drei beliebige Asymptoten eines gegebenen ein- oder zweischaligen Hyperboloids, das heisst, irgend drei Seiten des Asymptoten-Kegels desselben, zu Coordinaten-Axen, so erhalten wir für die Gleichung der Fläche, die folgende sich selbst rechtfertigende Form:

$$cxy+bxz+ayz = abc,$$

oder auch

$$\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}=1. \qquad (1)$$

Wir können sogleich an diese Form die Unterscheidung der beiden Arten von Hyperboloiden anknüpfen. Die Durchschnitts-Curven in den drei Coordinaten-Ebenen sind Hyperbeln und die drei Coordinaten-Axen, paarweise genommen, die Asymptoten derselben. Nehmen wir die positive Richtung dieser Axen, sämmtlich, vom Mittelpuncte angerechnet, auf demselben der beiden in diesem Puncte zusammenstossenden Asymptoten-Kegel, so liegen in dem Falle der zweischaligen Fläche die Durchschnitts-Hyperbeln innerhalb der von je zwei der positiven und je zwei der negativen Axen-Erstreckungen gebildeten Winkel, in dem Falle der einschaligen Fläche innerhalb der Nebenwinkel von diesen. Im ersten Falle sind a, b, c sämmtlich reell und wir können sie überdiess als positiv betrachten; im zweiten Falle sind a, b, c, weil die Producte je zweier negativ sein müssen,

---

Punct gehenden geraden Linien (oder Ebenen), die ihrerseits wieder eine ausschliessliche Beziehung zur Fläche haben. Bloss die Constanten der ersten Gruppen erhalten andere Werthe, wenn die Fläche, parallel mit sich selbst, fortrückt, es ändern sich bloss die Constanten der zweiten Gruppe, wenn die Fläche um den fraglichen Punct sich dreht. Ein Rotations-Ellipsoid hat seinen ausgezeichneten Punct behalten (den Mittelpunct) aber nicht mehr drei ausgezeichnete Richtungen, die durch diesen Punct gehen (nicht mehr drei bestimmte Axen-Richtungen). Darum also — weil nemlich eine Lagen-Constante der zweiten Gruppe fehlt — kann es kein Coordinaten-System geben, dem ausschliesslich eine bestimmte Gleichung entspricht, sondern, ohne dass diese Gleichung sich ändert, kann das Coordinaten-System sich drehen. Diess gilt insbesondere, wenn wir, den Entwicklungen des Textes entsprechend, die Fläche durch folgende Gleichung darstellen:

$$x^2+y^2+z^2 = \varkappa^2,$$

in welche die eine der beiden Constanten, von welcher die Natur der Fläche abhängt, in der Annahme des von je zwei der drei Coordinaten-Axen gebildeten Winkels ζ zu suchen ist.

Die Kugel hat von ihren Constanten der Lage nur die der ersten Gruppe behalten; darum sind je drei auf einander senkrechte Durchmesser drei zugeordnete Axen derselben.

Ein Paraboloid hat sämmtliche Constante der Lage behalten. Ein Cylinder hat eine Lagen-Constante der ersten Gruppe verloren, beziehen wir denselben auf ein beliebiges Coordinaten-System, so kann also dasselbe, parallel mit sich selbst, nach bestimmter Richtung fortrücken, ohne dass die Gleichung des Cylinders sich ändert.

Die Wichtigkeit solcher Erörterungen, die gewissermaassen die Metaphysik der Geometrie bilden und zeigen, wie abstracte Zahlen die letzte Grund-Bedingung ihrer Resultate sind, lässt sich nicht verkennen. Mehr als bloss anzudeuten, würde hier nicht an der Stelle sein.

imaginäre Grössen. Dem entsprechend wollen wir die vorstehende Gleichung (1), indem wir durch a, b, c immer reelle und positive Constanten bezeichnen, durch die folgende Doppel-Gleichung:

$$\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}=\pm 1, \qquad (2)$$

in welcher das obere Zeichen für das zweischalige und das untere Zeichen für das einschalige Hyperboloid gilt, ersetzen.

Da die Coordinaten-Axen beliebig, aber auf dem Asymptoten-Kegel liegend, angenommen werden, so hängt ihre Richtung nur von drei Constanten ab, während drei Constante auf die Bestimmung des Mittelpunctes der Fläche kommen, und hiernach durch a, b, c Art und Dimension derselben bestimmt werden. Wenn also die Richtung der zu Coordinaten-Axen genommenen Asymptoten eines gegebenen Hyperboloids gegeben ist, so sind die letztgenannten Constanten dadurch vollkommen bestimmt, und diese Constanten erhalten andere Werthe bei einer andern Wahl dreier Asymptoten zu Coordinaten-Axen. Zwischen den drei willkührlichen Constanten, von welchen diese Wahl der Asymptoten abhängt und den Werthen der fraglichen drei Constanten a, b, c müssen also drei Bedingungs-Gleichungen bestehen, entsprechend den drei Gleichungen (1) der 160. Nummer, zwischen denjenigen Constanten, von welchen die gegenseitige Richtung und die Grösse irgend dreier zugeordneter Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung abhängig ist.

178. Wir wollen zunächst die Gleichung:

$$\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}=1,$$

die ein zweischaliges Hyperboloid darstellt, discutiren und die Bedeutung ihrer drei Constanten nachweisen. Die Gleichungen

$$xy=ab, \qquad xz=ac, \qquad yz=bc, \qquad (3)$$

stellen, wenn wir von der jedesmaligen dritten Dimension abstrahiren, die Durchschnitts-Hyperbeln in den drei Coordinaten-Ebenen dar. Wir sehen hieraus, dass, wenn wir eine Ebene construiren, welche von den Coordinaten-Axen bezüglich die Segmente 2a, 2b, 2c abschneidet, die Durchschnitts-Linien dieser Ebene mit den drei Coordinaten-Ebenen, die fraglichen drei Hyperbeln berühren. Sie bilden ein Dreieck, dessen Winkelpuncte auf dem Asymptoten-Kegel liegen und dessen Seiten die eine Schale des Hyperboloids berühren. Die Gleichung der Ebene dieses Dreiecks ist hiernach die folgende:

$$\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}+\frac{z}{2c}=1.\text{*)}$$

---

*) Für die fraglichen drei Durchschnitts-Hyperbeln (3) ergeben sich in Plan-Coordinaten unmittelbar die folgenden drei Gleichungen:

$$4abtu=w^2, \qquad 4actv=w^2, \qquad 4bcuv=w^2,$$

die gleichzeitig befriedigt werden, wenn wir

$$t=\frac{\pm 1}{2a}, \qquad u=\frac{\pm 1}{2b}, \qquad v=\frac{\pm 1}{2c}$$

setzen, und hierbei die obern und die untern Vorzeichen zusammennehmen. Die beiden durch die vor-

Die Gleichung der Fläche wird befriedigt, wenn wir

$$x = a\sqrt{1/3}, \quad y = b\sqrt{1/3}, \quad z = c\sqrt{1/3},$$

setzen. Für die Tangential-Ebene in diesem Puncte ergibt sich

$$\frac{x}{a\sqrt{3}} + \frac{y}{b\sqrt{3}} + \frac{z}{c\sqrt{3}} = 1,$$

wonach diese Ebene von den Coordinaten-Axen die Segmente $a\sqrt{3}$, $b\sqrt{3}$ und $c\sqrt{3}$ abschneidet.

Die fragliche Tangential-Ebene ist also der Ebene des die Fläche berührenden Dreiecks parallel; die beiden Ebenen bestimmen sich gegenseitig dadurch, dass diejenigen Segmente, welche sie von den Coordinaten-Axen abschneiden, und also auch ihre Abstände vom Mittelpuncte der Fläche sich wie

$$\sqrt{3} : 2$$

verhalten. Jeder Tangential-Ebene entspricht also eine, hiernach leicht zu construirende, ihr parallele Ebene, welche die Fläche und ihren Asymptoten-Kegel in zwei Ellipsen schneidet, die eine solche gegenseitige Lage haben, dass alle Dreiecke, welche sich der einen umschreiben lassen, zugleich der andern eingeschrieben sind; denn nach einem bekannten Satze der ebenen Geometrie gibt es solcher Dreiecke, wenn deren ein einziges existirt, unendlich viele. Im vorliegenden Falle, wo die beiden Ellipsen ähnliche sind und eine concentrische Lage haben, wonach sie als orthographische Projectionen zweier Kreise anzusehen sind, ist der Inhalt aller solcher Dreiecke derselbe. Durch die drei Winkelpuncte jedes derselben sind drei Asymptoten des Hyperboloids bestimmt; nehmen wir diese, von welchen wir eine nach dem Vorstehenden von Vorne herein willkührlich annehmen können, zu Coordinaten-Axen und nennen wir ihre Abstände vom Mittelpuncte der Fläche 2a, 2b, 2c, so können wir diese durch folgende Gleichung darstellen:

$$\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} = 1. \tag{5}$$

Die drei zu Coordinaten-Axen genommenen Asymptoten wollen wir zugeordnete nennen, und die drei Constanten a, b, c zugeordnete Asymptoten-Längen.

179. Um die Halb-Axen-Quadrate des durch die letzte Gleichung dargestellten zweischaligen Hyperboloids zu bestimmen, brauchen wir nur zu der Gleichung (5) der 171. Nummer zurückzugehen, und in dieser Gleichung

$$A = A' = A'' = 0, \quad B'' = \frac{1}{2ab}, \quad B' = \frac{1}{2ac}, \quad B = \frac{1}{2bc},$$

zu setzen, wonach

$$\Theta_3 = \frac{1}{4a^2b^2c^2}, \quad \Xi_2 + \Xi_1 + \Xi = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{a^2c^2} + \frac{1}{b^2c^2}\right),$$

$$\Psi_{03} = -\frac{1}{4a^2bc}, \quad \Psi_{13} = -\frac{1}{4ab^2c}, \quad \Psi_{23} = -\frac{1}{4abc^2}.$$

---

stehenden Coordinaten-Werthe bestimmten Ebenen, welche gleichzeitig die drei Hyperbeln berühren, werden in Punct-Coordinaten durch die Doppel-Gleichung

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} + \frac{z}{2c} = \pm 1$$

dargestellt.

Alsdann kommt:

$$r^6+(a^2+b^2+c^2-2abcos\varepsilon''-2ac\,cos\varepsilon'-2bc\,cos\varepsilon)\,r^4$$
$$-4abc\,(asin\varepsilon'sin\varepsilon''cos\zeta+bsin\varepsilon\,sin\varepsilon''cos\zeta'+csin\varepsilon\,sin\varepsilon'cos\zeta'')\,r^2$$
$$-4a^2b^2c^2sin^2\varepsilon\,sin^2\delta=0. \qquad (6)$$

Diese Gleichung liefert uns sogleich die in der 177. Nummer bereits angedeuteten drei Relationen zwischen den drei zugeordneten Asymptoten-Längen und denjenigen Winkeln, welche die drei Asymptoten mit einander bilden. Es ist nemlich

$$a^2+b^2+c^2-2abcos\varepsilon''-2accos\varepsilon'-2bc\,cos\varepsilon=g, \qquad (7)$$
$$-4abc\,(asin\varepsilon'sin\varepsilon''cos\zeta+bsin\varepsilon\,sin\varepsilon''cos\zeta'+csin\varepsilon\,sin\varepsilon'cos\zeta'')=h, \qquad (8)$$
$$-4a^2b^2c^2sin^2\varepsilon\,sin^2\delta=k, \qquad (9)$$

wobei, für ein gegebenes Hyperboloid g, h und k unverändert dieselben Werthe behalten, wie wir auch die Gleichung (5) mit einer andern von derselben Form vertauschen mögen; und zwar sind diese drei Werthe, wenn wir die reelle Halb-Axe der Fläche α und ihre beiden halben Neben-Axen β' und γ' nennen, bezüglich gleich

$$\beta'^2+\gamma'^2-\alpha^2,\quad \beta'^2\gamma'^2-\alpha^2\beta'^2-\alpha^2\gamma^2,\quad -\alpha^2\beta'^2\gamma'^2.$$

Die geometrische Deutung der Gleichung (7) gibt den folgenden Satz:

In allen solchen dreiseitigen Pyramiden deren Seiten in dem Asymptoten-Kegel liegen und deren Basis einer Schale des Hyperboloids umschrieben ist, ist die Quadrat-Summe der drei Seiten, weniger der Quadrat-Summe der drei Seiten der Basis constant und zwar gleich (—4g).

Wenn der Asymptoten-Kegel sich wenig öffnet, so ist offenbar g negativ und also die erstgenannte Quadrat-Summe die grössere. Wenn um den Asymptoten-Kegel sich rechtwinklige körperliche Ecken beschreiben lassen, so verschwindet g (115) und also sind dann die beiden Quadrat-Summen einander gleich. Da die Gleichung (5) eine positive und zwei negative Wurzeln hat, so ist wenn g negativ ist auch h negativ. Dinser letztere Coefficient ändert sein Zeichen erst später und geht dann erst durch Null, wenn der Asymptoten-Kegel sich so weit öffnet, dass in denselben sich rechtwinklige körperliche Ecken beschreiben lassen (114). Dieser Fall wird durch folgende Bedingungs-Gleichung characterisirt:

$$\frac{a\cos\zeta}{\sin\varepsilon}+\frac{b\cos\zeta'}{\sin\varepsilon'}+\frac{c\cos\zeta''}{\sin\varepsilon''}=0, \qquad (10)$$

die insbesondere befriedigt wird, wenn die Winkel ζ, ζ', ζ'' und mithin auch die Winkel ε, ε', ε'' rechte sind. Je drei auf einander senkrecht stehende Asymptoten der durch die vorhtehende Gleichung particularisirten Fläche, sind zugeordnete.

Für das Quadrat der Basis der eben betrachteten Pyramide, die wir, der Kürze wegen, hier die eingeschriebene Asymptoten-Pyramide nennen wollen, erhalten wir, wenn wir erwägen, dass die Seitenflächen derselben bezüglich gleich sind:

$$2ab\,sin\varepsilon'',\qquad 2ac\,sin\varepsilon',\qquad 2bc\,sin\varepsilon,$$

den folgenden Ausdruck (168):

$$(2ab\,sin\varepsilon'')^2+(2ac\,sin\varepsilon')^2+(2bc\,sin\varepsilon)^2+2h$$

und somit erhalten wir als geometrische Deutung der Gleichung (8) den folgenden Satz.

In allen eingeschriebenen Asymptoten-Pyramiden ist die Quadrat-Summe der drei Seitenflächen, weniger dem Quadrate der Basis constant und gleich $(-2h)$.

So lange der Asymptoten-Kegel sich noch nicht soweit öffnet, dass in demselben eine rechtwinklige dreiseitige Ecke sich beschreiben lässt, ist die Quadrat-Summe der drei Seitenflächen die überwiegende; wenn diess Statt finden kann, so ist diese Summe dem Quadrate der Basis gleich; öffnet der Kegel sich weiter, so ist dieses grösser als jene.*)

Die geometrische Interpretation der Gleichung (8) gibt unmittelbar den folgenden Satz.

Der Inhalt aller eingeschriebenen Asymptoten-Pyramiden ist constant.

Für diesen Inhalt finden wir

$$\tfrac{4}{3}abc\sin\varepsilon\sin\delta = \tfrac{2}{3}\alpha\beta'\gamma',$$

und da (117) der Inhalt des durch eine beliebige Tangential-Ebene von dem Asymptoten-Kegel der Fläche abgeschnittenen Kegels gleich ist $\frac{\pi}{3}\alpha\beta'\gamma'$, so verhält sich der Inhalt jener Asymptoten-Pyramide zum Inhalte eines solchen abgeschnittenen Kegels wie:

$$2 : \pi.$$

Für den Fall des einschaligen Hyperboloids

$$\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc} = -1, \tag{11}$$

dessen Gleichung aus der Gleichung des bisher betrachteten zweischaligen Hyperboloids dadurch hervorgeht, dass wir a, b, c mit $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$, oder a, b, c vertauschen — woraus ersichtlich ist, dass die drei zugeordneten Asymptoten-Längen imaginär werden —: bestehen alle bisherigen analytischen Entwicklungen, wenn wir auch in diesen die eben angezeigten Vertauschungen vornehmen. Es kommt also:

$$-(a^2+b^2+c^2-2ab\cos\varepsilon''-2ac\cos\varepsilon'-2bc\cos\varepsilon) = g \tag{12}$$

$$-2abc(a\sin\varepsilon'\sin\varepsilon''\cos\zeta+b\sin\varepsilon\sin\varepsilon''\cos\zeta'+c\sin\varepsilon\sin\varepsilon'\cos\zeta'') = h, \tag{13}$$

$$4a^2b^2c^2\sin^2\varepsilon\sin^2\delta = k. \tag{14}$$

---

*) Die ausführlich discutirte Gleichung

$$r^6+gr^4+hr^2+k = 0,$$

deren Wurzeln die drei Halb-Axen-Quadrate der durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades in Punct- oder Plan-Coordinaten dargestellten Fläche sind, bietet die folgenden acht verschiedenen Fälle in Beziehung auf die Vorzeichen der Werthe ihrer Coefficienten:

$+-+-$ I	$+-++$ III	$+--+$ V	$++-+$ VII
$++++$ II	$+++-$ IV	$++--$ VI	$+---$ VIII.

Diesen acht Fällen entsprechen charakteristische Unterscheidungen der Fläche. Die Combinationen I und II beziehen sich auf das reelle und imaginäre Ellipsoid, die Combinationen III, V, VII auf das einschalige, die Combinationen IV, VI, VIII auf das zweischalige Hyperboloid. In den Fällen III und IV öffnet sich der Asymptoten-Kegel so weit, dass er eine rechtwinklige Ecke in der Art umschliessen kann, dass die drei Kanten der Ecke ganz innerhalb desselben liegen; in den Fällen V und VI findet diess zwar nicht mehr Statt, aber er öffnet sich doch noch so weit, dass er die drei eine solche Ecke bildenden Ebenen gleichzeitig schneiden kann, in den Fällen VII und VIII öffnet er sich auch so weit nicht mehr, so dass er ganz innerhalb einer rechtwinkligen Ecke liegen kann.

Nur die geometrische Deutung wird eine andere. Es gibt keine Dreiecke mehr, die zugleich der Fläche um- und ihrem Asymptoten-Kegel eingeschrieben sind, dagegen aber gibt es Dreiecke, die umgekehrt der Fläche eingeschrieben und ihrem Asymptoten-Kegel umschrieben sind, in der Art, dass die drei zugeordneten Asymptoten, die früher durch die Eckpuncte des Dreiecks gingen, nun durch die Berührungspuncte auf den Seiten desselben gehen.

Der Asymptoten-Kegel der Fläche (9) wird durch die folgende Gleichung

$$\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}=0$$

dargestellt, und hiernach erhalten wir für die Gleichungen derjenigen Ebenen, welche denselben auf den drei zu Coordinaten-Axen genommenen zugeordneten Asymptoten berühren, die folgenden:

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0, \quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0, \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0. \tag{15}$$

Diese drei Tangential-Ebenen schneiden die durch folgende Gleichung

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{16}$$

dargestellte Ebene in den Seiten eines Dreiecks, die offenbar den Asymptoten-Kegel berühren und von dem wir behaupten, dass es der Fläche eingeschrieben ist. Um diese Behauptung zu rechtfertigen brauchen wir bloss zu bemerken, dass je zwei der Gleichungen (15) gleichzeitig mit der Gleichung (11) und der Gleichung der Fläche (6) befriedigt werden.*)

*) Wir gelangen zu diesem Resultate durch folgende Erwägung. Die Gleichung

$$\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}=\varkappa \tag{a}$$

stellt, wenn wir für $\varkappa$ nacheinander alle möglichen positiven und negativen Werthe nehmen, alle möglichen zwei- und einschaligen Hyperboloide dar, welche dieselben drei zugeordneten Asymptoten haben, und deren drei entsprechende (reelle oder imaginäre) Asymptoten-Längen unter einander ein gegebenes Verhältniss haben. Den Uebergang zwischen beiden Arten von Hyperboloiden bildet, $\varkappa$ gleich Null entsprechend, der ihnen gemeinschaftliche Asymptoten-Kegel. Alle diese Flächen werden von einer beliebigen Ebene in concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Curven geschnitten. Nehmen wir für die schneidende Ebene

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=2, \tag{b}$$

so sind diese Curven Ellipsen, deren Dimensionen zunehmen, wenn $\varkappa$ vermindert wird. Für $\varkappa=1$ und $\varkappa=0$ erhalten wir zwei Ellipsen von der Art, dass sich ein Dreieck der ersten umschreiben lässt, das der zweiten eingeschrieben ist (178). Wir können endlich einen negativen Werth von $\varkappa$ so bestimmen, dass wir eine dritte Ellipse erhalten, deren Dimensionen von der Art sind, dass ihr ein Dreieck eingeschrieben ist, dessen Seiten die zweite Ellipse in den Winkelpuncten des ersten Dreiecks berühren. Es findet diess bekanntlich dann Statt, wenn die Dimensionen der zweiten Ellipse mittlere Proportionalen zwischen den Dimensionen der ersten und dritten Ellipse sind. Diese Bedingung, wobei wir die drei Ellipsen auch mit ihren Projectionen auf eine beliebige Ebene vertauschen können, gibt $\varkappa=-4$.

Eliminiren wir nemlich $\frac{z}{c}$ zwischen den beiden Gleichungen (a) und (b), so kommt:

Die geometrische Interpretation der Gleichungen (10) — (12) gibt hiernach den folgenden Satz.

Wenn man in ein einschaliges Hyperboloid irgend ein Dreieck beschreibt, dessen Seiten den Asymptoten-Kegel desselben berühren, so bestimmen die drei Berührungspuncte auf diesen Seiten die Eckpuncte der Basis einer Pyramide, deren Spitze in den Mittelpunct der Fläche fällt. In allen solchen Pyramiden ist constant:

1. die Quadrat-Summe der drei Seiten weniger der Quadrat-Summe der drei Seiten der Basis und zwar gleich (g), ferner

2. die Quadrat-Summe der drei Seitenflächen weniger dem Quadrate der Fläche der Basis und zwar gleich $(-\frac{1}{8}h)$ und endlich

3. der Inhalt und zwar gleich $(\frac{1}{12}\sqrt{k})$.

Ein Dreieck, welches einem einschaligen Hyperboloid eingeschrieben und dem Asymptoten-Kegel desselben umschrieben ist, hat einen viermal grössern Flächen-Inhalt als dasjenige, welches von den drei Berührungspuncten auf den drei Seiten desselben gebildet wird und die Basis einer der eben betrachteten Pyramiden ist. Hiernach schliesst sich an den letzten Theil des vorstehenden Satzes der folgende.

Alle Pyramiden, welche zur Basis Dreiecke haben, die einem gegebenen einschaligen Hyperboloid eingeschrieben sind und deren drei Seiten-Ebenen den Asymptoten-Kegel desselben berühren, haben gleichen Inhalt $(\frac{1}{3}\sqrt{k})$. —

180. Neben den in den letzten Nummern discutirten Gleichungen stellt sich in dem Systeme der Plan-Coordinaten die folgende Doppel-Gleichung von ganz entsprechender Form:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{xy}{ab}+\frac{y^2}{b^2}-2.\frac{x}{a}-2.\frac{y}{b}+\varkappa=0,$$

als Gleichung der Projection der bezüglichen Durchschnitts-Curve auf die Ebene XY. Für das Product der beiden Halb-Axen finden wir, indem wir

$$A=\frac{1}{a^2},\quad A'=\frac{1}{b^2},\quad B''=\frac{1}{2ab},\quad C=-\frac{1}{a},\quad C'=-\frac{1}{b},\quad D=\varkappa,$$

setzen (173):

$$\frac{\Theta_2 \sin\varepsilon''}{\Xi_2\sqrt{\Xi_2}}=\frac{2ab\sin\varepsilon''}{3\sqrt{3}}.(4-3\varkappa).$$

Von den drei Werthen, die der vorstehende Ausdruck erhält, wenn wir nach einander $\varkappa = 1$, $\varkappa = 0$ und $\varkappa = -4$ setzen, ist das Quadrat des zweiten dem Producte des ersten und dritten gleich. Setzen wir $\varkappa = -4$, so entsprechen die Gleichungen (a) und (b) den Gleichungen (11) und (14) des Textes.

Wenn ein einschaliges Hyperboloid gegeben ist, so gibt es im Allgemeinen zwei Ebenen, die einer gegebenen Ebene parallel sind, und Dreiecke enthalten, welche zugleich der Fläche ein- und dem Asymptoten-Kegel umschrieben sind. Diese Ebenen sind reell, wenn die gegebene Ebene den Asymptoten-Kegel in Ellipsen schneidet, und dann leicht zu construiren. Wir brauchen hierzu nur in dieser Ellipse irgend einen Halb-Durchmesser zu ziehen, diesen um ein gleiches Stück über den Umfang derselben hinaus zu verlängern und durch den Endpunct der Verlängerung und den Mittelpunct der Fläche eine gerade Linie zu legen. Diese gerade Linie schneidet die letztere, in zwei, gleich weit vom Mittelpuncte abstehenden, den beiden zu construirenden Ebenen angehörenden Puncten. Es beruht diese Construction auf dem bekannten Satze, dass jede dieser Ebenen die Fläche in solchen zwei ähnlichen und concentrischen Ellipsen schneidet, deren lineare Dimensionen, weil die obigen Dreiecke einer dieser Ellipsen eingeschrieben und der andern umschrieben sind, sich wie 2 : 1 verhalten.

$$abtu + actv + bcuv = \pm w^2. \qquad (1)$$

Diese Doppel-Gleichung stellt Flächen zweiter Classe dar; deren Mittelpunct in den Anfangspunct der Coordinaten fällt. Sie wird befriedigt wenn, gleichzeitig mit w, zwei der drei übrigen Coordinaten t, u und v verschwinden: die Coordinaten-Ebenen berühren also den Asymptoten-Kegel. Um hiernach überhaupt eine hyperbolische Fläche durch die vorstehende Gleichung darzustellen, brauchen wir nur irgend drei Tangential-Ebenen ihres Asymptoten-Kegels zu Coordinaten-Ebenen zu nehmen. Die vollständige Bestimmung dieser Ebenen hängt also noch von drei willkührlichen Constanten ab und nachdem diese beliebig angenommen worden sind, erhalten für eine gegebene Fläche a, b, c vollkommen bestimmte Werthe.

Indem wir, nach einander, jede der drei Veränderlichen v, u und t gleich Null setzen, kommt

$$abtu = \pm w^2, \quad actv = \pm w^2, \quad bcuv = \pm w^2. \qquad (2)$$

Diese drei Gleichungen stellen drei in den drei Coordinaten-Ebenen liegende Hyperbeln dar, und zwar sind diese Hyperbeln diejenigen, welche wir erhalten, wenn wir, parallel mit den drei Coordinaten-Axen, die Fläche auf die drei gegenüberstehenden Coordinaten-Ebenen projiciren. Für den Fall des zweischaligen Hyperboloids fallen diese Projectionen innerhalb des Asymptoten-Doppel-Kegels, für den Fall des einschaligen ausserhalb. Demnach stellt die Gleichung (1) im Falle des obern Zeichens ein zweischaliges, im Falle des untern Zeichens ein einschaliges Hyperboloid dar.

Wir wollen erstens wieder die zweischalige Fläche, in deren Gleichung:

$$abtu + actv + bcuv = w^2,$$

wir a, b und c als positive Constanten ansehen, näher betrachten. Dann erhalten wir für die Gleichungen der projicirenden Cylinder, den Projectionen (2) entsprechend, unmittelbar die folgenden:

$$xy = \tfrac{1}{4}ab, \qquad xz = \tfrac{1}{4}ac, \qquad yz = \tfrac{1}{4}bc,$$

Diese Gleichungen werden gleichzeitig befriedigt, wenn wir

$$x = \tfrac{1}{2}a, \qquad y = \tfrac{1}{2}b, \qquad z = \tfrac{1}{2}c$$

setzen. In dem durch diese Coordinaten-Werthe bestimmten Puncte schneiden sich also die drei Cylinder, oder, mit andern Worten, durch diesen Punct lassen sich drei, den Coordinaten-Axen parallele Tangenten an die Fläche legen, welche eine Pyramide bilden, deren Seitenflächen dreien Tangential-Ebenen des Asymptoten-Kegels parallel sind. Dieser Punct wird durch folgende Gleichung dargestellt:

$$at + bu + cv + 2w = 0.$$

Die Gleichung der Fläche wird befriedigt, wenn

$$at = bu = cv = w\sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

die bezügliche Tangential-Ebene schneidet also von den Coordinaten-Axen die Segmente $a\sqrt{3}$, $b\sqrt{3}$, $c\sqrt{3}$, ab. Der Berührungspunct auf ihr, hat folgende Gleichung*):

---

*) Ueberhaupt ergibt sich (Einl. 23) zur Bestimmung des Poles einer gegebenen Ebene (t′, u′, v′, w′) die Gleichung:

$$a(bu' + cv')t + b(at' + cv')u + c(at' + bu')v \mp 2w'w = 0,$$

wobei das untere Zeichen für den in der folgenden Nummer betrachteten Fall des einschaligen Hyperboloids gilt.

$$at + bu + cv + w\sqrt{3} = 0,$$

und hiernach sind seine Coordinaten

$$x = a\sqrt{1/3}, \quad y = b\sqrt{1/3}, \quad z = c\sqrt{1/3}.$$

Er liegt also mit der Spitze der eben bestimmten Pyramide auf demselben Durchmesser der Fläche. Die Abstände beider vom Mittelpuncte verhalten sich wie

$$2 : \sqrt{3},$$

wodurch sie gegenseitig durch einander bestimmt werden. Die Polar-Ebene der Spitze der Pyramide, dadurch bestimmt, dass sie durch den Berührungspunct auf den drei Seiten dieser Pyramide geht, ist durch die folgende Gleichung

$$at + bu + cv + \tfrac{1}{2}w = 0$$

gegeben, und schneidet also von den drei Coordinaten-Axen Segmente ab, die gleich sind 2a, 2b, 2c. Die durch die Spitze der Pyramide, parallel mit dieser Polar-Ebene gelegte Ebene schneidet von den Coordinaten-Axen die Segmente $\frac{3}{2}a$, $\frac{3}{2}b$, $\frac{3}{2}c$ ab.

Die fragliche Polar-Ebene ist endlich auch dadurch bestimmt, dass sie die Fläche und den Asymptoten-Kegel in solchen zwei Ellipsen schneidet, denen Dreiecke sich bezüglich um- und einschreiben lassen. Die eben betrachtete Pyramide und diejenige, welche durch dieselbe Ebene von der durch die Asymptoten-Ebene gebildeten Ecke abgeschnitten werden, haben nemlich zwei Dreiecke zur Basis, deren Schwerpunct zusammenfällt und deren entsprechende Seiten parallel sind und, wie die Höhen der beiden Pyramiden, im Verhältnisse von 1 : 4 stehen. Es folgt hieraus, dass wenn wir die Mitten der Seiten des zweiten Dreiecks zu einem neuen Dreiecke verbinden, die Winkelpuncte des ersten in den Mitten der Seiten dieses neuen Dreiecks liegen, so dass also diess letztgenannte Dreieck zugleich der Fläche umschrieben und dem Asymptoten-Kegel eingeschrieben ist.

Die Gleichung (3) der 166. Nummer gibt, indem wir

$$A = A' = A'' = 0, \qquad B'' = \tfrac{1}{2}ab, \qquad B' = \tfrac{1}{2}ac, \qquad B = \tfrac{1}{2}bc,$$

setzen, zur Bestimmung der drei Halb-Axen-Quadrate der Fläche die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} &r^6 - (ab\cos\varepsilon'' + ac\cos\varepsilon' + bc\cos\varepsilon)\,r^4 \\ &- \tfrac{1}{4}\{(ab\sin\varepsilon'')^2 + (ac\sin\varepsilon')^2 + (bc\sin\varepsilon)^2 \\ &+ 2ab\sin\varepsilon''.ac\sin\varepsilon'.\cos\zeta' + 2ab\sin\varepsilon''.bc\sin\varepsilon.\cos\zeta' + 2ac\sin\varepsilon'.bc\sin\varepsilon.\cos\zeta''\}\,r^2 \\ &- \tfrac{1}{4}a^2b^2c^2\sin^2\delta\sin^2\varepsilon = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

181. Wir wollen zweitens das einschalige Hyperboloid betrachten, indem wir die Gleichung

$$abtu + actv + bcuv = -w^2 \tag{4}$$

zu Grunde legen, und wir behaupten, dass alsdann eine Ebene, welche von den Coordinaten-Axen die Segmente a, b, c abschneidet, die Coordinaten-Ebenen in solchen drei geraden Linien schneidet, die ein dem Asymptoten-Kegel umschriebenes, der Fläche eingeschriebenes Dreieck bilden. Um diess nachzuweisen bemerken wir, dass die Gleichung der Fläche (4) befriedigt wird, wenn wir etwa

$$cv = bu = -at = w$$

setzen, wonach für die Gleichung des Berührungspunctes auf der bezüglichen Tangential-Ebene

$$at = w$$

sich ergibt, und dieser Berührungspunct also ein auf der Fläche liegender Winkelpunct des fraglichen Dreiecks ist.

Wir wollen eine Pyramide, welche, wie die von den drei Coordinaten-Ebenen gebildete, ihre Spitze in dem Mittelpuncte der Fläche und ein solches Dreieck zur Basis hat, das gleichzeitig der Fläche eingeschrieben und ihrem Asymptoten-Kegel umschrieben ist, eine umschriebene Asymptoten-Pyramide nennen.

Die drei Halb-Axen-Quadrate der Fläche sind durch die folgende Gleichung gegeben:

$$r^6+(ab\cos\varepsilon''+ac\cos\varepsilon'+bc\cos\varepsilon)r^4$$
$$-\tfrac{1}{4}\{(ab\sin\varepsilon'')^2+(ac\sin\varepsilon')^2+(bc\sin\varepsilon)^2$$
$$+2ab\sin\varepsilon''.ac\sin\varepsilon'.\cos\zeta+2ab\sin\varepsilon''.bc\sin\varepsilon.\cos\zeta'+2ac\sin\varepsilon'.bc\sin\varepsilon.\cos\zeta''\}r^2$$
$$+\tfrac{1}{4}a^2b^2c^2\sin^2\delta\sin^2\varepsilon=0. \qquad (5)$$

Wie wir auch ein gegebenes einschaliges Hyperboloid durch eine Gleichung von der Form der Gleichung (4) darstellen mögen, die Coefficienten der vorstehenden Gleichung (5) des dritten Grades bleiben unverändert dieselben. Deuten wir geometrisch, so erhalten wir hiernach den folgenden Satz.

In jeder umschriebenen Asymptoten-Pyramide eines gegebenen einschaligen Hyperboloids ist constant:

1. die Quadrat-Summe der drei Seiten der Basis, weniger der doppelten Quadrat-Summe der drei Seiten (=2g),

2. das Quadrat der Basis, weniger der doppelten Quadrat-Summe der drei Seitenflächen (= h),

3. der Cubik Inhalt (= $-\frac{1}{4}$k).

Der letzte Theil dieses Satzes findet sich schon am Schlusse der 179. Nummer bewiesen.

Für den besondern Fall, dass die Summe der drei Halb-Axen-Quadrate verschwindet, ergibt sich die Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{\cos\varepsilon}{a}+\frac{\cos\varepsilon'}{b}+\frac{\cos\varepsilon''}{c}=0,$$

und wir sehen, dass dieser Genüge geschieht, wenn gleichzeitig für ε, ε' und ε'' rechte Winkel genommen werden können, das heisst, wenn sich dem Asymptoten-Kegel eine körperliche rechtwinklige Ecke umschreiben lässt.

Der Raum verbietet uns hier in ein grösseres Detail einzugehen. —

§. 10.

Rotations-Flächen zweiter Classe. Rotations-Kegel, die einer Fläche zweiter Classe umschrieben sind.

182. Wir haben bereits in der 154. und 155. Nummer, die Bedingungs-Gleichungen entwickelt, unter welchen die durch die allgemeine Gleichung in Plan-Coordinaten dargestellte Fläche eine Rotations-Fläche ist. Wir wollen jetzt, von einem andern Gesichtspuncte ausgehend, nochmals hierauf zurückkommen, in ein näheres Detail eingehen, und neue Betrachtungen anknüpfen.

Es sei

$$At^2+A'u^2+A''v^2+2B''tu+2B'tv+2Buv+2Ctw+2C'uw+2C''vw+w^2=0 \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung der Fläche. Soll diese Fläche eine Rotations-Fläche sein, so lässt sie sich auch durch eine Gleichung von folgender Form ausdrücken:

$$(x't+y'u+z'v+w)(x''t+y''u+z''v+w)-\rho^2(t^2+u^2+v^2) = 0. \qquad (2)$$

Es folgt diess, indem wir zugleich berücksichtigen, dass diese Gleichung die nothwendigen sieben unabhängigen Constanten enthält, aus den oben erwähnten Bedingungs-Gleichungen und zugleich stellt sich in Folge der frühern Erörterungen heraus, dass alsdann die beiden Puncte (x', y', z') und (x'', y'', z''), welche durch die folgenden beiden Gleichungen dargestellt werden:

$$x't+y'u+z'v+w = 0,$$
$$x''t+y''u+z''v+w = 0,$$

zwei Brennpuncte der Fläche sind, und dass ρ den Radius des Aequators bedeutet. Uebersetzen wir hiernach die Gleichung (2) in die Sprache der Geometrie, so ergibt sich, indem wir erwägen, dass durch die Ausdrücke

$$\frac{x't+y'u+z'v+w}{\sqrt{(t^2+u^2+v^2)}}, \qquad \frac{x''t+y''u+z''v+w}{\sqrt{(t^2+u^2+v^2)}}$$

die von den beiden Puncten (x', y', z') und (x'', y'', z'') auf irgend eine beliebige Ebene (t, u, v, w) der Fläche gefällten Perpendikel gegeben sind, der Satz, dass das Product der von den beiden auf der Rotations-Axe liegenden Brennpuncte auf beliebige Ebenen einer gegebenen Rotations-Fläche gefällten Perpendikel dem Quadrate des Radius des Aequators gleich ist. Die beiden Brennpuncte können reell und imaginär sein, im erstern Falle ist die Fläche, wenn sie überhaupt reell ist, ein verlängertes Sphäroid oder ein zweischaliges Hyperboloid, im zweiten Falle ein abgeplattetes Sphäroid oder ein einschaliges Hyperboloid. Andrerseits ergibt sich dieser Satz unmittelbar aus dem entsprechenden Satze der ebenen Geometrie, dass das Product der beiden von den Brennpuncten einer Axe einer gegebenen Ellipse oder Hyperbel auf beliebige Tangenten derselben gefällten Perpendikel constant und dem Quadrate der halben andern Axe gleich ist. Denn dreht sich eine solche Curve um jene Axe, so sind die auf ihr liegenden Brennpuncte auch Brennpuncte der Fläche, welche durch diese Umdrehung entsteht, und die von diesen Puncten auf die Ebenen der Fläche gefällten Perpendikel sind zugleich Perpendikel, gefällt auf Tangenten der Meridian-Curven. Von dem fraglichen Satze als bekannt ausgehend, können wir, umgekehrt, indem wir die ersten Theile der beiden obigen Gleichungen (1) und (2) identisch setzen, die Bedingungen entwickeln, unter welchen, die erste dieser Gleichungen eine Umdrehungs-Fläche darstellt. Der Fall des Paraboloids, das durch die Gleichungs-Form (2) sich nicht ausdrücken lässt, weil die Coordinaten eines Brennpunctes, so wie die zweite Axe unendlich gross werden, wollen wir hierbei einstweilen noch ausschliessen und später besonders betrachten.

183. Die Identität der beiden ersten Theile der Gleichungen (1) und (2) führt zu den nachstehenden neun Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} x'x''-\rho^2 = A, & x'y''+x''y' = 2B'', & x'+x'' = 2C, \\ y'y''-\rho^2 = A', \ (3) & x'z''+x''z' = 2B', \ (4) & y'+y'' = 2C', \ (5) \\ z'z''-\rho^2 = A''; & y'z''+y''z' = 2B; & z'+z'' = 2C''. \end{array}$$

Diese neun Gleichungen sind hinreichend zur Bestimmung der drei Coordinaten jedes der beiden Brennpuncte und des Coefficienten ρ, so wie auch der beiden Bedingungs-Gleichungen, welche befriedigt werden müssen, damit die Fläche (1) eine Rotations-Fläche sei. Der Kürze wegen, wollen wir die drei Projectionen der halben Brennweite auf die drei Coordinaten-Axen durch ε, ε' und ε'' bezeichnen, wonach

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(x'-x''), \qquad \varepsilon' = \tfrac{1}{2}(y'-y''), \qquad \varepsilon'' = \tfrac{1}{2}(z'-z'').$$

Dann finden wir:

$$\Psi_{32} \equiv B''-CC' = -\varepsilon\varepsilon', \quad \Psi_{31} \equiv B'-CC'' = -\varepsilon\varepsilon'', \quad \Psi_{30} \equiv B-C'C'' = -\varepsilon'\varepsilon'',$$

und hieraus

$$\varepsilon^2 = -\frac{\Psi_{32}\Psi_{31}}{\Psi_{30}}, \qquad \varepsilon'^2 = -\frac{\Psi_{32}\Psi_{30}}{\Psi_{31}}, \qquad \varepsilon''^2 = -\frac{\Psi_{31}\Psi_{30}}{\Psi_{32}}. \tag{6}$$

Ferner kommt:

$$Y \equiv A-C^2 = -\varepsilon^2-\rho^2, \quad Y_1 \equiv A'-C'^2 = -\varepsilon'^2-\rho^2, \quad Y_2 \equiv A''-C''^2 = -\varepsilon''^2-\rho^2, \tag{7}$$

mithin

$$\rho^2 = \frac{\Psi_{32}\Psi_{31}}{\Psi_{30}} - Y = \frac{\Psi_{32}\Psi_{30}}{\Psi_{31}} - Y_1 = \frac{\Psi_{31}\Psi_{30}}{\Psi_{32}} - Y_2. \tag{8}$$

Diese Doppel-Gleichung enthält die beiden gesuchten Bedingungen und gibt zugleich das Quadrat des Radius des Aequators.

Bezeichnen wir die halbe Brennweite selbst durch e, so kommt:

$$e^2 = \varepsilon^2+\varepsilon'^2+\varepsilon''^2. \tag{9}$$

Das Zeichen von e^2, so wie von ε^2, ε'^2 und ε''^2 hängt gleichmässig davon ab, ob

$$\Psi_{32}\Psi_{31}\Psi_{30} = -(\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'')^2$$

negativ oder positiv ist. Im ersten Falle sind die auf der Umdrehungs-Axe liegenden Brennpuncte reell, im zweiten imaginär.

Das Quadrat der halben Rotations-Axe, die wir r nennen wollen, ist

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2+e^2 \\ &= -\left(Y+\frac{\Psi_{32}\Psi_{30}}{\Psi_{31}}+\frac{\Psi_{31}\Psi_{30}}{\Psi_{32}}\right) = -\left(Y_1+\frac{\Psi_{32}\Psi_{31}}{\Psi_{30}}+\frac{\Psi_{31}\Psi_{30}}{\Psi_{32}}\right) \\ &= -\left(Y_2+\frac{\Psi_{32}\Psi_{31}}{\Psi_{30}}+\frac{\Psi_{32}\Psi_{30}}{\Psi_{31}}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Die Coordinaten des Mittelpunctes sind, wie überhaupt, C, C' und C'', die Coordinaten der beiden Brennpuncte:

$$x'''=C\pm\sqrt{-\frac{\Psi_{32}\Psi_{31}}{\Psi_{30}}}, \quad y'''=C'\pm\sqrt{-\frac{\Psi_{32}\Psi_{30}}{\Psi_{31}}}, \quad z'''=C''\pm\sqrt{-\frac{\Psi_{31}\Psi_{30}}{\Psi_{32}}}. \tag{11}$$

Für die Doppel-Gleichung der Rotations-Axe ergibt sich

$$\frac{x-C}{\varepsilon} = \frac{y-C'}{\varepsilon'} = \frac{z-C''}{\varepsilon''},$$

oder

$$\Psi_{30}(x-C) = \Psi_{31}(y-C') = \Psi_{32}(z-C''). \tag{12}$$

184. Wenn die durch (1) dargestellte Fläche insbesondere eine Kugel sein soll, so müssen damit e, und also auch ε, ε' und ε'' verschwinden, gleichzeitig die folgenden fünf Bedingungs-Gleichungen bestehen:

$$\Psi_{32} = \Psi_{31} = \Psi_{30} = 0, \qquad Y_2 = Y_1 = Y = -\rho^2,$$

wobei ρ der Radius der Kugel ist. Die beiden Puncte (x', y', z') und (x'', y'', z'') fallen in den Mittelpunct zusammen. Die Gleichungs-Form (2) geht demnach in die folgende über:

$$(x't+y'u+z'v+1)^2 - \rho^2(t^2+u^2+v^2) = 0. \tag{13}$$

Noch zwei besondere Fälle sind hier zu unterscheiden. Wir können erstens zwei gegebene (reelle oder imaginäre) Puncte, die in einer gegebenen Ebene liegen, um ihre Verbindungs-Linie sich drehen lassen, wonach alsdann dieselben beiden Puncte auch als eine Rotations-Fläche zweiter Classe sich darstellen; und zweitens können wir die beiden Puncte um ihre in der gegebenen Ebene liegende der Grösse nach verschwindende Axe sich drehen lassen, wo alsdann ein (reeller oder imaginärer) Kreis entsteht, dessen Ebene auf der Umdrehungs-Axe senkrecht steht und der ebenfalls als eine ausgeartete Rotations-Fläche zweiter Classe zu betrachten ist.

Wenn hiernach die allgemeine Gleichung (1) ein System von zwei Puncten darstellen soll, so kommt, weil alsdann ρ verschwinden muss

$$\frac{\Psi_{32}\Psi_{31}}{\Psi_{30}} - Y = \frac{\Psi_{32}\Psi_{30}}{\Psi_{31}} - Y_1 = \frac{\Psi_{31}\Psi_{30}}{\Psi_{32}} - Y_2 = 0, \qquad (14)$$

wonach die Anzahl der Constanten sich auf sechs reducirt. Nach den identischen Gleichungen VII der 10. Nummer, können wir die vorstehenden Bedingungs-Gleichungen auch folgendergestalt schreiben:

$$\Delta_{12} = 0, \qquad \Delta_{02} = 0, \qquad \Delta_{01} = 0,$$

oder nach IV aus denselben auch die folgenden ableiten:

$$\Theta_2 = 0, \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \Theta = 0,$$

wonach in Folge von IX auch

$$\Phi = 0.$$

Wenn die allgemeine Gleichung (1) einen Kreis darstellen soll, so muss die Rotations-Axe verschwinden, und demnach kommt

$$e^2 = -\rho^2,$$

wonach, je nachdem der Kreis reell oder imaginär ist, die beiden Brennpuncte, umgekehrt, imaginär oder reell sind, und, wenn wir entwickeln:

$$Y + \frac{\Psi_{32}\Psi_{30}}{\Psi_{31}} + \frac{\Psi_{31}\Psi_{30}}{\Psi_{32}} = Y_1 + \frac{\Psi_{32}\Psi_{31}}{\Psi_{30}} + \frac{\Psi_{31}\Psi_{30}}{\Psi_{32}} = Y_2 + \frac{\Psi_{32}\Psi_{31}}{\Psi_{30}} + \frac{\Psi_{32}\Psi_{30}}{\Psi_{31}} = 0. \qquad (15)$$

Die Zahl der Constanten reducirt sich hier ebenfalls auf sechs; von diesen kommen fünf auf die Bestimmung der Ebene des Kreises und des Mittelpunctes in derselben, während die sechste, ρ, der Radius ist. Für die Gleichung der Ebene des Kreises, die einerseits durch den Mittelpunct geht, und andrerseits auf der durch die Doppel-Gleichung (12) dargestellten Rotations-Axe senkrecht steht, ergibt sich sogleich die folgende:

$$\Psi_{30}(x-C) + \Psi_{31}(y-C') + \Psi_{32}(z-C'') = 0.^*) \qquad (16)$$

---

*) Wenn wir insbesondere den Mittelpunct des Kreises zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen, so nimmt zunächst die Gleichung desselben die folgende Form an:

$$At^2 + A'u^2 + A''v^2 + 2B''tu + 2B'tv + 2Buv = w^2,$$

und kann in Gemässheit der Bedingungs-Gleichungen (15), welche hier in die folgenden sich vereinfachen:

$$A = \frac{B'B}{B''} + \frac{B''B}{B'}, \qquad A' = \frac{B'B}{B''} + \frac{B''B'}{B}, \qquad A'' = \frac{B''B}{B'} + \frac{B''B'}{B},$$

auch auf die nachstehende Weise geschrieben werden:

185. Die beiden Bedingungs-Gleichungen, welche ausdrücken, dass überhaupt eine Fläche der zweiten Classe eine Rotations-Fläche ist, werden unmöglich, wenn ein einziger der drei Ausdrücke Ψ_{32}, Ψ_{31} nnd Ψ_{30} verschwindet, dann aber wieder möglich, wenn zugleich noch ein zweiter derselben Null wird. Lassen wir demnach die beiden letzten dieser drei Ausdrücke verschwinden, so folgt aus (8)

$$\begin{aligned} \rho^2 &= -Y_2, \\ (Y_2-Y)(Y_2-Y_1)-(\Psi_{32})^2 &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Die erste dieser beiden Gleichungen gibt den Radius des Aequators, die zweite ist die einzige Bedingungs-Gleichung, die befriedigt werden muss, wenn die Fläche eine Rotations-Fläche sein soll. Aus (7) folgt

$$\varepsilon'' = 0, \qquad \varepsilon'^2 = Y_2 - Y_1, \qquad \varepsilon^2 = Y_2 - Y,$$

woraus ersichtlich ist, dass die Rotations-Axe mit der Axe Z parallel ist. Dann kommt nach (9) und (10)

$$e^2 = 2Y_2 - Y_1 - Y, \tag{6}$$

$$r^2 = Y_2 - Y_1 - Y.^*) \tag{7}$$

186. Wenn die allgemeine Gleichung (1), dadurch, dass aus ihr w^2 ausfällt, in die folgende übergeht:

$$At^2 + A'u^2 + A''v^2 + 2B''tu + 2B'tv + 2Buv + 2Ctw + 2C'uw + 2C''vw = 0, \tag{18}$$

$$\left(\frac{1}{B'^2}+\frac{1}{B''^2}\right)t^2+\left(\frac{1}{B^2}+\frac{1}{B''^2}\right)u^2+\left(\frac{1}{B^2}+\frac{1}{B'^2}\right)v^2$$

$$+2\cdot\frac{1}{BB'}\cdot tu+2\cdot\frac{1}{BB''}\cdot tv+2\cdot\frac{1}{B'B''}\cdot uv=\frac{1}{BB'B''}\cdot w^2.$$

Wir können auch noch, der Kürze wegen,

$$\frac{1}{B}=a, \qquad \frac{1}{B'}=b, \qquad \frac{1}{B''}=c,$$

setzen, und erhalten alsdann für die Gleichung des Kreises:

$$(b^2+c^2)t^2+(a^2+c^2)u^2+(a^2+b^2)v^2+2abtu+2actv+2bcuv=abcw^2.$$

Hierbei ist der Radius des Kreises ϱ durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\rho^2 = A+\frac{B''B'}{B}=\frac{B''B'}{B}+\frac{B''B}{B'}+\frac{B'B}{B''},$$

$$=\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}=\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}.$$

*) Wenn wir, um der Gleichung (1) die allgemeinste Form zu geben, für das letzte Glied D statt Eins nehmen, so kommt das darauf hinaus, in den Entwicklungen der letzten Nummern

$$A,\ A',\ A'',\quad B,\ B',\ B'',\quad C,\ C,\ C'',$$

bezüglich mit

$$\frac{A}{D},\ \frac{A'}{D},\ \frac{A''}{D},\ \frac{B}{D},\ \frac{B'}{D},\ \frac{B''}{D},\ \frac{C}{D},\ \frac{C'}{D},\ \frac{C''}{D},$$

zu vertauschen.

so ist es nicht mehr möglich, sie auf die Form der Gleichung (2)

$$(x't+y'u+z'v+w)(x''t+y''u+z''v+w)-\rho^2(t^2+u^2+v^2)=0$$

zu bringen, sei es denn, dass wir ρ^2 und x'', y'', z'' (oder, statt der drei letzten Constanten, auch x', y', z') unendlich gross nehmen. In dem Falle eines Rotations-Paraboloids liegt ein Brennpunct unendlich weit und der Radius des Aequators wird unendlich gross. Die vorstehende Gleichung geht, wenn wir durch

$$\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}\equiv 2r$$

dividiren und der Kürze wegen

$$\frac{x''}{2r}\equiv\alpha,\quad \frac{y''}{2r}\equiv\beta,\quad \frac{z''}{2r}\equiv\gamma,\quad \frac{\rho^2}{r}\equiv p$$

setzen, mit Vernachlässigung von $\frac{1}{r}$ in die folgende über:

$$(x't+y'u+z'v+w)(\alpha t+\beta u+\gamma v)-\tfrac{1}{2}p(t^2+u^2+v^2)=0. \qquad (19)$$

Es bedeutet hierbei $2r$ den Abstand des immer weiter fortgerückten Brennpunctes (x'', y'', z'') vom Anfangspuncte der Coordinaten, oder auch die Länge der Umdrehungs-Axe, p den halben Parameter. Setzen wir ferner

$$\frac{x't+y'u+z'v+w}{\sqrt{t^2+u^2+v^2}}\equiv\delta,$$

$$\frac{t}{\sqrt{t^2+u^2+v^2}}\equiv\cos\eta,\quad \frac{u}{\sqrt{t^2+u^2+v^2}}\equiv\cos\eta',\quad \frac{v}{\sqrt{t^2+u^2+v^2}}\equiv\cos\eta'',$$

$$\alpha\equiv\cos\vartheta,\qquad \beta\equiv\cos\vartheta',\qquad \gamma\equiv\cos\vartheta'',$$

$$\cos\vartheta\cos\eta+\cos\vartheta'\cos\eta'+\cos\vartheta''\cos\eta''\equiv\cos\zeta,$$

so ist δ die Länge des vom Brennpuncte (x', y', z') auf eine beliebige Tangential-Ebene der Fläche (t, u, v, w) gefällten Perpendikels; η, η' und η'' sind die drei Winkel, die dieses Perpendikel, und ϑ, ϑ' und ϑ'' die drei Winkel, die die Rotations-Axe der Fläche mit den drei Coordinaten-Axen bildet. Es folgt hieraus, dass ζ der von der Rotations-Axe und dem fraglichen Perpendikel gebildete Winkel ist. Die Gleichung der Fläche kann die folgende Form annehmen:

$$\delta\cos\zeta=\tfrac{1}{2}p,$$

und drückt aus, dass der Brennpunct eines Rotations-Paraboloids, wenn wir ihn zuerst auf eine beliebige Tangential-Ebene und von dieser Ebene auf die Rotations-Axe projiciren, mit dem Scheitel der Fläche zusammenfällt.

Die Identität der ersten Theile der beiden Gleichungen (18) und (19) gibt die folgenden neun Bedingungs-Gleichungen

$$\begin{array}{lll} \alpha x'-\tfrac{1}{2}p=A, & \alpha y'+\beta x'=2B'', & \alpha=2C, \\ \beta x'-\tfrac{1}{2}p=A', \quad (20) & \alpha z'+\gamma x'=2B', \quad (21) & \beta=2C', \quad (22) \\ \gamma x'-\tfrac{1}{2}p=A''; & \beta z'+\gamma y'=2B; & \gamma=2C''. \end{array}$$

In Folge der Gleichungen (22) gehen die Gleichungen (20) und (21) in die nachstehenden über

$$\begin{array}{ll} 2Cx'-\tfrac{1}{2}p=A, & Cy'+C'x'=B'', \\ 2C'y'-\tfrac{1}{2}p=A', \quad (23) & Cz'+C''x'=B', \quad (24) \\ 2C''z'-\tfrac{1}{2}p=A'', & C'z'+C''y'=B. \end{array}$$

Die letzten drei dieser neuen Gleichungen geben zur Bestimmung der Coordinaten des Brennpunctes:

$$x' = \frac{C''B'' + C'B' - CB}{2C'C''}, \quad y' = \frac{C''B'' + CB - C'B'}{2CC''}, \quad z' = \frac{C'B' + CB - C''B''}{2CC'}, \tag{25}$$

und wenn wir diese Werthe in die drei ersten dieser Gleichungen einsetzen und $\frac{1}{2}p$ eliminiren: für die Doppel-Bedingung, dass das Paraboloid eine Rotationsfläche sei:

$$C^2(C''B'' + C'B' - CB) - ACC'C'' = C'^2(C''B'' + CB - C'B') - A'CC'C''$$
$$= C''^2(C'B' + CB - C''B'') - A''CC'C''. \tag{26}$$

Die Gleichungen (22) geben zur Bestimmung der Axen-Richtung:

$$Ct + C'u + C''v = 0,$$

oder in Punct-Coordinaten die Gleichungen

$$\frac{x}{C} = \frac{y}{C'} = \frac{z}{C''},$$

wonach

$$\cos\vartheta = \frac{C}{\sqrt{C^2 + C'^2 + C''^2}}, \quad \cos\vartheta' = \frac{C'}{\sqrt{C^2 + C'^2 + C''^2}}, \quad \cos\vartheta'' = \frac{C''}{\sqrt{C^2 + C'^2 + C''^2}}.$$

Die ursprüngliche Gleichung (18) enthält eine überzählige Constante; nicht diese Constanten selbst, sondern nur die Quotienten je zweier derselben erhalten bestimmte Werthe, wenn die Fläche gegeben ist. Die obigen Werthe der Brennpuncts-Coordinaten sind hiernach vollkommen bestimmt, nicht aber α, β, γ und p, sondern wiederum nur die Quotienten je zweier dieser Grössen. Sollen sie die obige Bedeutung haben, so müssen wir, was von Vorne herein immer gestattet ist,

$$4(C^2 + C'^2 + C''^2) = 1$$

setzen, oder, wenn wir diese Beschränkung nicht wollen, zum Behuf der Bestimmung von $\frac{1}{2}p$ in der obigen Bedeutung für α, β und γ die vorstehenden Werthe von $\cos\vartheta$, $\cos\vartheta'$ und $\cos\vartheta''$ in die Gleichungen (20) einsetzen. Dann kommt

$$\tfrac{1}{2}p = \left(x' - \frac{A}{2C}\right)\cos\vartheta = \left(y' - \frac{A'}{2C'}\right)\cos\vartheta' = \left(z' - \frac{A''}{2C''}\right)\cos\vartheta''.$$

187. In dem allgemeinen Falle der Rotations-Flächen zweiter Classe geben, wenn die beiden Brennpuncte reell sind und wir den Anfangspunct der Coordinaten in dem einen dieser Brennpuncte (x', y', z') annehmen, die Gleichungen (3) und (4) der 183. Nummer

$$A = A' = A'' = \rho^2,$$
$$B'' = B' = B = 0,$$

wonach die allgemeine Gleichung (1) sich auch auf folgende Form bringen lässt:

$$\left(\frac{t}{w} - \lambda\right)^2 + \left(\frac{u}{w} - \mu\right)^2 + \left(\frac{v}{w} - \nu\right)^2 = \varkappa^2, \tag{27}$$

indem wir der Kürze wegen

$$-\frac{C}{A} \equiv \lambda, \qquad -\frac{C'}{A} \equiv \mu, \qquad -\frac{C''}{A} \equiv \nu,$$
$$\frac{C^2 + C'^2 + C''^2 - AD}{A^2} \equiv \varkappa^2$$

setzen. Ebenso geben für den Fall des Rotations-Paraboloids die Gleichungen (20) und (21):

$$A = A' = A'' = \tfrac{1}{2}p,$$
$$B'' = B' = B = 0,$$

wonach die Gleichungs-Form (27) auch hier unverändert fortbesteht, und nur in dem Werthe von x^2 die Constante D verschwindet.

188. Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, die Bedingungen zu entwickeln, unter welchen ein Kegel, der, in dem Systeme der Plan-Coordinaten, durch ein System von zwei Gleichungen des ersten und zweiten Grades ausgedrückt wird, ein Rotations-Kegel ist: eine Aufgabe, die wir auch so auffassen können, dass wir nach der Bestimmung der Rotations-Kegel fragen, die einer gegebenen Fläche zweiter Classe sich umschreiben lassen.

Wir können einen Rotations-Kegel im Allgemeinen dadurch definiren, dass wir ihn als einen solchen Kegel betrachten, der einer Kugel umschrieben ist. Wenn sich hiernach einer gegebenen Fläche zweiter Classe und einer gegebenen Kugel gleichzeitig ein Kegel zweiter Ordnung umschreiben lässt, so ist derselbe ein Rotations-Kegel. Lässt sich aber überhaupt zweien Flächen zweiter Classe ein Kegel umschreiben, so lässt sich ihr auch noch ein zweiter Kegel umschreiben, und das System der Mittelpuncte solcher zwei Kegel wird alsdann durch eine Gleichung ausgedrückt, die eine algebraische Folge aus den Gleichungen der beiden Flächen ist (265).

Indem wir die Axen der gegebenen Fläche zu Coordinaten-Axen nehmen, sei

$$At^2+A'u^2+A''v^2 = w^2 \qquad (1)$$

die Gleichung dieser Fläche und

$$(x_{,}t+y_{,}u+z_{,}v+w)^2-r^2(t^2+u^2+v^2) = 0 \qquad (2)$$

die Gleichung irgend einer, noch näher zu bestimmenden Kugel, der sich zugleich mit der gegebenen Fläche zwei Kegel zweiter Ordnung umschreiben lassen, wobei wir durch $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ die Coordinaten des Mittelpunctes und durch r den Radius dieser Kugel bezeichnen. Es seien ferner (x', y', z') und (x'', y'', z'') die Mittelpuncte der beiden umschriebenen Kegel und folglich

$$\begin{aligned} x't+y'u+z'v+w &= 0, \\ x''t+y''u+z''v+w &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

die Gleichungen dieser Mittelpuncte. Dann besteht also, in Gemässheit der vorstehenden Bemerkung, die folgende identische Gleichung:

$$\lambda\{At^2+A'u^2+A''v^2-w^2\}-\mu\{(x_{,}t+y_{,}u+z_{,}v+w)^2-r^2(t^2+u^2+v^2)\}$$
$$\equiv (x't+y'u+z'v+w)(x''t+y''u+z''v+w), \qquad \text{I.}$$

wobei zwischen den beiden unbestimmten Coefficienten λ und μ die folgende Relation Statt findet:

$$\lambda+\mu = -1. \qquad (4)$$

Aus der Form dieser identischen Gleichung erhalten wir, auch ohne in eine algebraische Discussion derselben einzugehen, die vollständige Bestimmung der umschriebenen Rotations-Kegel und ihre Beziehungen zur gegebenen Fläche.

189. Dieselbe identische Gleichung I. können wir auch folgendergestalt schreiben:

$$\lambda(At^2+A'u^2+A''v^2-w)^2+\mu r^2(t^2+u^2+v^2)$$
$$\equiv (x't+y'u+z'v+w)(x''t+y''u+z''v+w)+\mu(x_{,}t+y_{,}u+z_{,}v+w)^2, \qquad \text{II.}$$

so dass auch die beiden Gleichungen

$$\lambda(At^2+A'u^2+A''v^2-w)^2+\mu r^2(t^2+u^2+v^2) = 0, \qquad (5)$$

$$(x't+y'u+z'v+w)(x''t+y''u+z''v+w)+\mu(x_,t+y_,u+z_,v+w)^2 = 0 \qquad (6)$$

dieselbe Fläche zweiter Classe darstellen. Die Form der zweiten dieser Gleichungen, welche als eine homogene zwischen drei linearen Functionen von t, u, v und w unmittelbar sich darstellt, zeigt, dass diese Fläche in eine ebene Curve ausgeartet ist, welche in der Ebene der drei Puncte (x', y', z'), (x'', y'', z'') und $(x_,, y_,, z_,)$ liegt. Die erste Gleichung (5) kann aber nur dann eine ebene Curve darstellen, wenn durch eine schickliche Annahme der unbestimmten Coefficienten λ, μ und r^2 eine der drei Veränderlichen t, u, v ausfällt. Diess fordert, dass eine der folgenden drei Bedingungs-Gleichungen:

$$\lambda A''+\mu r^2 = 0, \quad \lambda A'+\mu r^2 = 0, \quad \lambda A+\mu r^2 = 0, \qquad (7)$$

befriedigt werde, wonach die Gleichung (5) in eine der folgenden drei übergeht:

$$\begin{aligned} (A-A'')t^2+(A'-A'')u^2 &= w^2, \\ (A-A')t^2+(A''-A')v^2 &= w^2, \\ (A'-A)u^2+(A''-A)v^2 &= w^2. \end{aligned} \qquad (8)$$

Die fragliche Curve kann hiernach eine dreifache sein und in jedem der drei Hauptschnitte der gegebenen Fläche liegen. Damit sie in einem dieser drei Hauptschnitte liege, müssen nothwendig z', z'' und $z_,$ oder y', y'' und $y_,$ oder x', x'' und $x_,$ verschwinden und die einzige identische Gleichung II. löset sich hiernach in die folgenden drei, von denen eine Statt finden muss, auf:

$$\begin{aligned} \lambda\{(A-A'')t^2+(A'-A'')u^2-w^2\} &\equiv (x't+y'u+w)(x''t+y''u+w)+\mu(x_,t+y_,u+w)^2, \\ \lambda\{(A-A')t^2+(A''-A')v^2-w^2\} &\equiv (y't+z'v+w)(x''t+z''v+w)+\mu(x_,t+y_,v+w^2), \\ \lambda\{(A'-A)u^2+(A''-A)v^2-w^2\} &\equiv (y't+z'v+w)(y''t+z''v+w)+\mu(y_,t+z_,v+w)^2. \end{aligned} \qquad (9)$$

Betrachten wir insbesondere die erste der drei Curven (8), welche in der Ebene XY liegt und die wir auch, in Gemässheit der ersten der vorstehenden drei identischen Gleichungen, durch die folgende Gleichung darstellen können:

$$(x't+y'u+w)(x''t+y''u+w)+\mu(t+y_,u+w)^2 = 0, \qquad (10)$$

so folgt unmittelbar aus der Form dieser Gleichung, dass die Puncte

$$\begin{aligned} x't+y'u+w &= 0, \\ x''t+y''u+w &= 0 \end{aligned} \qquad (11)$$

auf dem Umfange der Curve liegen und der Punct

$$x_,t+y_,u+w = 0 \qquad (12)$$

der Pol derjenigen geraden Linie ist, welche jene beiden Puncte verbindet. Diejenigen beiden geraden Linien also, welche die beiden Puncte (11), nemlich die Mittelpuncte der beiden umschriebenen Rotations-Kegel mit dem Puncte (12), dem Mitelpuncte der Kugel, verbinden, oder, mit andern Worten, die Axen der beiden Kegel, sind Tangenten der fraglichen Curve und die Mittelpuncte der beiden Rotations-Kegel die Berührungspuncte auf ihnen. Ein und dieselbe Curve aber lässt sich unendlich oft durch eine Gleichung von derselben Form (10) darstellen; wir brauchen den Coordinaten x', y' und x'' und y'' nur andere Werthe beizulegen, die irgend zweien andern Puncten der Curve angehören und für $x_,$, $y_,$ alsdann diejenigen Coordinaten-Werthe einzusetzen, die dem Durchschnitte der Tangenten in diesen beiden Puncten entsprechen. Es ist die fragliche Curve also der geometrische Ort in der Ebene XY für die Mittelpuncte aller der gegebenen Fläche umschriebenen Rotations-Kegel und zugleich derjenige Ort, welcher von den Axen aller dieser Rotations-Kegel umhüllt wird.

190. Die durch die Gleichungen (8) dargestellten Curven heissen die Focal-Curven der gegebenen Fläche zweiter Classe. Sie sind reelle oder imaginäre Kegelschnitte, welche in den drei Hauptschnitten dieser Fläche liegen, mit deren Mittelpunct ihr gemeinschaftlicher Mittelpunct zusammenfällt. Ihre beiden Axen haben dieselbe Richtung als die beiden Axen der Durchschnitts-Curve in den entsprechenden Hauptschnitten; die Quadrate der Hälften jener Axen sind gleich den Quadraten der Hälften von diesen, vermindert um das Quadrat der jedesmaligen dritten Halb-Axe der gegebenen Fläche. Insbesondere folgt hieraus, dass die Differenz der beiden Halb-Axen-Quadrate der Focal-Curve und der Durchschnitts-Curve der Fläche in jedem der drei Hauptschnitte dieselbe ist, und beide Curven also gemeinschaftliche Brennpuncte haben und demzufolge, wenn sie von verschiedener Art sind, sich rechtwinklig schneiden.

Wir wollen, bevor wir unsere Entwickelungen weiter fortführen, zunächst, für die verschiedenen Arten von Flächen zweiter Classe mit einem Mittelpuncte, in eine nähere Bestimmung der Focal-Curven eingehen.

Wir wollen erstens ein Ellipsoid für die gegebene Fläche zweiter Classe (1) nehmen, und dieselbe in der Voraussetzung, dass

$$\alpha^2 > \beta^2 > \gamma^2,$$

in den beiden Systemen der Plan- und Punct-Coordinaten durch die folgenden beiden Gleichungen darstellen

$$\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2 + \gamma^2 v^2 = w^2, \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1.$$

Die erste der drei Focal-Curven (8) ist eine Ellipse, die im Systeme der Plan-Coordinaten durch die Gleichung

$$(\alpha^2 - \gamma^2) t^2 + (\beta^2 - \gamma) u^2 = w^2,$$

und im Systeme der Punct-Coordinaten durch die beiden Gleichungen

$$z = 0, \qquad \frac{x^2}{\alpha^2 - \gamma^2} + \frac{y^2}{\beta^2 - \gamma^2} = 1$$

dargestellt wird. Sie liegt in der Ebene der beiden grössten Axen des Ellipsoids ganz innerhalb desselben, so dass die Rotations-Kegel, für deren Mittelpuncte sie der geometrische Ort ist, alle imaginär sind.

Die zweite der drei Focal-Curven ist eine Hyperbel, die im Systeme der Plan-Coordinaten durch die Gleichung

$$(\alpha^2 - \beta^2) t^2 - (\beta^2 - \gamma^2) v^2 = w^2,$$

und im Systeme der Punct-Coordinaten durch die beiden Gleichungen:

$$y = 0, \qquad \frac{x^2}{\alpha^2 - \gamma^2} - \frac{z^2}{\beta^2 - \gamma^2} = 1,$$

dargestellt wird. Sie liegt in der Ebene der grössten und kleinsten Axe des Ellipsoids und schneidet die Durchschnitts-Ellipse in dieser Ebene in vier reellen Puncten: den vier reellen Kreispuncten der Fläche. Die Gleichungen der Durchschnitts-Ellipse sind nemlich

$$y = 0, \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,$$

und wenn wir die zweite derselben von der zweiten der vorstehenden beiden Gleichungen abziehen und reduciren, so kommt:

$$(\beta^2-\gamma^2)\frac{x^2}{\alpha^2}-(\alpha^2-\beta^2)\frac{z^2}{\gamma^2}=0:$$

eine Gleichung, die mit den Gleichungen (15) der 141. Nummer übereinstimmt und diejenigen beiden Durchmesser darstellt, welche durch die vier reellen Kreispuncte des Ellipsoids gehen. Jeder Punct der fraglichen Focal-Hyperbel ist der Mittelpunct eines dem gegebenen Ellipsoid umschriebenen Rotations-Kegels; dieser Kegel ist offenbar dann nur reell, wenn als Mittelpunct desselben ein Punct auf dem ausserhalb der Durchschnitts-Ellipse liegenden Theile der Hyperbel angenommen wird, sonst imaginär. Die Tangential-Ebenen in den vier reellen Kreispuncten bilden den Uebergang von reellen zu imaginären Rotations-Kegeln. Rückt der Mittelpunct auf der Focal-Hyperbel unendlich weit, so artet der Kegel in einen Cylinder aus: die beiden Asymptoten dieser Curve sind die Axen der beiden reellen Rotations-Cylinder, die sich dem gegebenen Ellipsoid umschreiben lassen.

Die Focal-Curve in der Ebene der beiden kleinsten Axen des gegebenen Ellipsoids ist imaginär.

Wir wollen zweitens ein zweischaliges Hyperboloid, das in der zwiefachen Coordinaten-Bestimmung durch die folgenden beiden Gleichungen

$$\alpha^2 t^2-\beta_,^2 u^2-\gamma_,^2 v^2=w^2,\quad \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta_,^2}-\frac{z^2}{\gamma_,^2}=1$$

dargestellt wird, betrachten und dabei die Voraussetzung machen, dass

$$\gamma_,^2>\beta_,^2.$$

Die erste in der Ebene der reellen Axe und der kleinern Neben-Axe der gegebenen Fläche liegende Focal-Curve ist alsdann die durch folgende Gleichung dargestellte Ellipse:

$$(\alpha^2+\gamma_,^2)t^2+(\gamma_,^2-\beta_,^2)u^2=w^2;$$

die Durchschnitts-Curve in derselben Ebene, die durch folgende Gleichung dargestellte Hyperbel:

$$\alpha^2 t-\beta_,^2 u^2=w^2.$$

Die Richtungen der grössern Axe der Ellipse und der reellen Axe der Hyperbel fallen in die Axe X zusammen, und auf ihnen die reellen Brennpuncte der beiden Curven. Die Durchschnittspuncte sind hiernach reell und keine andern, als die vier reellen Kreispuncte der Fläche. Durch diese vier Puncte und die vier Durchschnittspuncte mit den beiden Asymptoten der Durchschnitts-Hyperbel wird die Focal-Ellipse in acht Bogen getheilt. Zwei dieser Bogen liegen zwischen zwei Kreispuncten (innerhalb der Hyperbel): die entsprechenden Kegel sind imaginär; zwei Bogen zwischen den beiden Asymptoten: die entsprechenden Kegel berühren beide Schalen zugleich und die Berührungs-Curve ist eine Hyperbel; vier Bogen endlich liegen zwischen einer Asymptote und einem Kreispuncte: die entsprechenden Kegel berühren nur eine einzige der beiden Schalen des Hyperboloids und die Berührungs-Curve ist eine Ellipse. Es gibt keinen umschriebenen Rotations-Cylinder.

Die zweite der drei Focal-Curven (8) liegt in der Ebene der reellen Axe und der grössern Neben-Axe. Sie wird durch die folgende Gleichung dargestellt:

$$(\alpha^2+\beta_,^2)t^2-(\gamma_,^2-\beta_,^2)v^2=w^2,$$

während die Gleichung der Durchschnitts-Curve in derselben Ebene die folgende ist:

$$\alpha^2 t^2-\gamma_,^2 v^2=w^2.$$

Beide Curven sind Hyperbeln, von welchen die erste, die Focal-Hyperbel, weil ihre reelle Axe

grösser, ihre Neben-Axe kleiner ist, ganz innerhalb der zweiten liegt. Die entsprechenden Rotations-Kegel sind also sämmtlich imaginär.

Die Focal-Curve in der Ebene der beiden Neben-Axen ist imaginär.

Es seien drittens

$$\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2 - \gamma_,^2 v^2 = w^2, \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma_,^2} = 1,$$

die Gleichungen eines gegebenen einschaligen Hyperboloids in den beiden Coordinaten-Systemen, wobei wir voraussetzen wollen, dass

$$\alpha^2 > \beta^2.$$

Die erste Focal-Curve, welche in der Ebene der beiden reellen Axen liegt, ist eine Ellipse und ihre Gleichung:

$$(\alpha^2 + \gamma_,^2) t^2 + (\beta^2 + \gamma_,^2) u^2 = w^2.$$

Die Durchschnitts-Curve in derselben Ebene, deren Gleichung:

$$\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2 = w^2,$$

ist ebenfalls eine Ellipse, die ganz innerhalb der erstern liegt. Von jedem Puncte der Focal-Ellipse lassen sich an die Durchschnitts-Ellipse und also auch an die Fläche selbst Tangenten legen, wonach die entsprechenden Kegel sämmtlich reell sind.

Die zweite Focal-Curve, welche in der Ebene der grössern reellen Axe und der Neben-Axe liegt, ist eine Hyperbel und ihre Gleichung:

$$(\alpha^2 - \beta^2) t^2 - (\beta^2 + \gamma_,^2) v^2 = w^2.$$

Die Durchschnitts-Curve in derselben Ebene ist eine Hyperbel, deren Gleichung:

$$\alpha^2 t^2 - \gamma_,^2 v^2 = w^2.$$

Die erste Hyperbel, die Focal-Hyperbel, liegt ganz ausserhalb der zweiten, weil ihre reelle Axe kleiner, ihre Neben-Axe grösser ist. Jedem Puncte derselben entspricht also ein reeller Rotations-Kegel, ihre beiden Asymptoten sind die Axen der beiden umschriebenen Rotations-Cylinder.

Die dritte Focal-Curve ist imaginär.

191. In jedem der drei bisher betrachteten Fälle ergeben sich für die drei Focal-Curven eine Ellipse, eine Hyperbel und eine imaginäre Curve. Die letztere liegt immer in der Ebene derjenigen beiden Axen der gegebenen Fläche, deren Quadrate (im algebraischen Sinne des Wortes) die kleinsten sind. Die Focal-Ellipse und die Focal-Hyperbel liegen in zwei auf einander senkrechten Ebenen, in deren Durchschnitts-Linie diejenige Axe der Fläche fällt, deren Quadrat das grösseste ist, so wie die grössere Axe der Ellipse und die reelle Axe der Hyperbel. In der Voraussetzung, dass

$$A > A' > A'',$$

stellt von den folgenden beiden Gleichungen:

$$(A - A'') t^2 + (A' - A'') u^2 = w^2.$$
$$(A - A') t^2 + (A'' - A') v^2 = w^2,$$

die erste immer die Focal-Ellipse und die zweite immer die Focal-Hyperbel dar. Es ist einerseits $(A - A')$ das Quadrat des Abstandes der Brennpuncte der Ellipse vom Mittelpuncte derselben und zugleich das Quadrat der reellen Halb-Axe der Hyperbel, und andererseits $(A - A'')$ das Quadrat der halben grossen Axe der Ellipse und zugleich das Quadrat des Abstandes der Brennpuncte der Hyperbel vom Mittelpuncte derselben. Wir sehen hieraus, dass Ellipse und Hyperbel sich gegen-

seitig dadurch bestimmen, dass die Scheitel der grossen Axe der Ellipse die Brennpuncte der Hyperbel, und die Scheitel der reellen Axe der Hyperbel die Brennpuncte der Ellipse sind.

Setzen wir einmal A'', das andere Mal A' gleich Null (letzteres setzt in Folge der vorstehenden Bedingung voraus, dass A'' gleichzeitig negativ ist), so geht die Gleichung der gegebenen Fläche (1) in die Gleichung einer ebenen Curve über, die in der ersten Annahme eine Ellipse, in der zweiten eine Hyperbel ist. Die Gleichungen (8) behalten auch hier ihre Geltung. Also auch die ebene Curve hat ihre drei Focal-Curven, von welchen die, durch die dritte dieser Gleichungen dargestellte, wie in dem allgemeinen Falle, eine imaginäre ist. Eine der beiden ersten ist die gegebene Curve selbst, wonach im engern Sinne des Wortes nur noch eine Focal-Curve übrig bleibt, die je nachdem die gegebene Curve eine Ellipse oder Hyperbel, umgekehrt eine Hyperbel oder Ellipse ist. Die gegebene Curve und ihre Focal-Curve stehen also in derselben Beziehung zu einander, als die beiden ersten der Curven (8) und diese Beziehung ist eine gegenseitige. Wenn eine Ellipse gegeben ist, so ist der geometrische Ort für die Mittelpuncte derjenigen Rotations-Kegel, welche durch die gegebene Ellipse sich legen lassen, eine Hyperbel, deren Ebene auf der Ebene der Ellipse senkrecht steht, die Brennpuncte derselben zu ihren Scheiteln und die Scheitel der grossen Axe derselben zu ihren Brennpuncten hat. Andererseits ist der Ort für die Mittelpuncte derjenigen Rotations Kegel, welche durch diese Hyperbel sich legen lassen, die gegebene Ellipse.

Nach dem in der 189. Nummer gewonnenen allgemeinen Resultate ergibt sich hier also vollständig der folgende Satz.

Wenn eine Ellipse und eine Hyperbel gegeben sind, von welchen eine die Focal-Curve der andern ist, so ist ein Punct, den wir beliebig auf jeder der beiden Curven annehmen, der Mittelpunct einer Rotations-Kegelfläche, welche durch die jedesmalige andere Curve geht, und deren Axe die Tangente der erstgenannten Curve in dem beliebig angenommenen Puncte ist.

Wir können diesen Satz in eine andere geometrische Aussage einkleiden, wenn wir berücksichtigen, dass alle Seiten eines Rotations-Kegels mit der Axe desselben gleiche Winkel bilden. Nehmen wir hiernach auf der Hyperbel irgend einen Punct M willkührlich an und ziehen, von diesem Puncte aus, zwei gerade Linien (MN, MN′) nach zwei beliebigen Puncten (N und N′) der Ellipse, so bilden diese beiden geraden Linien gleiche Winkel mit der Tangente der Hyperbel im Puncte M. Wenn wir den Punct M willkührlich auf der Ellipse annehmen, und von demselben aus nach zwei beliebigen Puncten der Hyperbel (N und N′) zwei gerade Linien (MN und MN′) ziehen, so bilden, je nachdem die beiden Puncte (N und N′) demselben Hyperbel-Zweige oder beiden angehören, diese beiden geraden Linien selbst, oder eine derselben und die Verlängerung der andern, mit der Tangente der Ellipse in M gleiche Winkel. (Der Unterschied wird dadurch bedingt, dass in der zweiten Voraussetzung die beiden geraden Linien MN und MM′ nicht demselben der beiden in M zusammenstossenden Kegel angehören). Nennen wir also jeden Punct jeder der beiden eben betrachteten Kegelschnitte einen Focalpunct der andern, so erhalten wir den folgenden Satz.

Wenn wir von irgend zwei Focalpuncten einer gegebenen Hyperbel nach einem beliebigen Puncte derselben zwei gerade Linien ziehen, so bilden diese mit der Tangente der Hyperbel in dem beliebigen Puncte, oder, mit andern Worten, mit der Hyperbel selbst, gleiche Winkel.

Wenn wir von irgend zwei Focalpuncten einer gegebenen Ellipse nach einem beliebig auf derselben angenommenen Puncte zwei gerade Linien ziehen, so

bilden, je nachdem die beiden Focalpuncte auf demselben Zweige oder auf beiden Zweigen der Focal-Hyperbel liegen, diese beiden Linien selbst, oder eine derselben und die Verlängerung der andern mit der Ellipse in dem beliebig angenommenen Puncte gleiche Winkel.

Insbesondere können wir für die beiden Focalpuncte der Ellipse oder Hyperbel ihre beiden Brennpuncte nehmen und erhalten dann die allbekannten Spiegelungs-Sätze. In dem Falle der Ellipse gibt es zwei Focalpuncte, die nach bestimmter Richtung unendlich weit liegen; diese Richtung ist die Richtung der Axen derjenigen beiden Rotations-Cylinder, welche sich durch die Ellipse legen lassen. Nehmen wir hiernach beispielsweise einen der beiden Focalpuncte beliebig und insbesondere unendlich weit liegend und für den andern einen Brennpunct, so ergibt sich der folgende Satz.

Wenn wir einem Rotations-Kegel oder einem Rotations-Cylinder irgend eine beliebige Basis geben, so wird der Umfang dieser Basis in jedem seiner Puncte von der durch denselben gehenden Kegel- oder Cylinder-Seite unter denselben Winkeln geschnitten, als von derjenigen geraden Linie, welche den Punct auf dem Umfange der Basis mit einem der beiden Brennpuncte derselben verbindet.*)

192. Es ist nicht zu überschen, dass in der vorigen Nummer die Ellipse und Hyperbel als Curven zweiter Classe aus einer Fläche zweiter Classe durch das Verschwinden einer Axe derselben hervorgegangen sind und so aufgefasst können wir auch von Kreispuncten der genannten Curven sprechen. Nehmen wir für die allgemeine Bestimmung dieser Kreispuncte, dass sie diejenigen Puncte sind, in welchen die Fläche von ihren Focal-Curven geschnitten wird, so ist ersichtlich, wie diese Puncte, in den Fällen, dass die Fläche in eine Ellipse oder Hyperbel ausartet, paarweise in die beiden Brennpuncte dieser Curven zusammenfallen. Wir finden diess auch direct bestätigt, wenn wir in den Gleichungen (17) der 141. Nummer

$$x = \pm\alpha \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha^2-\gamma^2}, \qquad y = 0, \qquad z = \pm\gamma \cdot \frac{\sqrt{\beta^2-\gamma^2}}{\alpha^2-\gamma^2},$$

durch welche die Coordinaten der vier reellen Kreispuncte der Fläche

$$\alpha^2t^2+\beta^2u^2+\gamma^2v^2 = w^2$$

bestimmt sind, die Constante γ verschwinden lassen, wonach

$$x = \pm\sqrt{\alpha^2-\beta^2}, \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

---

*) Es gibt einen etwas allgemeinern Gesichtspunct für die Entwicklungen der letzten Nummern, der aber füglicher Weise hier noch keine Stelle finden kann. Ein Blick auf die Gleichungen der drei Focal-Curven zeigt, dass diese unverändert dieselben bleiben, wenn wir, an die Stelle der Gleichung (1) die folgende setzen:

$$(A-\delta)t^2+(A'-\delta)u^2+(A''-\delta)v^2 = w^2,$$

und hierbei durch δ eine durchaus beliebige Constante bezeichnen. Dann gehören, wenn wir, $\delta = 0$ entsprechend, von einem Ellipsoid ausgehen, und wie im Texte $A > A' > A''$ nehmen, in die Reihe der Flächen, $\delta = A''$, $\delta = A'$, $\delta = A$ entsprechend, insbesondere als Uebergang von Ellipsoiden zu einschaligen Hyperboloiden eine Ellipse, von einschaligen zu zweischaligen Hyperboloiden eine Hyperbel und endlich von zweischaligen Hyperboloiden zu imaginären Flächen eine imaginäre Curve. Letztere, zu welcher zwei reelle Focal-Curven gehören, haben wir im Texte nicht näher betrachtet.

Einstweilen verweisen wir hier noch auf *Dupin, Développements de Géométrie. Paris 1813.*

193. Wenn die gegebene Fläche eine Rotations-Fläche ist, so ergeben sich unmittelbar die nachstehenden Modificationen der bisherigen Resultate.

In dem Falle des verlängerten Sphäroids und des zweischaligen Rotations-Hyperboloids, wo

$$A'' = A' < A,$$

reduciren sich die beiden ersten Focal-Curven (8) auf das System der beiden Brennpuncte der Fläche, die dritte Focal-Curve ist ein imaginärer Kreis.

In dem Falle des abgeplatteten Sphäroids und des einschaligen Rotations-Hyperboloids, wo

$$A = A' > A'',$$

reducirt sich die erste der drei Focal-Curven auf den Focal-Kreis, den geometrischen Ort für die Brennpuncte der Meridian-Curven (136); die beiden andern reduciren sich auf die beiden imaginären Brennpuncte der Fläche.

194. Die Focal-Ellipse ist, wie wir gezeigt haben, für den Fall des Ellipsoids der geometrische Ort für die Mittelpuncte imaginärer Rotations-Kegel. Für den Fall des zweischaligen Hyperboloids schneidet dieselbe die Fläche in den vier reellen Kreispuncten; die Tangential-Ebenen in diesen Puncten bilden den Uebergang von reellen zu imaginären Kegeln; die reellen Kegel werden immer stumpfer, wenn ihr Mittelpunct den Kreispuncten näher rückt: es muss nothwendig Kegel geben, die die spitzesten sind. In dem Falle des einschaligen Hyperboloids, wo die Focal-Ellipse die Fläche nicht schneidet, muss es Kegel geben, die die spitzesten und Kegel, die die stumpfesten sind.

Der Winkel, den überhaupt zwei gegenüberliegende Seiten eines solchen umschriebenen Rotations-Kegels mit einander bilden, ist offenbar auch derjenige, unter welchem, von dem entsprechenden Mittelpuncte auf dem Umfange der Focal-Ellipse aus, die Durchschnitts-Curve der Fläche, die mit dieser Ellipse und der Rotations-Axe des Kegels in derselben Ebene liegt, gesehen wird. In dieser Ebene, deren Gleichung

$$z = 0,$$

ist, in Punct-Coordinaten ausgedrückt, die Gleichung der Durchschnitts-Curve

$$A'x^2 + Ay^2 = AA', \tag{1}$$

und die Gleichung der Focal-Ellipse:

$$(A'-A'')x^2 + (A-A'')y^2 = (A-A'')(A'-A''). \tag{2}$$

Wenn wir auf dieser Focal-Ellipse irgend einen Punct (y, x) annehmen, so ist, wenn wir denjenigen Winkel, unter welchem, von diesem Puncte aus, die Durchschnitts-Curve (1) gesehen wird, η nennen, wie bekannt*):

$$\tfrac{1}{4}\tan^2\eta = \frac{A'x^2 + Ay^2 - AA'}{(x^2+y^2-A-A')^2}, \tag{3}$$

und wenn $\tan^2\eta$ ein *maximum* oder *minimum* sein soll

$$2(A'x^2 + Ay^2 - AA')(xdx+ydy) = (x^2+y^2-A-A')(A'xdx+Aydy). \tag{4}$$

Zwischen den Coordinaten x und y besteht die Gleichung (2), differentiiren wir überdiess noch diese Gleichung, so kommt:

$$A''(xdx+ydy) = A'xdx + Aydy, \tag{5}$$

---

*) Entwicklungen I, 343 und System 128, Note.

so dass die Mittelpuncte der fraglichen spitzesten und stumpfesten Rotations-Kegel durch die drei Gleichungen (2), (4) und (5) bestimmt sind. Zunächst werden diese Gleichungen auf zwiefache Weise befriedigt, wenn

$$x = 0, \quad dy = 0, \quad y^2 = A' - A'',$$
$$y = 0, \quad dx = 0, \quad x^2 = A - A'',$$

das heisst, wenn der Mittelpunct in einem Scheitel der kleinern oder grössern Axe der Focal-Ellipse angenommen wird. Substituiren wir diese Coordinaten-Werthe in die Gleichung (3), so kommt bezüglich:

$$\tfrac{1}{4}\tang^2\eta = -\frac{AA''}{(A+A'')^2},$$
$$\tfrac{1}{4}\tang^2\eta = -\frac{A'A''}{(A'+A'')^2}. \qquad (6)$$

Dividiren wir ferner die Gleichungen (4) und (5) gliedweise in einander, so kommt:

$$2(A'x^2+Ay^2-AA') = A''(x^2+y^2-A+A'),$$

und da, in Gemässheit der Gleichung (2),

$$2(A'x^2+Ay^2-AA') = A''(x^2+y^2-A-A'+A''),$$

ergibt sich:

$$x^2+y^2 = A+A'-2A'':$$

die Gleichung eines Kreises, welcher die Focal-Ellipse nicht schneidet. Es gibt also keine andern *maxima* und *minima* als die durch die Gleichungen (6) bestimmten. Und zwar gibt es für den Fall des zweischaligen Hyperboloids bloss ein reelles *maximum*, den Scheiteln der kleinen Axe der Focal-Ellipse entsprechend, und für dasselbe

$$\tang\eta = \pm 2\sqrt{-\frac{AA''}{A+A''}} = \frac{2\alpha\gamma_,}{\alpha^2-\gamma_,^2}.$$

Für den Fall des einschaligen Hyperboloids aber gibt es ein reelles *maximum*, dem Scheitel der kleinen, und ein reelles *minimum* dem Scheitel der grossen Axe der Focal-Ellipse entsprechend; für jenes ist

$$\tang\eta = \pm 2\sqrt{-\frac{AA''}{A+A''}} = \frac{2\alpha\gamma_,}{\alpha^2-\gamma_,^2},$$

für dieses:

$$\tang\eta = \pm 2\sqrt{-\frac{A'A''}{A'+A''}} = \frac{2\beta\gamma_,}{\beta^2-\gamma_,^2}.$$

Wenn insbesondere $\alpha = \gamma'$, so ist im *maximum*, wenn $\beta = \gamma_,$ im *minimum* der Winkel η ein rechter.

Für den Fall der Focal-Hyperbel übertragen sich die vorstehenden Entwicklungen unmittelbar, indem wir A' und A'', y und z mit einander vertauschen. Hier gibt es für den Fall des zweischaligen Hyperboloids überhaupt keine reellen Rotations-Kegel, für den Fall des Ellipsoids Kegel, die von den in den Kreispuncten der Fläche zusammenfallenden Ebenen bis zu den umschriebenen Rotations-Cylindern durch jedes Maass der Oeffnung hindurchgehen. Nur für den Fall des einschaligen Hyperboloids gibt es ein *maximum*, den Scheiteln der reellen Axe entsprechend, und für dieses ist

$$\tang\eta = \pm 2\sqrt{-\frac{A'A''}{A'+A''}} = \frac{2\beta\gamma_,}{\beta^2-\gamma_,^2}.$$

Beiläufig bemerken wir, dass die umschriebenen Kegel eines einschaligen Hyperboloids, deren Mittelpuncte in die Scheitel der reellen Axe der Focal-Hyperbel und in die Scheitel der grossen Axe der Focal-Ellipse fallen, sich gleich weit öffnen.

Wir können auch eine der drei Grössen A, A′ und A″ verschwinden lassen und dem entsprechend nach demjenigen Kegel fragen, der durch eine gegebene Curve zweiter Classe sich legen lässt und die grösste oder kleinste Oeffnung hat. Sollen hierbei die Gleichungen (6) reelle Werthe für η geben, so muss A″ (der kleinste der drei Coefficienten) negativ, A positiv sein, während A′ verschwindet. Die Fläche muss also in die Hyperbel

$$\alpha^2 t^2 - \gamma_,^2 v^2 = w^2$$

übergehen, wonach für das fragliche *maximum*, welches dem Scheitel der kleinern Axe der zugehörigen Focal-Ellipse

$$(\alpha^2+\gamma_,^2)t^2 - \gamma_,^2 u^2 = w^2$$

entspricht,

$$\operatorname{tang}\eta = \frac{2\alpha\gamma_,}{\alpha^2-\gamma_,^2}$$

sich ergibt. In dem Falle der gleichseitigen Hyperbel ist dieses *maximum* ein rechter Winkel.

195. Die identische Gleichung I der 188. Nummer, die wir bereits auf die Form II gebracht und unter dieser Form discutirt haben, können wir auch auf folgende Weise schreiben:

$$\begin{aligned}&\lambda(At^2+A'u^2+A''v^2-w^2)-\mu(x_,t+y_,u+z_,v+w)^2\\ &\equiv (x't+y'u+z'v+w)(x''t+y''u+z''v+w)-\mu r^2(t^2+u^2+v^2),\end{aligned} \qquad \text{III}$$

und erhalten alsdann zwei neue Gleichungen von verschiedener Form:

$$\lambda(At^2+A'u^2+A''v^2-w^2)-\mu(x_,t+y_,u+z_,v+w) = 0, \qquad (2)$$

$$(x't+y'u+z'v+w)(x''t+y''u+z''v+w)-\mu r^2(t^2+u^2+v^2) = 0, \qquad (3)$$

welche ein und dieselbe Fläche zweiter Classe darstellen. Diese Fläche berührt, in Gemässheit der Gleichungs-Form (1), die gegebene Fläche

$$At^2+A'u^2+A''v^2 = w^2 \qquad (1)$$

in einer ebenen Curve und die Ebene dieser Curve hat den Punct $(x_,, y_,, z_,)$ zu ihrem Pole. Die zweite Gleichungs-Form zeigt, dass diese Fläche eine Rotations-Fläche ist, welche die beiden Puncte (x', y', z') und (x'', y'', z'') zu ihren Brennpuncten hat, und dass μr^2 das Quadrat des Radius ihres Aequators ist (182). Die Ebene der Berührungs-Curve steht auf einem der drei Hauptschnitte der Fläche senkrecht, weil ihr Pol $(x_,, y_,, z_,)$ in der Ebene einer dieser Hauptschnitte liegt. Wir brauchen also nur, wenn dieser Punct $(x_,, y_,, z_,)$ gegeben ist und wir die Berührungs-Ebene bestimmen wollen, die Durchschnitts-Curve der Fläche in dem bezüglichen Hauptschnitte zu kennen und in Beziehung auf diese Durchschnitts-Curve die Polare des gegebenen Punctes zu construiren. Die zu bestimmende Berührungs-Ebene steht alsdann auf dem Hauptschnitte senkrecht und schneidet ihn in dieser Polaren. Die beiden Brennpuncte (x', y', z') und (x'', y'', z'') sind irgend zwei Puncte, die wir auf einer Focal-Curve willkührlich annehmen können. Wenn sie gegeben sind, so ergibt sich der Punct $(x_,, y_,, z_,)$ unmittelbar als der Pol derjenigen geraden Linie, welche die beiden gegebenen verbindet, in Beziehung auf diejenige Focal-Curve, auf welcher diese Puncte liegen. Umgekehrt ergeben sich die beiden Brennpuncte als diejenigen Puncte, in welchen die Focal-Curve von der Polaren des Punctes $(x_,, y_,, z_,)$ geschnitten wird (189).

Die beiden Mittelpuncte irgend zweier einer gegebenen Fläche zweiter Classe umschriebenen Rotations-Kegel sind die Brennpuncte einer der Fläche umschriebenen Rotations-Fläche zweiter Classe.

Die Summe oder die Differenz der Abstände jedes Punctes einer Rotations-Fläche von ihren beiden Brennpuncten ist bekanntlich constant (182). Constant ist also auch die Summe oder die Differenz der Abstände jedes Punctes der Berührungs-Curve von den beiden Focalpuncten (x', y', z') und (x'', y'', z''). Ebenso können wir auch die bekannte Eigenschaft der Rotations-Flächen, dass das Verhältniss der Abstände jedes ihrer Puncte von einem Brennpuncte und der Polar-Ebene desselben constant ist, auf die Berührungs-Curve übertragen.

196. Zuvörderst ist bei der Discussion des Satzes der vorigen Nummer hervorzuheben, dass der Contact zwischen der gegebenen Fläche und der Rotations-Fläche, je nachdem die Berührungs-Ebene diese Flächen schneidet oder nicht, ein reeller oder ein imaginärer ist. Letzteres findet dann Statt, wenn der Punct $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ innerhalb der gegebenen Fläche liegt und sich also auch keine reellen Tangenten von diesem Puncte aus an die Durchschnitts-Curve in dem bezüglichen Hauptschnitte legen lassen, sei es, dass derselbe auch innerhalb dieser Curve liegt oder dass diese Curve (was unter den reellen Flächen nur bei dem zweischaligen Hyperboloid Statt finden kann) selbst imaginär ist. Der Uebergang zwischen einem reellen und einem imaginären Contact bildet der Fall, wo die Berührungs-Curve, in dem Falle der drei elliptischen Flächen, in einen Punct oder, in dem Falle der beiden hyperbolischen Flächen, in ein System von zwei geraden Linien ausartet: dann hat die gegebene Fläche mit der Rotations-Fläche eine Osculation höchster Ordnung auf der gemeinschaftlichen Tangential-Ebene. Diesem Falle entspricht also, dass der Punct $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ in der Durchschnitts-Curve der Fläche mit einem der drei Hauptschnitte liegt, wo dann die beiden Brennpuncte der fraglichen Rotations-Fläche sich wie früher ergeben, indem wir von diesem Puncte aus an die entsprechende Focal-Curve Tangenten legen und auf diesen die Berührungspuncte nehmen.

197. Im Allgemeinen ist jede gerade Linie, die wir beliebig in einem der drei Hauptschnitte annehmen, die Axe einer Rotations-Fläche, welche der gegebenen Fläche so umschrieben ist, dass sie diese in einer Curve berührt, deren Ebene auf dem Hauptschnitte senkrecht steht. Wenn diese gerade Linie die Focal-Curve schneidet, so sind die Durchschnittspuncte die beiden reellen Brennpuncte und die Rotations-Fläche ist alsdann entweder ein verlängertes Sphäroid oder ein zweischaliges Hyperboloid. Begegnet die gerade Linie der Focal-Curve nicht, so ist die Rotations-Fläche ein abgeplattetes Sphäroid oder ein einschaliges Hyperboloid. Den Uebergang bildet der Fall, dass die gegebene gerade Linie die Focal-Curve berührt, dann wissen wir, dass diese gerade Linie die Axe eines umschriebenen Rotations-Kegels ist (189), der je nachdem der Berührungspunct auf der Focal-Curve (der Mittelpunct dieses Kegels) ausserhalb oder innerhalb der Durchschnitts-Curve in dem Hauptschnitte liegt, reell oder imaginär ist. Bei diesem Uebergange fallen die beiden Brennpuncte in dem Mittelpuncte des Kegels zusammen, indem die Fläche, vorher bei reellen Brennpuncten ein zweischaliges Hyperboloid, durch die reelle Kegelfläche hindurchgehend, in ein einschaliges Hyperboloid mit imaginären Brennpuncten, oder, vorher ein verlängertes Sphäroid, durch die imaginäre Kegelfläche oder, was hiermit gleichbedeutend ist, durch den ellipsodischen Punct hindurchgehend, in ein abgeplattetes Sphäroid sich umgestaltet. Wenn die gegebene gerade Linie insbesondere einer Asymptote der Focal-Hyperbel parallel ist, so liegt ein Brennpunct unendlich weit, und wir erhalten offenbar ein Rotations-Paraboloid: ein Uebergangs-Fall, der in der analytischen Darstellung, weil dann in einer der beiden Constanten-Gruppen (x', y', z') und (x'', y'', z'') unendlich grosse Werthe vorkommen, eine Form-Aenderung verlangt.

Wir können auch jeden Punct der Ebene der drei Hauptschnitte der Fläche zweiter Classe zum Mittelpuncte einer dieser Fläche umschriebenen Rotations-Fläche nehmen. Die Rotations-Axe lässt sich alsdann unmittelbar und auf einzige Weise bestimmen, denn da der Mittelpunct in der Mitte zwischen den beiden Brennpuncten (x', y', z') und (x'', y'', z'') auf der Rotations-Axe liegt, so fällt diese offenbar mit der, immer reellen Chorde der Focal-Curve zusammen, die durch den gegebenen Punct geht und demjenigen Durchmesser der Focal-Curve parallel ist, auf dessen zugeordnetem Durchmesser der gegebene Punct liegt. Wenn hiernach dieser Punct in der Ebene der Focal-Ellipse angenommen wird, so sind die beiden Brennpuncte der Rotations-Fläche reell oder imaginär, je nachdem er innerhalb oder ausserhalb dieser Ellipse liegt; wenn er in der Ebene der Focal-Hyperbel erstens innerhalb derselben, zweitens ausserhalb der Asymptoten-Winkel, in denen diese Hyperbel liegt und drittens zwischen der Hyperbel und dem Asymptoten-Winkel angenommen wird, so sind in den beiden ersten Fällen die beiden Brennpuncte reell und liegen einmal auf demselben Hyperbel-Zweige, das andere Mal auf beiden Hyperbel-Zweigen, während sie im dritten Falle imaginär sind.

Um die Art der Rotations-Fläche zu bestimmen, ist es hinreichend, neben der Bestimmung über die Realität der Brennpuncte, auch noch zu wissen, ob der Radius der Aequatorial-Curve reell oder imaginär, mithin μr^2 positiv oder negativ ist.

198. Zunächst wollen wir wiederum, analog wie in der 189. Nummer, die identische Gleichung III in die folgenden drei Doppel-Gleichungen auflösen:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(At^2+A'u^2+A''v^2-w^2)-\mu(x_,t+y_,u+w)^2=0, \\ &(x't+y'u+w)(x''t+y''u+w)-\mu r^2(t^2+u^2+v^2)=0; \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}(4)\\(5)\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(At^2+A'u^2+A''v^2-w^2)-\mu(x_,t+z_,v+w)^2=0, \\ &(x't+z'v+w)(x''t+z''v+w)-\mu r^2(t^2+u^2+v^2)=0; \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}(6)\\(7)\end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(At^2+A'u^2+A''v^2-w^2)-\mu(y_,u+z_,v+w)^2=0, \\ &(y'u+z'v+w)(y''u+z''v+w)-\mu r^2(t^2+u^2+v^2)=0. \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix}(8)\\(9)\end{matrix}$$

Nehmen wir hiernach insbesondere die beiden Gleichungen (4) und (5), deren erste Theile einander identisch sind, so ergeben sich, wie früher, die beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$\lambda+\mu=-1, \qquad \lambda A''=-\mu r^2,$$

und hieraus folgt:

$$\mu=\frac{A''}{r^2-A''}, \qquad \mu r^2=\frac{A''r^2}{r^2-A''}$$

Wir sehen zuvörderst, dass μ und λ sich allein durch r^2 bestimmen. Um hiernach r^2 durch die Annahme des Punctes $(x_,, y_,, 0)$, der hier in der Ebene XY liegt, zu erhalten, brauchen wir bloss auszudrücken, dass die Gleichung (4) eine Rotations-Fläche darstelle. Indem wir die Bezeichnung der 10. Nummer auf diese Gleichung anwenden, finden wir:

$$Y_2=\lambda A'', \qquad Y_1=\lambda(A'+\mu y_,^2), \qquad Y=\lambda(A+\mu x_,^2),$$
$$\Psi_{32}=\mu\lambda x_,y_,, \qquad \Psi_{31}=0, \qquad \Psi_{30}=0,$$

und hiernach, wenn wir in die Gleichung (15) der 185. Nummer:

$$(Y_2-Y_1)(Y_2-Y)-(\Psi_{32})^2=0,$$

diese Werthe substituiren, die erste der nachstehenden drei Gleichungen:

$$(A'-A'')x_,^2+(A-A'')y_,^2 = \frac{A''-r^2}{A''}(A-A'')(A'-A''),$$

$$(A''-A')x_,^2+(A-A')z_,^2 = \frac{A'-r^2}{A'}(A-A')(A''-A'), \qquad (10)$$

$$(A''-A)y_,^2+(A'-A)z_,^2 = \frac{A-r^2}{A}(A'-A)(A''-A),$$

von denen die beiden letztern unmittelbar durch die Form der ersten gegeben sind. Durch diese Gleichungen bestimmt sich, wenn der Punct $(x_,, y_,, z_,)$ in der Ebene einer der drei Hauptschnitte der Fläche beliebig angenommen wird, zunächst der Werth von r^2 und dann der Radius der Aequatorial-Curve. Wenn wir, umgekehrt, r^2 als gegeben und $x_,$, $y_,$ und $z_,$ als veränderlich betrachten, so stellen diese drei Gleichungen, mit denen bezüglich die folgenden drei

$$z_, = 0, \qquad y_, = 0, \qquad x_, = 0,$$

gleichzeitig bestehen, in dieser Zusammenstellung drei Kegelschnitte dar, die in den drei Hauptschnitten liegen, und, um uns kurz auszudrücken, mit den drei Focal-Curven dieselben Asymptoten haben. Diese drei Curven sind also der geometrische Ort für die Mittelpuncte solcher Kugeln von gegebenem Radius, um welche sich, gleichzeitig mit der Fläche, (Rotations-) Kegel umschreiben lassen; sie fallen insbesondere, wenn der gegebene Radius verschwindet, mit den drei Focal-Curven zusammen. Wenn überhaupt der Mittelpunct einer solchen Kugel gegeben ist, so können wir leicht die Kugel selbst und die beiden Rotations-Kegel, die sich dieser Kugel und zugleich der Fläche umschreiben lassen, construiren. Wenn wir nemlich, von dem Mittelpuncte der Kugel $(x_,, y_,, z_,)$ aus, Tangenten an die Focal-Curve legen, so sind die Berührungspuncte auf diesen Tangenten die Mittelpuncte (x', y', z'), (x'', y'', z'') der beiden fraglichen Kegel. Durch jeden dieser Mittelpuncte gehen zwei Kegelseiten, die in dem bezüglichen Hauptschnitte liegen und also zugleich die Durchschnitts-Curve der Fläche in diesem Hauptschnitte und einen grössten Kreis der Kugel berühren. Da jene Durchschnitts-Curve gegeben ist, so bestimmt sich also unmittelbar dieser grösste Kugelkreis und somit die Kugel selbst.

Zugleich begegnen wir hier dem folgenden Satze:

Zwei Kegel, welche einer Fläche zweiter Classe umschrieben sind, und deren Mittelpuncte beliebig auf einer Focal-Curve angenommen werden, sind gleichzeitig noch einer und derselben vollkommen bestimmten Kugel umschrieben.

Betrachten wir bloss die Puncte in der Ebene der Focal-Curve, so ist hiernach klar, dass wenn wir von irgend zwei Puncten dieser Curve an die Durchschnitts-Curve der Fläche in demselben Hauptschnitte zwei Tangenten-Paare legen, in das von diesen Tangenten gebildete Viereck sich ein Kreis beschreiben lässt. Abgesehen von der Fläche ist die Beziehung der beiden Curven zu einander eine gegenseitige, und dadurch bestimmt, dass beide Curven in derselben Ebene liegen und dieselben Brennpuncte haben.

199. Wir haben schon bemerkt, dass die Axe der umschriebenen Rotations-Fläche, in Beziehung auf die Focale, in deren Ebene sie liegt, die Polare des Punctes $(x_,, y_,, z_,)$ ist. Beschreibt dieser Punct also nach einander die drei Kegelschnitte (10), so umhüllen die zugehörigen Axen der Rotations-Flächen in den drei Hauptschnitt-Ebenen drei neue Kegelschnitte, welche mit jenen in Beziehung auf die bezüglichen drei Focal-Curven, reciproke Polar-Curven sind, und also, wie jene, mit den Focal-Curven dieselben Asymptoten haben. Aus den Gleichungen (10) erhalten wir, in Folge dieser Bemerkungen, für die Gleichungen der neuen Curven, die folgenden

$$z = 0, \quad (A'-A'')x^2+(A-A'')y^2 = \frac{A''}{A''-r}(A-A'')(A'-A''),$$

$$y = 0, \quad (A''-A')x^2+(A-A')z^2 = \frac{A'}{A'-r^2}(A-A')(A''-A'), \qquad (11)$$

$$x = 0, \quad (A''-A)y^2+(A'-A)z^2 = \frac{A}{A-r^2}(A'-A)(A''-A),$$

dass diese drei Curven, welche, nach dem Vorstehenden, von der Axe der Rotations-Fläche umhüllt werden, gleichzeitig beschrieben werden von dem Mittelpuncte dieser Fläche. Es geben, um diess direct zu zeigen, indem wir die Puncte $(x_,, y_,, z_,)$, (x', y', z') und (x'', y'', z'') in der Coordinaten-Ebene XY annehmen, wonach die Coordinaten-Werthe $z_,$, z' und z'' verschwinden, die beiden identischen ersten Theile der Gleichungen (4) und (5):

$$-2\mu x_, = x'+x'',$$
$$-2\mu y_, = y'+y''.$$

Es ist aber, indem wir die Coordinaten des Mittelpunctes der Rotations-Fläche x, y, z nennen, weil dieser Punct in der Mitte zwischen den beiden Brennpuncten liegt:

$$2x = x'+x'', \qquad 2y = y'+y'', \qquad z = 0,$$

mithin

$$x_, = -\frac{1}{\mu}\cdot x = \frac{A''-r^2}{A''}\cdot x,$$
$$y_, = -\frac{1}{\mu}\cdot y = \frac{A''-r^2}{A''}\cdot y,$$

und wenn wir diese Werthe in die erste der Gleichungen (10) einsetzen, ergibt sich, was nachzuweisen war, die erste der Gleichungen (11).

Wenn wir den Radius der Aequatorial-Curve ρ nennen, so haben wir, was oben schon bemerkt worden ist:

$$\rho^2 = \mu r^2,$$

und hiernach

$$-\mu = \frac{A''}{A''-r^2} = \frac{A''-\rho^2}{A''}.$$

Wir sehen hieraus, dass die Gleichungen (10) und (11) gegenseitig in einander übergehen, wenn wir die Werthe von r^2 und ρ^2 mit einander vertauschen; und dass wir überdiess in diesen beiden Gleichungs-Gruppen die Coefficienten

$$\frac{A''-r^2}{A''}, \quad \frac{A'-r^2}{A'}, \quad \frac{A-r^2}{A}, \quad \frac{A''}{A''-r^2}, \quad \frac{A'}{A'-r^2}, \quad \frac{A}{A-r^2}$$

bezüglich mit

$$\frac{A''}{A''-\rho^2}, \quad \frac{A'}{A'-\rho^2}, \quad \frac{A}{A-\rho^2}, \quad \frac{A''-\rho^2}{A''}, \quad \frac{A'-\rho^2}{A'}, \quad \frac{A-\rho^2}{A},$$

vertauschen können. Die eben genannten Gleichungen (10) und (11) gehen hiernach in einander über, wenn wir ρ^2 für r^2 schreiben.

Wir haben also in dem Vorstehenden bewiesen, dass der Ort für die Mittelpuncte solcher Rotations-Flächen, die einer gegebenen Fläche zweiter Classe umschrieben sind und deren Aequator

einen gegebenen Radius hat, Kegelschnitte sind, die in den Ebenen der drei Hauptschnitte der Fläche liegen und mit den drei Focal-Curven dieselben Asymptoten haben. Die Axen dieser Rotations-Flächen umhüllen dieselben drei Kegelschnitte. Wenn überhaupt der Mittelpunct einer umschriebenen Rotations-Fläche gegeben ist, so ergeben sich sogleich ihre beiden Brennpuncte (197) und wenn wir von diesen beiden Brennpuncten aus an die Durchschnitts-Curve der gegebenen Fläche in demselben Hauptschnitte Tangenten legen, und in das von diesen Tangenten gebildete Viereck, was immer möglich ist (198), einen Kreis beschreiben, so ist dieser Kreis, in Gemässheit der letzten Entwicklungen, gleich dem Aequator der umschriebenen Rotations-Fläche, deren Mittelpunct gegeben ist. Diese Fläche selbst ist hiernach vollkommen bestimmt und ebenso ist es die Ebene, in welcher die Berührungs-Curve liegt.

Wenn der Radius des Aequators verschwindet, so stellen die Gleichungen (11) wiederum die drei Focal-Curven selbst dar und wir gelangen wieder zu den Resultaten der 190. Nummer zurück.

200. Wir können die bisher gewonnenen Resultate unmittelbar auch auf denjenigen Fall übertragen, dass die gegebene Fläche zweiter Classe in eine Curve dieser Classe ausartet.

Nehmen wir eine in der Ebene XY liegende Ellipse, und für die Gleichung derselben in Plan-Coordinaten die folgende:

$$\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2 = w^2, \tag{12}$$

so erhalten wir als Focal-Ellipse die gegebene Ellipse selbst und für die Focal-Hyperbel und die imaginäre Focal-Curve die nachstehenden Gleichungen:

$$(\alpha^2 - \beta^2) t^2 - \beta^2 v^2 = w^2, \tag{13}$$

$$-(\alpha^2 - \beta^2) u^2 - \alpha^2 v^2 = w^2. \tag{14}$$

Wenn wir in den drei Gleichungen (12), (13) und (14)

$$\alpha^2, \quad \beta^2, \quad u^2,$$

bezüglich mit:

$$\alpha^2 - \beta^2, \quad -\beta^2, \quad v^2,$$

vertauschen, so tritt jede der beiden Gleichungen (12) und (13) an die Stelle der andern, während die Gleichung (14) unverändert bleibt. Ebenso tritt, wenn wir

$$\alpha^2, \quad \beta^2 \quad t^2,$$

bezüglich mit

$$-\alpha^2, \quad \beta^2 - \alpha^2, \quad v^2,$$

vertauschen, jede der beiden Gleichungen (12) und (14) an die Stelle der andern, während die Gleichung (13) unverändert bleibt. Hiernach gewinnen wir die folgende allgemeinere, für die nächsten Entwicklungen nothwendige Auffassungsweise.

Es ordnen sich immer drei Curven zweiter Classe, von denen die erste eine Ellipse, die zweite eine Hyperbel und die dritte eine imaginäre Curve ist, in der Art zusammen, dass sie ein System von drei zusammengehörigen Focal-Curven bilden. Wenn eine solcher drei Curven gegeben ist, so sind die beiden übrigen vollkommen bestimmt. Sie haben alle denselben Mittelpunct und liegen in drei auf einander senkrechten Ebenen. Die Durchschnitts-Linien dieser drei Ebenen sind die beiden Axen der drei Curven, so dass je zwei dieser Curven eine gemeinschaftliche Axe haben. Auf dieser gemeinschaftlichen Axe sind die Scheitel jeder der beiden Curven die Brennpuncte der jedesmaligen andern. Die grosse Axe der Ellipse fällt in die reelle Axe der Hyperbel, die kleine Axe der Ellipse in diejenige Axe der imaginären Curve, auf welcher die reellen Brennpuncte derselben liegen, die Nebenaxe der Hyperbel in die andere Axe der imaginären Curve. Wir nennen

Focalpunct einer gegebenen Curve zweiter Classe jeden Punct, der auf einer der beiden zugehörigen Focal-Curven liegt. Die reellen Focalpuncte einer Ellipse liegen hiernach auf einer Hyperbel, die reellen Focalpuncte dieser Hyperbel, umgekehrt, auf jener Ellipse (189).

201. Unmittelbar ergeben sich durch Particularisirung der früher gewonnenen Resultate die folgenden Sätze:

Irgend zwei Focalpuncte einer gegebenen Ellipse oder Hyperbel sind die beiden Brennpuncte einer durch die gegebene Curve gehenden Rotations-Fläche zweiter Classe und, umgekehrt, die beiden Brennpuncte einer gegebenen Rotations-Fläche zweiter Classe sind zwei Focalpuncte jeder Curve, in welcher diese Fläche von einer Ebene geschnitten wird. (195).

Jeder Rotations-Kegel, dessen Mittelpunct in einem Brennpuncte eines verlängerten Sphäroids oder eines zweischaligen Rotations-Hyperboloids liegt, schneidet die Fläche in einer ebenen Curve, und, umgekehrt, jeder Kegel, der die Fläche in einer ebenen Curve schneidet und dessen Mittelpunct in einem Brennpuncte derselben liegt, ist ein Rotations-Kegel.

Wenn man durch einen Brennpunct eines gegebenen Sphäroids oder zweischaligen Rotations-Hyperboloids eine beliebige Schnitt-Ebene legt, so ist derselbe auch ein Brennpunct der Durchschnitts-Curve in dieser Ebene.

Wenn man von irgend zwei Focalpuncten einer gegebenen Ellipse oder Hyperbel zwei gerade Linien nach einem Puncte derselben zieht, so bleibt, wie auch dieser Punct auf der Curve fortrücken mag, entweder die Summe oder die Differenz dieser beiden geraden Linien constant (195).

Wir haben die Summe oder die Differenz zu nehmen, je nachdem die beiden Focalpuncte die Brennpuncte eines durch die gegebene Curve gelegten Ellipsoids oder zweischaligen Hyperboloids sind. Wenn hiernach die gegebene Curve eine Hyperbel ist, so haben wir immer die Differenz zu nehmen, während wir, wenn eine Ellipse gegeben ist, entweder die Differenz oder die Summe nehmen müssen, je nachdem die beiden Focalpuncte demselben Zweige der Focal-Hyperbel oder beiden Zweigen derselben angehören. Der Uebergang wird dadurch bezeichnet, dass der Focalpunct, durch das Unendliche hindurch, von einem Hyperbelzweige auf den andern hinübertritt.

Wenn wir insbesondere für die beiden Focalpuncte die beiden Brennpuncte der gegebenen Curve nehmen, so geht der letzte Satz in einen allbekannten der Planimetrie über, an den eine Beschreibung der Curve durch die continuirliche Bewegung eines Punctes sich knüpft. Bei dieser Beschreibung der Curve können wir also an die Stelle der beiden Brennpuncte irgend zwei Focalpuncte setzen, die nicht mehr in der Ebene der zu beschreibenden Curve liegen: eine Bemerkung, die zuerst Herr Dupin gemacht hat.*)

An den letzten Satz schliesst sich unter andern Sätzen auch der folgende an:

Wenn wir einem Rotations-Kegel irgend eine elliptische oder hyperbolische Basis geben, so ist die Summe je zweier Kegelseiten, die in einer der grössern, bezüglich reellen, Axe der Basis parallelen Ebene liegen, constant.

Nehmen wir nemlich auf einer Ellipse und Hyperbel, von welchen eine die Focal-Curve der

*) Développements p. 280.

andern ist, irgend zwei Puncte F und F′, G und G′ an, welche auf irgend zwei geraden Linien FF′ und GG′ liegen, die der gemeinschaftlichen Axe beider Curven parallel sind, so ist zunächst offenbar G′F = GF′. Nach dem vorletzten Satze ist, wie auch F auf der Ellipse fortrücken mag (GF+G′F) constant, folglich auch unter der obigen Voraussetzung, dass FF′ der grössern Axe der Ellipse parallel ist, (GF+GF′). Ebenso ist, für alle Lagen des Punctes von G auf der Hyperbel, (FG+F′G) constant, folglich auch, wenn GG′ der reellen Axe der Hyperbel parallel ist, (FG+FG′).

202. Wenn wir, statt der Fläche zweiter Classe, wiederum die in der Ebene XY liegende Ellipse

$$\alpha^2t^2+\beta^2u^2 = w^2 \tag{12}$$

nehmen, so verliert von den drei Gleichungen (10) die erste ihre Bedeutung, die beiden letztern gehen in die folgenden über:

$$\beta^2x_,^2-(\alpha^2-\beta^2)z_,^2 = (\beta^2-r^2)(\alpha^2-\beta^2), \tag{15}$$
$$\alpha^2y_,^2+(\alpha^2+\beta^2)z_,^2 = -(\alpha^2-r^2)(\alpha^2-\beta^2). \tag{16}$$

Von diesen beiden Gleichungen stellt die erste in der Ebene XZ eine Hyperbel, die zweite in der Ebene YZ eine reelle oder imaginäre Ellipse dar: geometrische Oerter für die Mittelpuncte solcher Kugeln von gegebenem Radius r, um welche sich ein durch die gegebene Ellipse gehender (Rotations-) Kegel beschreiben lässt. Der Mittelpunct dieses Kegels ist im Falle der zweiten Gleichung, weil er auf der imaginären Focal-Curve liegt, nothwendig imaginär.

Wenn wir in den Gleichungen (15) und (16) einfach r^2 mit ρ^2 vertauschen, erhalten wir (199), den beiden letzten Gleichungen (11) entsprechend, die folgenden beiden:

$$\beta^2x^2-(\alpha^2-\beta^2)z^2 = (\beta^2-\rho^2)(\alpha^2-\beta^2), \tag{17}$$
$$\alpha^2y^2+(\alpha^2-\beta^2)z^2 = -(\alpha^2-\rho^2)(\alpha^2-\beta^2), \tag{18}$$

um in den Ebenen XZ und YZ die Oerter für die Mittelpuncte der durch die gegebene Ellipse gehenden Rotations-Flächen, deren Aequatorial-Radius gegeben und gleich ρ ist, zu bestimmen.

Nehmen wir endlich, statt der Ellipse (12), die durch folgende Gleichung dargestellte Hyperbel

$$\alpha^2t^2-\beta_,^2u^2=w^2, \tag{19}$$

so treten an die Stelle der Gleichungen (15), (16), (17) und (18) die folgenden:

$$\beta_,^2x_,^2+(\alpha^2+\beta_,^2)z_,^2 = (\beta_,^2+r^2)(\alpha^2+\beta_,^2)' \tag{15′}$$
$$\alpha^2y_,^2+(\alpha^2-\beta_,^2)z_,^2 = -(\alpha^2-r^2)(\alpha^2+\beta_,^2); \tag{16′}$$
$$\beta_,^2x^2+(\alpha^2+\beta_,^2)z^2 = (\beta_,^2+\rho^2)(\alpha^2+\beta_,^2), \tag{17′}$$
$$\alpha^2y^2+(\alpha^2+\beta_,^2)z^2 = -(\alpha^2-\rho^2)(\alpha^2+\beta_,^2). \tag{18′}$$

Die Gleichungen (15′) und (17′) stellen hier Ellipsen dar, die für reelle Werthe von r^2 und ρ^2 immer reell sind, die Gleichungen (16′) und (18′) reelle oder imaginäre Ellipsen.

203. Unter denjenigen Kugeln, welche solchen Rotations-Kegeln, die eine gegebene Ellipse oder Hyperbel zur gemeinschaftlichen Basis haben, eingeschrieben sind, wollen wir diejenigen besonders hervorheben, welche zugleich die Ebene der Basis berühren. Für diese Kugeln ist $z'^2 = r^2$, wonach die Gleichungen (15) und (15′), indem wir der Kürze wegen ε^2 für $(\alpha^2-\beta^2)$ und $(\alpha^2+\beta_,^2)$ schreiben, in die folgende übergehen:

$$x_,^2=\varepsilon^2.$$

Zugleich ist $y_, = 0$. Der geometrische Ort für die Mittelpuncte der fraglichen Kugeln besteht also aus zwei geraden Linien, die auf der Ebene der Curve in ihren beiden Brennpuncten senkrecht stehen

Um alle Kugeln, welche die Ebene eines gegebenen Kegelschnitts in einem der beiden Brennpuncte desselben berühren, lassen sich Kegel beschreiben, welche zugleich durch den gegebenen Kegelschnitt gehen.

Ein Kegel, der einer gegebenen Kugel umschrieben ist, wird von einer beliebigen Ebene, welche die Kugel berührt, so geschnitten, dass der Berührungspunct auf der Kugel ein Brennpunct der Durchschnitts-Curve ist.

Wenn der Kegel zweien Kugeln zugleich umschrieben ist, und die Schnitt-Ebene beide Kugeln zugleich berührt, so sind die beiden Berührungspuncte die beiden Brennpuncte der Durchschnitts-Curve.

Wenn zwei Kugeln mit ihren beiden umschriebenen Kegeln gegeben sind, so schneidet jede Berührungs-Ebene eines der beiden Kegel den jedesmaligen andern Kegel so, dass diejenigen beiden Puncte, in welchen die beiden Kugeln von dieser Ebene berührt werden, die beiden Brennpuncte der Durchschnitts-Curve sind.

Es ergibt sich sogleich, dass die Polaren der beiden Brennpuncte (die Directricen) aller solcher Durchschnitts-Curven jedes der beiden Kegel in denjenigen beiden Ebenen liegen, in welchen derselbe von den beiden Kugeln berührt wird, und offenbar liegen die Mittelpuncte aller Durchschnitts-Curven beider Kegel in der Durchschnitts-Ebene der beiden Kugeln.

Zu den vorstehenden Resultaten ist Herr *Quetelet* zuerst gelangt und Herr *Dandelin* hat dieselben dadurch verallgemeinert, dass er an die Stelle des Rotations-Kegels ein einschaliges Rotations-Hyperboloid gesetzt hat. Wir können erst im letzten Paragraphen dieses Bandes diesen Resultaten ihre richtige Stelle und dadurch ihre eigentliche Bedeutung anweisen.

ig. 3. 204. Der Satz der 198. Nummer besteht fort, wenn an die Stelle der Fläche zweiter Classe eine Curve dieser Classe tritt, so dass zwei Rotations-Kegel, die durch einen gegebenen Kegelschnitt sich legen lassen, gleichzeitig derselben Kugel umschrieben sind. Der Mittelpunct dieser Kugel liegt in der Ebene der Focal-Curve, einem Hauptschnitte der Curve. Die Durchschnitts-Curve zweiter Classe in diesem Hauptschnitte reducirt sich in dem Falle, den wir jetzt betrachten, auf die beiden Brennpuncte der Focal-Curve, welche die Scheitel einer Axe der an die Stelle der Fläche getretenen Curve zweiter Classe sind. Somit erhalten wir den folgenden Satz der Planimetrie, der die Construction der durch eine gegebene Curve zweiter Classe gehenden Rotations-Flächen vermittelt.

Wenn man von irgend zwei Puncten eines Kegelschnittes nach jedem seiner Brennpuncte zwei gerade Linien zieht, so bilden diese Linien ein solches Viereck, dem sich ein Kreis umschreiben lässt. Der Mittelpunct dieses Kreises ist der Durchschnitt der Tangenten des Kegelschnittes in jenen beiden Puncten.

Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel und lassen wir einen der beiden Puncte unendlich weit auf derselben fortrücken, so gehen zwei der Vierecks-Seiten durch die beiden Brennpuncte und sind einer Asymptote parallel. Der Mittelpunct des eingeschriebenen Kreises liegt also auf dieser Asymptote und sein Radius ist, wie wir auch den zweiten Punct annehmen mögen, constant und dem kürzesten Abstande der Brennpuncte von den Asymptoten und also auch der halben Neben-Axe gleich.

Wenn wir durch einen beliebigen Punct einer gegebenen Hyperbel zwei gerade Linien nach den beiden Brennpuncten und in demselben Puncte die Tangente ziehen, so ist der Abstand desjenigen Punctes, in welchem diese Tangente eine

Asymptote schneidet, von den beiden erstgenannten geraden Linien gleich der Neben-Axe der Hyperbel.

Nehmen wir ferner für einen der beiden Puncte des gegebenen Kegelschnittes einen Scheitel derjenigen Axe, auf welcher seine beiden reellen Brennpuncte liegen, so fallen in diese Axe zwei Vierecks-Seiten zusammen. Das Viereck geht hiernach in ein Dreieck über und der eingeschriebene Kreis berührt die in die Axe fallende Dreiecks-Seite in jenem Scheitel. Es gibt aber bekanntlich vier Kreise, die einem Dreiecke eingeschrieben sind, das heisst die drei Seiten desselben berühren. Von zweien dieser vier Kreise wird eine beliebige dieser Seiten, die wir als Basis bezeichnen wollen, selbst, von den beiden andern wird sie in ihren Verlängerungen berührt. Ist der gegebene Kegelschnitt eine Hyperbel, so wird die Basis des fraglichen Dreiecks, für welche wir die in die Axe derselben fallende Seite nehmen, von den beiden ersten jener vier Kreise in den beiden Scheiteln dieser Axe berührt; ist der Kegelschnitt eine Ellipse, so bestimmen die Berührungspuncte der Basis mit den beiden letzten Kreisen die Scheitel der in diese Basis fallenden grossen Axe. Für irgend ein gegebenes Dreieck gelten jene Bestimmungen gleichzeitig, weil es immer eine Hyperbel und eine Ellipse gibt, die beide dieselben Brennpuncte haben und in einem gegebenen Puncte sich schneiden.

Wenn irgend ein Dreieck gegeben ist, so sind diejenigen vier Puncte, in welchen die Basis desselben von den vier eingeschriebenen Kreisen berührt wird, bezüglich die beiden Scheitel der grossen Axe einer Ellipse und der reellen Axe einer Hyperbel, welche Curven beide die Winkelpuncte der Basis zu ihren Brennpuncten haben und durch die Spitze des Dreiecks gehen.

Wir wollen endlich noch die Voraussetzung machen, dass die beiden auf dem gegebenen Kegelschnitte angenommenen Puncte, die Endpuncte irgend einer Chorde sind, welche durch einen der beiden Brennpuncte geht. Dann liegt der Mittelpunct des eingeschriebenen Kreises in dem Pole dieser Chorde, also auf der, dem Brennpuncte zugehörigen Directrix. Zwei Seiten des frühern Vierecks fallen hier wieder zusammen und zwar in die durch den Brennpunct gehende Chorde. Diese Chorde ist die Basis eines Dreiecks, dessen Spitze in dem andern Brennpuncte liegt. Ein Kreis, der einem solchen Dreiecke eingeschrieben ist, berührt also die Basis desselben in dem erstgenannten Brennpuncte, wonach, wenn wir durch den Brennpunct zwei gerade Linien legen, die auf einander senkrecht stehen, der Pol einer dieser Linien auf der andern liegt. Wenn wir, wie in dem letzten Satze, von irgend einem gegebenen Dreiecke ausgehen, so erhalten wir eine neue geometrische Bedeutung derjenigen vier Puncte, in welchen die Basis eines solchen Dreiecks von den vier eingeschriebenen Kreisen berührt wird. Sie sind die vier zweiten Brennpuncte von solchen vier Kegelschnitten, die den Bedingungen unterworfen sind, dass die Spitze des Dreiecks ihr erster, gemeinschaftlicher Brennpunct ist und dass sie durch zwei gegebene Puncte, die Winkelpuncte der Basis, gehen, die mit dem zweiten Brennpuncte in gerader Linie liegen.

Zur Vervollständigung derjenigen Sätze, welche sich um den allgemeinen Satz dieser Nummer gruppiren, wollen wir noch bemerken, dass die Seiten des Vierecks, welchem der Kreis sich einschreiben lässt, paarweise genommen, sich erstens in den beiden beliebig auf der Curve angenommenen Puncten N, N', zweitens in den beiden Brennpuncten derselben, F, F', und drittens noch in zwei Puncten M, M' schneiden, deren jeder durch zwei Viereckseiten mit den beiden Brennpuncten verbunden ist. Ein Paar derjenigen Scheitel-Winkel, die in jedem dieser sechs Puncte von zwei Vierecks-Seiten gebildet werden, wird durch diejenige gerade Linie halbirt, welche diesen Punct mit dem Mittelpuncte des eingeschriebenen Kreises, das heisst mit dem Durchschnittspuncte der Tangenten in

den beiden Puncten, die wir auf der Curve beliebig angenommen haben, verbinden. Wir erhalten hiernach, als Umschreibung des an die Spitze dieser Nummer gestellten Satzes die folgenden drei Sätze.

Zwei gerade Linien, die, von den beiden Brennpuncten einer gegebenen Ellipse oder Hyperbel aus, nach einem beliebigen Puncte auf dem Umfange derselben gezogen werden, bilden mit der Tangente in diesem Puncte gleiche Winkel.

Zwei Tangenten, die man von einem gegebenen Puncte aus an eine gegebene Ellipse oder Hyperbel zieht und in den Berührungspuncten begränzt, werden von jedem der beiden Brennpuncte aus unter gleichen Winkeln oder unter solchen Winkeln gesehen, die sich zu zwei Rechten ergänzen.

In dem Falle der Ellipse findet Ersteres Statt, in dem Falle der Hyperbel Ersteres oder Letzteres, je nachdem die beiden Berührungspuncte auf demselben Zweige oder auf beiden Zweigen der Hyperbel liegen.

Wenn wir von einem in der Ebene einer gegebenen Ellipse oder Hyperbel willkührlich angenommenen Puncte zwei gerade Linien durch die beiden Brennpuncte der Curve und in zwei beliebig gewählten Durchschnittspuncten dieser Linien mit derselben die beiden Tangenten legen, so halbirt diejenige gerade Linie, welche den Durchschnittspunct dieser Tangenten mit dem willkührlich angenommenen Puncte verbindet, ein Scheitel-Winkel-Paar, das in diesem Puncte von den beiden durch die Brennpuncte gehenden geraden Linien gebildet wird.

Wenn der willkührlich angenommene Punct auf dem Umfange der Ellipse oder Hyperbel selbst liegt, so geht der letzte der drei vorstehenden Sätze in den ersten derselben über. Denselben Satz können wir auch, indem wir alle vier Durchschnittspuncte der beiden durch die beiden Brennpuncte gehenden geraden Linien mit der Curve gleichzeitig betrachten, in folgender Weise auffassen. Es ist bekannt, dass, wenn man in und um eine gegebene Ellipse oder Hyperbel in der Art irgend zwei Vierecke $NN'N''N'''$ und $CC'C''C'''$ beschreibt, dass die Winkelpuncte des erstern die Berührungspuncte auf den Seiten des letztern sind, die beiden Diagonalen beider Vierecke in demselben Puncte M sich schneiden. (Wir nehmen hier den Begriff des Vierecks in der allgemeinsten Bedeutung.) Gehen die Diagonalen NN'' und $N'N'''$ des erstern Vierecks durch die beiden Brennpuncte F und F', so werden die von ihnen gebildeten Winkel durch die Diagonalen des letztern Vierecks halbirt, wonach die letztgenannten Diagonalen CC'' und $C'C'''$ auf einander senkrecht stehen. Wenn insbesondere der Durchschnitt der beiden Diagonalen des erstern Vierecks in einen der beiden Brennpuncte selbst fällt, so hat eine dieser beiden Diagonalen eine ganz beliebige Richtung, während die andere dadurch bestimmt ist, dass sie durch beide Brennpuncte zugleich geht; dann ergibt sich der Satz, dass eine beliebige Tangente der Curve, begränzt von den Tangenten derselben in den beiden Scheiteln der durch die beiden reellen Brennpuncte gehenden Axe, von einem beliebigen dieser Brennpuncte aus unter rechtem Winkel gesehen wird. Wenn insbesondere ferner zwei Winkelpuncte der beiden Vierecke zusammenfallen und diese also in ein eingeschriebenes und umschriebenes Dreieck übergehen, so ergibt sich, dass die Normale der Curve in einem beliebigen ihrer Puncte durch den Pol der Basis eines eingeschriebenen Dreiecks geht, dessen Scheitel dieser Punct ist und auf dessen beiden Schenkeln die beiden Brennpuncte liegen.

Gehen wir nochmals zu dem an die Spitze dieser Nummer gestellten Satze zurück und betrachten die dem Kreise umschriebene vollständige vierseitige Figur, so ergibt sich durch Umkehrung der folgende Satz.

Wenn man um einen gegebenen Kreis eine vollständige vierseitige Figur beschreibt, so sind die drei Puncten-Paare, N und N′, M und M′, F und F′, welche durch die drei Diagonalen verbunden werden, bezüglich zwei Puncte auf dem Umfange einer Ellipse, zwei Puncte auf dem Umfange einer Hyperbel und zwei der Ellipse und Hyperbel gemeinschaftliche Brennpuncte.

Wir können auch eines der beiden andern Puncten-Paare N und N′, M und M′ für die beiden Brennpuncte nehmen, nur erhalten wir dann, statt der Ellipse und Hyperbel, zwei Hyperbeln, welche durch die beiden andern Punctenpaare gehen. Während jene Ellipse und Hyperbel sich rechtwinklig schneiden, haben diese beiden Hyperbeln keinen gemeinschaftlichen Punct mehr. Diese Resultate knüpfen sich unmittelbar an den Satz, dass bei der Hyperbel oder Ellipse die Differenz oder Summe zweier von einem Puncte derselben nach den beiden Brennpuncten gezogenen geraden Linien constant ist, wenn wir erwägen, dass eine vollständige vierseitige Figur sich in drei Vierecke auflösen lässt, von welchen eines ein gewöhnliches Viereck ist, ein zweites einen einspringenden Winkel und das dritte zwei sich schneidende Seiten hat, und dass, wenn die vierseitige Figur einem Kreise umschrieben ist, in den beiden ersten Vierecken die Summe und im dritten die Differenz der gegenüberliegenden Seiten gleich ist.

Wir müssen hier abbrechen, ohne den Gegenstand zu erschöpfen, es genügt uns, den Weg angedeutet zu haben, wie wir auf eine höchst einfache Weise aus der Grund-Bestimmung der Brennpuncte der Ellipse und Hyperbel Winkel-Beziehungen herleiten können, die sich sonst der analytischen Beweisführung unbequem schmiegen. Die Uebertragungen auf die Parabel, auf welche wir nicht eingehen werden, bieten keine Schwierigkeit.

205. Wenn eine Curve zweiter Classe gegeben ist, so können wir jeden Punct, welcher in einer derjenigen beiden Ebenen liegt, welche auf der Ebene der gegebenen Curve senkrecht stehen und diese Ebene in den beiden Axen der Curve schneiden, als Mittelpunct einer der Curve umschriebenen Rotations-Fläche zweiter Classe betrachten, zu deren allgemeiner Bestimmung die frühern Nummern (197—199) die nothwendigen Elemente enthalten. Wir wollen erstens für die gegebene Curve eine Ellipse nehmen, und voraussetzen, dass der Mittelpunct der durch dieselbe gehenden Rotations-Fläche in der Ebene der Focal-Hyperbel (15) liege. Es ergibt sich hier (199)

$$r^2 = \frac{\beta^2\,\rho^2}{\rho^2 - \beta^2}, \qquad \rho^2 = \frac{\beta^2\,r^2}{r^2 - \beta^2}.$$

Wenn der Mittelpunct 1) innerhalb der Focal-Hyperbel, 2) auf derselben, 3) zwischen derselben und ihren Asymptoten, 4) auf diesen Asymptoten, 5) in den von denselben gebildeten Nebenwinkeln, oder 6) unendlich weit angenommen wird, ergibt sich

1) $\rho^2 < 0$,	$r^2 > 0 < \beta^2$;
2) $\rho^2 = 0$,	$r^2 = 0$;
3) $\rho^2 > 0 < \beta^2$,	$r^2 < 0$;
4) $\rho^2 = \beta^2$,	$r^2 = \mp\,\infty$;
5) $\rho^2 > \beta^2$,	$r^2 > \beta^2$;
6) $\rho^2 = \infty$,	$r^2 = \beta^2$;

Wenn der angenommene Mittelpunct innerhalb der Focal-Hyperbel liegt (1), so sind die beiden Brennpuncte reell und liegen auf demselben Zweige dieser Hyperbel: die entsprechende Fläche ist ein zweischaliges Rotations-Hyperboloid (201); sie sind imaginär, wenn der Mittelpunct zwischen der Focal-Hyperbel und ihren Asymptoten liegt (3), und werden wieder reell und liegen auf beiden Hyperbel-Zweigen, wenn der Mittelpunct über die Asymptoten hinübertritt (5): dann ist die Fläche ein verlängertes Sphäroid (201). Wenn ferner ρ^2 positiv ist (3, 5), ist der Aequator der zu bestim-

menden Rotations-Fläche reell, sonst (1) imaginär. Hiernach entsprechen den drei coordinirten Fällen 1, 3, 5, bezüglich ein zweischaliges und ein einschaliges Rotations-Hyperboloid und ein verlängertes Sphäroid.

Was die Uebergangs-Fälle betrifft, so müssen wir wohl unterscheiden, ob die fraglichen Rotations-Flächen als Flächen zweiter Classe oder als Flächen zweiter Ordnung gelten sollen. Nach den bisher gewonnenen Resultaten können wir in beiden Voraussetzungen diese Uebergangsfälle unmittelbar bestimmen. Betrachten wir die Flächen als zweiter Ordnung, so bildet, indem der Mittelpunct auf der Focal-Hyperbel angenommen wird, zwischen zwei- und einschaligen Rotations-Hyperboloiden der Kegel den Uebergang. Rückt der Mittelpunct auf eine Asymptote der Focal-Hyperbel, so bildet ein Rotations-Cylinder, der diese Asymptote zur Axe und jeden Punct derselben zu seinem Mittelpuncte hat, den Uebergang von einschaligen Hyperboloiden zu verlängerten Sphäroiden. Diese verlängerten Sphäroide endlich gehen durch das Rotations-Paraboloid wiederum in die zuerst betrachteten zweischaligen Hyperboloide über. Bei unserer analytischen Darstellungsweise haben wir die fraglichen Rotations-Flächen als Flächen zweiter Classe betrachtet. In dieser Voraussetzung bildet ein System von zwei auf der Focal-Hyperbel zusammenfallenden Puncten den Uebergang zwischen zwei- und einschaligen Rotations-Hyperboloiden. Wenn der Mittelpunct der umschriebenen Rotations-Fläche mit dem Mittelpuncte der gegebenen Ellipse zusammenfällt, so ist die Rotations-Axe ein beliebiger Durchmesser der Focal-Hyperbel. Schneidet derselbe diese Hyperbel, so ist die Fläche ein verlängertes Sphäroid, schneidet er sie nicht, so ist sie ein einschaliges Hyperboloid. Dem Uebergangs-Falle entspricht, dass die Axe der Rotations-Fläche mit einer Asymptote der Focal-Hyperbel zusammenfällt.

Nehmen wir ferner den Mittelpunct der Rotations-Fläche beliebig in der Ebene der imaginären Focal-Ellipse an, so verlangt die Gleichung (18), wenn der Mittelpunct überhaupt reell sein soll,

$$\rho^2 > \alpha^2.$$

Weil die Focal-Curve imaginär ist, so sind es immer auch die Brennpuncte der umschriebenen Rotations-Fläche, der Radius ihres Aequators ist immer reell und grösser als α. Die Rotations-Fläche ist offenbar ein abgeplattetes Sphäroid.

Wir wollen zweitens eine Hyperbel als gegeben betrachten und den Mittelpunct der ihr umschriebenen Rotations-Fläche zuvörderst in der Ebene ihrer reellen Focal-Ellipse annehmen. Je nachdem der Mittelpunct 1) innerhalb dieser Focal-Ellipse, 2) auf dem Umfange derselben oder 3) ausserhalb derselben angenommen wird, ist

$$1)\ \rho^2 < 0 \qquad 2)\ \rho^2 = 0 \qquad 3)\ \rho^2 > 0$$

In dem ersten der beiden coordinirten Fälle 1) und 3) sind die beiden Brennpuncte reell, in dem letztern imaginär, der Radius des Aequators ist im erstern Falle imaginär, im letztern reell. Die Rotations-Fläche, welche überhaupt nur ein Hyperboloid sein kann, ist hiernach im ersten Falle ein zweischaliges, im letzten Falle ein einschaliges; zwischen beiden Fällen bilden zwei zusammenfallende Puncte (ein Kegel) den Uebergang.

Nehmen wir ferner den Mittelpunct der umschriebenen Rotations-Fläche in der Ebene der imaginären Focal-Ellipse beliebig an, so ist in Folge der Gleichung (18'), wenn der Mittelpunct überhaupt reell sein soll,

$$\rho^2 > \alpha^2.$$

Die Brennpuncte sind imaginär, der Radius des Aequators ist reell: die umschriebene Rotations-Fläche ein einschaliges Hyperboloid.

206. Den Fall der beiden Paraboloide haben wir bisher noch unberücksichtigt gelassen. Um denselben zu discutiren, brauchen wir nur an die Stelle der Gleichung (1) der 188. Nummer die folgende zu setzen

$$pu^2 + qv^2 - 2tw = 0. \tag{1}$$

Dann geht die identische Gleichung I, indem wir zugleich berücksichtigen, dass hier, in Vertretung der Bedingungs-Gleichung (4), nothwendig $\mu = -1$, in die folgende über:

$$\lambda\{pu^2 + qv^2 - 2tw\} + \{(x_1t + y_1u + z_1v + w)^2 - r^2(t^2 + u^2 + v^2)\}$$
$$\equiv (x't + y'u + z'v + w)(x''t + y''u + z''v + w), \qquad \text{I, a}$$

und zeigt, wenn wir sie zuvor auf die nachstehende Form bringen:

$$\lambda\{pu^2 + qv^2 - 2tw\} - r^2(t^2 + u^2 + v^2)$$
$$\equiv (x't + y'u + z'v + w)(x''t + y''u + z''v + w) - (x_1t + y_1u + z_1v + w)^2, \qquad \text{II a.}$$

dass die beiden Gleichungen

$$\lambda\{pu^2 + qv^2 - 2tw\} - r^2(t^2 + u^2 + v^2) = 0, \tag{2}$$
$$(x't + y'u + z'v + w)(x''t + y''t + z''v + w) - (x_1t + y_1u + z_1v + w)^2 = 0, \tag{3}$$

dieselbe Fläche zweiter Classe darstellen. Die Form der letztern Gleichung zeigt, dass diese Fläche in eine ebene Curve dieser Classe ausgeartet ist: eine Bedingung die nur dann erfüllt werden kann, wenn aus der erstern Gleichung eine der drei Coordinaten t, u, v ganz ausfällt. Diess geschieht, da t nicht mehr ausfallen kann, nur noch in zwei Fällen, die durch die Bedingungs-Gleichungen

$$\lambda q = r^2 \qquad \lambda p = r^2 \tag{4}$$

angezeigt werden. Diesen beiden Fällen entsprechend, geht die Gleichung (2) nach einander in die folgenden beiden über:

$$(p - q)u^2 - t(qt + 2w) = 0, \tag{5}$$
$$(q - p)v^2 - t(pt + 2w) = 0. \tag{6}$$

Damit die Gleichung (3) endlich mit diesen beiden Gleichungen identisch werden könne, müssen wir einmal z', z'' und z', das andere Mal y', y'' und y_1 verschwinden lassen; dann geht sie in die folgenden über:

$$(x't + y'u + w)(x''t + y''u + w) - (x_1t + y_1u + w)^2 = 0, \tag{7}$$
$$(x't + z'v + w)(x''t + z''v + w) - (x_1t + z_1v + w)^2 = 0. \tag{8}$$

Auf demselben Wege als in der 189. Nummer gelangen wir hier zu dem Resultate, dass es, wenn eine Fläche zweiter Classe insbesondere in ein Paraboloid übergeht, nur noch zwei Focal-Curven gibt, als geometrische Oerter für die Mittelpuncte der umschriebenen Rotations-Kegel und zugleich als solche geometrische Oerter, die von den Axen dieser Kegel umhüllt werden. Diese Oerter sind beide Parabeln und liegen in den beiden Hauptschnitten des Paraboloids.

Wir wollen erstens den Fall des elliptischen Paraboloids nehmen, welches in der Voraussetzung, dass p und q beide positiv sind, durch folgende Gleichungen in dem Plan- und Punct-Coordinaten-Systeme dargestellt wird:

$$pu^2 + qv^2 - 2tw = 0, \qquad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x. \tag{9}$$

Es sind hierbei p und q die halben Parameter der beiden Hauptschnitte, wir wollen voraussetzen, dass

$$p > q.$$

Die erste Focal-Parabel:

$$(p-q)u^2-t(qt+2w)=0, \tag{10}$$

welche wir auch durch die folgenden beiden Gleichungen in Punct-Coordinaten darstellen können:

$$z=0, \qquad y^2=2(p-q)(x-\tfrac{1}{2}q), \tag{11}$$

liegt ganz innerhalb der Durchschnitts-Parabel in dem Hauptschnitte XY, öffnet sich in demselben Sinne, hat mit ihr dieselbe Axen-Richtung und denselben Brennpunct, und zu ihrem Scheitel den Brennpunct der Durchschnitts-Parabel in dem andern Hauptschnitte XZ. Keiner ihrer Puncte kann der Mittelpunct eines reellen umschriebenen Kegels sein.

Die zweite Focal-Parabel:

$$(q-p)v^2-t(pt+2w)=0 \tag{12}$$

kann auch durch die folgenden beiden Gleichungen in Punct-Coordinaten dargestellt werden:

$$y=0, \qquad z^2=-2(p-q)(x-\tfrac{1}{2}p). \tag{13}$$

Sie hat mit der Durchschnitts-Parabel in dem Hauptschnitte XZ dieselbe Axen-Richtung und denselben Brennpunct, öffnet sich aber in entgegengesetztem Sinne, so dass sie diese Parabel, und zwar in den Kreispuncten der Fläche, schneidet. Ihr Scheitel ist der Brennpunct der Durchschnitts-Parabel in dem Hauptschnitte XY.

Wir wollen zweitens das hyperbolische Paraboloid, p und q immer positiv nehmend, durch folgende Gleichungen in den beiden Coordinaten-Systemen darstellen:

$$pu^2-qv^2-2tw=0, \qquad \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x. \tag{14}$$

Die erste Focal-Parabel

$$(p+q)u^2+t(qt-2w)=0, \tag{15}$$

die wir auch durch folgende Gleichungen in Punct-Coordinaten darstellen können:

$$z=0, \qquad y^2=2(p+q)(x+\tfrac{1}{2}q), \tag{16}$$

liegt in dem Hauptschnitte XY, hat mit der Durchschnitts-Curve in diesem Hauptschnitte dieselbe Axen-Richtung und denselben Brennpunct, öffnet sich in demselben Sinne und zieht sich ganz um diese Parabel hin. Ihr Scheitel ist der Brennpunct der Durchschnitts-Curve in dem andern Hauptschnitte.

Die zweite Focal-Parabel

$$(p+q)v^2=t(pt-2w), \tag{17}$$

die wir auch durch die Gleichungen

$$y=0, \qquad z^2=-(p+q)(x-\tfrac{1}{2}p) \tag{18}$$

darstellen können, zieht sich auf ganz gleiche Weise um die Durchschnitts-Parabel in dem Hauptschnitte XZ, indem sie sich, wie diese, in entgegengesetztem Sinne öffnet.

Jeder Punct beider Focal-Parabeln eines hyperbolischen Paraboloids ist der Mittelpunct eines reellen der Fläche umschriebenen Rotations-Kegels.

207. Wenn durch das Verschwinden von q, dem der Uebergang einer Art von Paraboloide in die andere entspricht, die Fläche zweiter Classe in eine Parabel:

$$pu^2+2tw=0 \tag{19}$$

ausartet, so ist die erste Focal-Parabel keine andere als diese Parabel selbst, die zweite Focal-Parabel hat folgende Gleichung

$$pv^2+t(pt+2w)=0, \qquad (20)$$

und die Beziehung der beiden Parabeln zu einander ist eine durchaus gegenseitige. Die Ebenen derselben stehen auf einander senkrecht und schneiden sich in ihrer gemeinsamen Axe; jede hat, bei gleichem Parameter, den Brennpunct der andern zu ihrem Scheitel. Jede ist der Ort für die Mittelpuncte der durch die andere gelegten Rotations-Kegel, und wird überdiess von der Axe dieser Rotations-Kegel umhüllt; woraus dann, ähnlich wie in der 191. Nummer folgt, dass zwei gerade Linien, welche von irgend zwei Focalpuncten einer gegebenen Parabel nach irgend einem Puncte auf dem Umfange derselben gezogen werden, mit der Tangente in dem letztgenannten Puncte gleiche Winkel bilden. Lassen wir einen der beiden Focalpuncte auf der Focal-Parabel immer weiter rücken, so ist eine der beiden geraden Linien ein Durchmesser der gegebenen Parabel und somit erhalten wir hier noch den besondern Satz, dass jede gerade Linie, die von einem beliebigen Focalpuncte einer gegebenen Parabel nach einem beliebigen Puncte auf dem Umfange derselben gezogen wird, mit der Tangente in diesem Puncte dieselben Winkel bildet, als der durch denselben gehende Durchmesser.

Wenn ein elliptisches Paraboloid in eine Parabel übergeht, so fallen die beiden Kreispuncte desselben in den Brennpunct der Parabel zusammen (192).

208. Die identische Gleichung I, a. können wir auch auf folgende Weise schreiben

$$\lambda(pu^2+qv^2-2tw)+(x,t+y,u+z,v+w)^2 \equiv (x't+y'u+z'v+w)(x''t+y''u+z''v+w)+r^2(t^2+u^2+v^2), \qquad \text{III, a.}$$

und dann, ähnlich wie früher, in die folgenden beiden auflösen:

$$\begin{aligned} &\lambda(pu^2+qv^2+2tw)+(x,t+y,u+w)^2, \\ &\equiv (x't+y'u+w)(x''t+y''u+w)+r^2(t^2+u^2+v^2), \\ &\lambda(pu^2+qv^2-2tw)+(x,t+z,v+w)^2 \\ &\equiv (x't+z'v+w)(x''t+y''v+w)+r^2(t^2+u^2+v^2). \end{aligned} \qquad (21)$$

Nach der bekannten Deutungsweise ergibt sich hier der Satz, dass auch für den Fall der beiden Paraboloide irgend zwei Focalpuncte der Fläche die beiden Brennpuncte einer ihr umschriebenen Rotations-Fläche zweiter Classe sind, dass der Pol der Berührungs-Ebene mit den beiden Focalpuncten in demselben Hauptschnitte liegt und der Mittelpunct einer Kugel ist, welche gleichzeitig denjenigen beiden Kegeln eingeschrieben ist, deren Spitzen mit den beiden Focalpuncten zusammenfallen.

An die Stelle der Paraboloide kann insbesondere auch eine Parabel treten. Irgend zwei beliebige Focalpuncte einer gegebenen Parabel sind die beiden Brennpuncte einer durch dieselbe gelegten Rotations-Fläche, welche hier nothwendig ein zweischaliges Hyperboloid ist, das, wenn einer der beiden Focalpuncte auf der Focal-Parabel unendlich weit rückt, in ein Paraboloid übergeht. Es folgt hieraus, dass die Differenz der Abstände der Puncte einer gegebenen Parabel von irgend zwei festen Focalpuncten derselben constant ist.

209. Wenn wir insbesondere, der ersten der beiden identischen Gleichungen (21) entsprechend,

$$\lambda(pu^2+qv^2-2tw)+(x,t+y,u+w)^2=0 \qquad (22)$$

für die Gleichung einer Rotations-Fläche nehmen, deren beide Brennpuncte auf der ersten Focal-Parabel liegen, so ergibt sich, indem wir

$$A = x_,^2, \qquad A' = y_,^2 + \lambda p, \qquad A'' = \lambda q,$$
$$B'' = x_, y_,, \qquad B' = 0, \qquad B = 0,$$
$$C = -\lambda + x_,, \qquad C' = y_,, \qquad C'' = 0,$$
$$D = 1$$

setzen, mit Beibehaltung der frühern Bezeichnung:

$$Y = -\lambda(\lambda - 2x_,), \qquad Y_1 = \lambda p, \qquad Y_2 = \lambda q,$$
$$\Psi_{32} = \lambda y_,, \qquad \Psi_{31} = 0, \qquad \Psi_{30} = 0,$$

und hieraus, ähnlich wie in der 198. Nummer, um auszudrücken, dass die Gleichung (22) eine Rotations-Fläche darstelle, die erste der folgenden beiden Bedingungs-Gleichungen, in der wir zugleich für λ seinen Werth $\frac{r^2}{q}$ eingesetzt haben:

$$y_,^2 = 2(p-q)\left(x_, - \frac{q^2 + r^2}{2q}\right),$$
$$z_,^2 = -2(p-q)\left(x_, - \frac{p^2 + r^2}{2p}\right). \qquad (23)$$

Die zweite dieser Gleichungen ergibt sich aus der ersten, indem wir $y_,$ und q bezüglich mit $z_,$ und p vertauschen. Betrachten wir $x_,$, $y_,$ und $z_,$ als veränderlich, und r^2 als gegeben, so stellen diese Gleichungen zwei Parabeln in der Ebene XY und XZ dar, welche keine andern sind, als die beiden Focal-Parabeln (11) und (13), parallel mit sich selbst, nach der Richtung ihrer Durchmesser verschoben. Wenn das gegebene r^2 insbesondere verschwindet, so stellen die Gleichungen (23) die beiden Focal-Parabeln (5) und (6) in der unverrückten Lage dar.

Wenn wir den Radius des Aequators der Rotations-Fläche (22) durch ρ^2 bezeichnen, so ist, in Gemässheit der ersten der beiden identischen Gleichungen (21),

$$\rho^2 = -r^2.$$

Für die Gleichungen derjenigen beiden Curven, welche in Beziehung auf die beiden bezüglichen Focal-Parabeln, die zugeordneten Polar-Curven derjenigen beiden Parabeln sind, welche durch die Gleichungen (23) dargestellt werden, ergeben sich, indem wir zugleich $(-\rho^2)$ für r^2 einsetzen, unmittelbar die folgenden

$$y^2 = 2(p-q)\left(x - \frac{q^2 + \rho^2}{2q}\right),$$
$$z^2 = -2(p-q)\left(x - \frac{p^2 + \rho^2}{2p}\right). \qquad (24)$$

Die so bestimmten Curven sind der geometrische Ort, welcher zugleich von dem Mittelpuncte solcher umschriebenen Rotations-Flächen, deren Aequator den Radius ρ hat, beschrieben und von der Rotations-Axe derselben Flächen umhüllt wird.

Setzen wir $q = 0$, so tritt wiederum an die Stelle des Paraboloids (1), als Fläche zweiter Classe, die Parabel

$$pu^2 - 2tw = 0, \qquad (19)$$

und während die ersten Gleichungen (23) und (24) ihre geometrische Bedeutung verlieren, gehen die zweiten dieser Gleichungen in die folgenden über:

$$z'^2 = -2p\left(x' - \frac{p^2 + r^2}{2p}\right), \qquad (25)$$

$$z^2 = -2p\left(x - \frac{p^2 + \rho^2}{2p}\right). \qquad (26)$$

Die letzte Gleichung stellt in derjenigen Ebene, welche auf der Ebene der gegebenen Parabel senkrecht steht und diese Parabel in ihrer Axe schneidet, den Ort für die Mittelpuncte einer Rotations-Fläche dar, welche durch die Parabel geht. Eine solche Rotations-Fläche ist nothwendig ein zwei- oder einschaliges Hyperboloid, und eine Tangential-Ebene ihres Asymptoten-Kegels der Ebene der gegebenen Parabel parallel. Ersteres findet Statt, wenn der Mittelpunct, der jeder beliebige Punct in der eben bestimmten Ebene sein kann, innerhalb der Focal-Parabel, letzteres, wenn er ausserhalb derselben liegt. Im ersten Falle ist ρ^2 negativ und r^2 positiv, in letztern Falle umgekehrt ρ^2 positiv und r^2 negativ. Den Uebergang, $\rho^2 = r^2 = 0$ entsprechend, bildet der Fall, dass der Mittelpunct auf der Focal-Parabel

$$z^2 = -2p\,(x - \tfrac{1}{2}p)$$

liegt. Liegt der Mittelpunct nach der Richtung eines Durchmessers der Focal-Parabel unendlich weit, so wird die fragliche Rotations-Fläche ein Paraboloid.

§. 11.

Rotations-Kegel, die den Flächen zweiter Ordnung umschrieben sind. Focalpunct und Directrix.

210. Indem wir dieselbe Fläche nach einander als eine Fläche zweiter Classe, das heisst als die bildliche Darstellung von Gleichungen zweiten Grades in Punct- und in Plan-Coordinaten ansehen, sind es ganz analoge Betrachtungen, die uns in einer der beiden Anschauungsweisen zu der Bestimmung der Kreisschnitte dieser Fläche und in der jedesmaligen andern Anschauungsweise zu der Bestimmung der dieser Fläche umschriebenen Rotations-Kegel führen und umgekehrt. Diese Betrachtungen gestalten sich aber ganz verschieden, sei es, dass wir die Kreisschnitte, sei es, dass wir die umschriebenen Rotations-Kegel in der zwiefachen Auffassung, der das zwiefache Coordinaten-System entspricht, bestimmen wollen. Im gegenwärtigen Paragraphen wollen wir das System gewöhnlicher rechtwinkliger Parallel-Coordinaten zu Grunde legen und können dann in der allgemeinen Gleichung einer gegebenen Fläche der zweiten Ordnung die Coordinaten des Mittelpunctes eines dieser Fläche umschriebenen Rotations-Kegels unmittelbar in Evidenz bringen und aus den neuen Gleichungs-Formen eine neue Reihe geometrischer Beziehungen ableiten.

Wenn irgend zwei Flächen zweiter Ordnung sich in reellen oder imaginären, ebenen Curven schneiden, so lassen sich immer auch denselben Flächen zwei reelle oder imaginäre Kegel umschreiben.*) Bezeichnen wir eine der beiden Flächen, die wir als eine gegebene betrachten wollen, durch die allgemeine Gleichung

$$\Omega = 0, \tag{1}$$

und die zweite durch

$$K = 0,$$

so entspricht der obigen Voraussetzung die identische Gleichung:

$$\Omega \equiv K + \varkappa st,$$

*) Einen unmittelbaren Beweis dieses allgemeinen Satzes werden wir in dem 14. Paragraphen finden.

indem wir durch s und t irgend zwei lineare Functionen und durch $\varkappa$ einen unbestimmten constanten Coefficienten bezeichnen. Wenn die zweite Fläche eine Kugel ist, so sind die beiden umschriebenen Kegel offenbar Rotations-Kegel und wenn diese Kugel sich insbesondere auf einen Punct reducirt, wonach

$$K \equiv (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2,$$

so fallen die beiden Kegel in einen einzigen zusammen, dessen Mittelpunct der Punct (x', y', z') ist. Dann erhalten wir also

$$\Omega \equiv (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2+\varkappa st, \tag{2}$$

und hiernach für die allgemeine Gleichung der Flächen zweiter Ordnung, in so weit denselben sich Rotations-Kegel umschreiben lassen, die folgende:

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2+\varkappa st = 0. \tag{3}$$

Diese Gleichung enthält zehn Constanten, von welchen $\varkappa$ die eine ist und drei auf die Bestimmung des Mittelpunctes des umschriebenen Rotations-Kegels und jeder der beiden Ebenen s und t kommen. Vor Allem müssen wir in die Discussion dieser Constanten, unter denen eine überzählige sich befindet, eingehen.

Zu diesem Ende wollen wir die Richtung der drei Coordinaten-Ebenen so annehmen, dass zwei derselben denjenigen beiden, immer reellen und auf einander senkrechten Ebenen, welche die von den Ebenen (s) und (t) gebildeten Winkel halbiren, parallel sind, und dass die dritte Coordinaten-Ebene auf diesen senkrecht steht. Hierdurch sind drei mögliche Reductionen der Gleichung (3) gegeben, es kann diese Gleichung in jede der folgenden drei übergehen:

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 = \lambda(y-y'')^2+\mu(y-y'')^2, \tag{4}$$
$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 = \lambda(x-x'')^2+\nu(z-z'')^2, \tag{5}$$
$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 = \mu(y-y'')^2+\nu(z-z'')^2, \tag{6}$$

Ueber den Anfangspunct der Coordinaten ist hierbei durchaus keine Bestimmung gemacht worden, wir wollen ihn im Mittelpuncte der gegebenen Fläche annehmen. Nach den vorstehenden Gleichungs-Formen sind die Axen dieser Fläche den Coordinaten-Axen parallel, und fallen insbesondere, bei der vorstehenden Annahme über den Anfangspunct, mit diesen Coordinaten-Axen zusammen, so dass wir für die Gleichung der gegebenen Fläche (1) die folgende nehmen können:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2} = 1, \tag{7}$$

wobei wir voraussetzen wollen, dass

$$\alpha^2 > \beta^2 > \gamma^2.\text{*)} \tag{8}$$

211. Nehmen wir erstens die Gleichungen (4) und (7) als identisch, so erhalten wir zwischen den noch zu bestimmenden sieben Constanten der erstern dieser beiden Gleichungen, die folgenden sechs Bedingungs-Gleichungen

$$1-\lambda = \frac{\gamma}{\alpha^2}, \qquad 1-\mu = \frac{\gamma^2}{\beta^2}, \tag{9}$$

---

*) Statt der drei Gleichungen (4) — (6) können wir auch bloss eine derselben nehmen, und dann, um alle Fälle zu erschöpfen, der Fläche (7) eine dreifache Lage geben, indem wir, nach einander, die Axen der Fläche auf verschiedene Weise mit den drei Coordinaten-Axen zusammenfallen lassen. Die Auffassungsweise des Textes macht die Darstellung einfacher.

$$z' = 0, \qquad y' - \mu y'' = 0, \qquad x' - \lambda x'' = 0, \tag{10}$$

$$(\lambda x''^2 - x'^2) + (\mu y''^2 - y'^2) = \gamma^2. \tag{11}$$

Da z' verschwindet, so liegt der Mittelpunct des umschriebenen Rotations-Kegels in der Ebene der Halb-Axen α und β, und ist in dieser Ebene durch die Coordinaten-Werthe x' und y' bestimmt. Senkrecht auf derselben Ebene steht die Durchschnitts-Linie der Ebenen (s) und (t), welche ihrerseits durch die Coordinaten-Werthe x'' und y'' bestimmt ist. Wir erhalten aus den Gleichungen (9)

$$\lambda = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^2}, \quad \mu = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^2}, \tag{12}$$

ferner, wenn wir vermittelst der beiden letzten Gleichungen (10) aus der Gleichung (11) einmal x'' und y'', das andere Mal x' und y' eliminiren:

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot x'^2 + \frac{1-\mu}{\mu} \cdot y'^2 = \gamma^2,$$

$$(1-\lambda)\lambda x''^2 + (1-\mu)\mu y''^2 = \gamma^2,$$

oder wenn wir für λ und μ die obigen Werthe einsetzen:

$$\frac{x'^2}{\alpha^2 - \gamma^2} + \frac{y'^2}{\beta^2 - \gamma^2} = 1, \tag{13}$$

$$\frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\alpha^4} \cdot x'' + \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\beta^4} \cdot y''^2 = 1. \tag{14}$$

In der ersten dieser beiden Gleichungen, verbunden mit der Gleichung

$$z' = 0,$$

erkennen wir, als geometrischen Ort für die Mittelpuncte der umschriebenen Rotations-Kegel, die Focal-Ellipse der Fläche (7) wieder (190); die zweite Gleichung gibt für den Ort der Durchschnitts-Linien der beiden Ebenen (s) und (t) einen auf der Ebene der Focal-Ellipse senkrecht stehenden Cylinder, dessen Basis wiederum eine Ellipse ist. Die beiden Halb-Axen-Quadrate dieser Ellipse sind $\frac{\alpha^4}{\alpha^2 - \gamma^2}$ und $\frac{\beta^4}{\beta^2 - \gamma^2}$ und geben, mit den bezüglichen Halb-Axen-Quadraten der Focal-Ellipse, $(\alpha^2 - \gamma^2)$ und $(\beta^2 - \gamma^2)$, multiplicirt, α^4 und β^4, woraus folgt, dass die beiden Ellipsen zugeordnete Polar-Curven in Beziehung auf die Durchschnitts-Curve in dem bezüglichen Hauptschnitte der Fläche sind, oder, was hieraus sogleich sich ergibt, dass, in Beziehung auf die gegebene Fläche, der fragliche Cylinder die Polar-Fläche der Focal-Ellipse ist.

Aus den beiden letzten Gleichungen (10) und der Gleichung (11) ergibt sich ferner

$$(1-\lambda)x'x'' + (1-\mu)y'y'' = \gamma^2,$$

und wenn wir wiederum für λ und μ die Werthe einsetzen:

$$\frac{x'x''}{\alpha^2} + \frac{y'y''}{\beta^2} = 1, \tag{15}$$

worin das Gesetz ausgesprochen ist, wie jedem Puncte der Focal-Ellipse eine bestimmte Seite des Cylinders entspricht und umgekehrt. Die einem Puncte auf der Focal-Curve entsprechende Seite des Cylinders ist nemlich diejenige, in welcher dieser Cylinder von der Polar-Ebene des Punctes, genommen in Beziehung auf die gegebene Fläche, berührt wird, so wie, andrerseits, der einer Cylinder-Seite entsprechende Punct der Pol derjenigen Ebene ist, welche den Cylinder in dieser Seite berührt.

Wir wollen überhaupt irgend einen Punct $(x', y', 0)$ Focalpunct und jede Cylinder-Seite Directrix nennen.

212. Aus den beiden letzten Gleichungen (10) erhalten wir endlich noch:

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{1-\mu}{1-\lambda}\cdot\frac{y''}{x''} = \frac{\alpha^2 y''}{\beta^2 x''},$$

woraus, wenn wir geometrisch deuten, folgt, dass der Punct $(x', y', 0)$ auf einer solchen geraden Linie liegt, die durch den Punct $(x'', y'', 0)$ geht und auf der Polaren dieses Punctes in Beziehung auf die Curve des Hauptschnittes senkrecht steht. Ist also die Directrix gegeben, so brauchen wir bloss, vom Fusspuncte derselben aus, ein Perpendikel auf die Polare dieses Fusspunctes zu fällen. Perpendikel und Polare schneiden sich alsdann in dem zugehörigen Focal-Puncte.

Die auf die Form der Gleichung (15) gegründete gegenseitige Bestimmung von Focalpunct und Directrix setzt bloss voraus, dass die Curven (13) und (14), in Beziehung auf die Curven des Hauptschnittes:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \qquad (16)$$

zugeordnete Polar-Curven sind. (Wir sehen in dem Nächstfolgenden von der dritten Dimension ganz ab.) Die in dem Vorstehenden enthaltene Construction des Focalpunctes, wenn die Directrix gegeben ist, wobei die Curven (13) und (14) selbst nicht in Betracht kommen, findet ihren Grund darin, dass die erste dieser beiden zugeordneten Polar-Curven dadurch particularisirt wird, dass sie mit der Curve des Hauptschnittes dieselben beiden Brennpuncte (F und G) hat. Umgekehrt fliesst hieraus auch eine unmittelbare Bestimmung der Directrix, wenn der zugehörige Focalpunct gegeben ist.

Fig. 4, 5. Nehmen wir also überhaupt drei Curven (13), (14), (16), von welchen zwei in Beziehung auf die dritte zugeordnete Polar-Curven sind, und bestimmen die erste von jenen beiden so, dass sie mit der dritten dieselben beiden Brennpuncte hat, so haben wir bewiesen, dass, wenn wir von irgend einem Puncte (N) der zweiten Curve ein Perpendikel auf die Polare dieses Punctes, die eine Tangente der ersten Curve ist, fällen, der Fusspunct (M) dieses Perpendikels (NM) ein Punct der ersten Curve (der Berührungspunct) ist. Dieser Punct (M) ist der Focalpunct, welcher zu derjenigen Directrix gehört, welche in dem beliebigen Puncte (N) der zweiten Curve auf der gemeinsamen Ebene der drei Curven senkrecht steht. Ist der Punkt (M) gegeben, so können wir unmittelbar die Tangente und Normale der ersten Curve in diesem Puncte bestimmen. Ziehen wir nemlich durch denselben und die beiden gemeinsamen Brennpuncte (F, G) zwei gerade Linien (MF, MG) und halbiren dann durch zwei neue gerade Linien die von diesen beiden gebildeten Scheitel-Winkel, so ist eine der letztgezogenen geraden Linien (MN) die fragliche Normale und die andere die fragliche Tangente (MN') der ersten Curve im Puncte (M). Der Pol der Tangente (MN') ist derjenige Punct N, in welchem die zum Focalpuncte M gehörige Directrix auf der Ebene der drei Curven senkrecht steht. Dieser Punct liegt also auf der Normalen (MN) und zugleich auf der

*) Geht die erste Curve, als Curve zweiter Classe betrachtet, in das System der beiden Brennpuncte, und dem entsprechend die zweite Curve, als Curve zweiter Ordnung zu betrachten, in das System der beiden Directricen über, so gibt der Satz des Textes den allbekannten Satz, dass die Polare eines beliebig auf einer Directrix angenommenen Punctes und diejenige gerade Linie, welche diesen Punct mit dem Brennpuncte verbindet, in dem Brennpuncte auf einander senkrecht stehen.

Polaren des Punctes M. Die beiden durch diesen Punct und die beiden Brennpuncte gehenden geraden Linien (MF, MG) schneiden die dritte Curve in vier Puncten (P, Q, R, S), die sich paarweise durch zwei neue Linien-Paare PR und QS, PQ und RS verbinden lassen und die Linien jedes Paares schneiden sich in zwei neuen Puncten (N_0, N_0'). Diese beiden Puncte liegen auf der Polaren (M) und wir behaupten überdies, dass sie mit den beiden Puncten N und N′, in welchen diese Polare von den eben bestimmten Linien MN und MN′ geschnitten wird, zusammenfallen, wonach wir, wenn der Punct M gegeben ist, auf die leichteste Weise die Puncte N und N′ finden können.*)

---

*) Um den letzten Entwickelungen ihre richtige Stelle anzuweisen, füge ich in dieser Note einige Bemerkungen hinzu.

Curven zweiter Classe, welche dieselben Brennpuncte haben, sind als solche Curven anzusehen, die von denselben vier (imaginären) geraden Linien, die sich paarweise in den beiden reellen Brennpuncten schneiden (Analytisch-geometrische Entwicklungen II, 478) berührt werden. Ein System von Curven dieser Art lässt sich, indem wir für δ nach einander beliebige, positive oder negative, Werthe einsetzen, durch folgende Gleichung darstellen:

$$(\alpha^2 - \delta)t^2 + (\beta^2 - \delta)u^2 = w^2. \qquad (a)$$

Zu diesen Curven gehört insbesondere, $\delta = \beta^2$ entsprechend, (wir nehmen immer $\alpha^2 > \beta^2$) das System der beiden reellen Brennpuncte und, $\delta = \alpha^2$ entsprechend, das System der beiden imaginären Brennpuncte. Das dritte Puncten-System, $\delta = \infty$ entsprechend, ist imaginär und liegt unendlich weit. Um den Beweis der obigen Behauptung an die Form der vorstehenden Gleichung (a) zu knüpfen, brauchen wir nur zwischen dieser Gleichung und der Gleichung

$$\alpha^2 t^2 + \beta^2 u^2 = w^2, \qquad (b)$$

die aus jener sich ergibt, wenn wir δ gleich Null setzen, nach einander u und t zu eliminiren. Auf diesem Wege finden wir, unabhängig von δ, die folgenden beiden Gleichungen:

$$(\alpha^2 - \beta^2)t^2 = w^2, \qquad -(\alpha^2 - \beta^2)u^2 = w^2.$$

In Beziehung auf alle Curven zweiter Classe, welche überhaupt vier gegebene gerade Linien berühren, — hier insbesondere dieselben beide Brennpuncte haben — ist der geometrische Ort für die Pole einer beliebigen geraden Linie eine zweite gerade Linie (Entw. II., 626). Die Beziehung der beiden geraden Linien zu einander ist eine durchaus gegenseitige, sie stehen insbesondere in dem hier betrachteten Falle auf einander senkrecht. Es wird nemlich der Pol einer gegebenen geraden Linie (t′, u′, w′) in Beziehung auf die Curve (a), wie bekannt, durch die folgende Gleichung

$$(\alpha^2 - \delta)\, t't + (\beta^2 - \delta)\, u'u = w'w.$$

dargestellt; die Coordinaten-Werthe des Punctes sind hiernach

$$x = -(\alpha^2 - \delta)\frac{t'}{w'}, \quad y = -(\beta^2 - \delta)\frac{u'}{w'},$$

und wenn wir aus diesen Gleichungen δ eliminiren, kommt für den Ort der fraglichen Pole:

$$\frac{w'}{u'} \cdot y - \frac{w'}{t'} \cdot x = \alpha^2 - \beta^2,$$

dieser Ort ist also eine gerade Linie, die auf der gegebenen (t′, u′, w′) senkrecht steht. Die beiden geraden Linien sind die Tangenten zweier der in Rede stehenden Curven (einer Ellipse und einer Hyperbel), die durch ihren Durchschnittspunct gehen und in diesem Puncte sich rechtwinklig schneiden. Hieraus folgt zugleich, dass diese beiden geraden Linien die Scheitel-Winkel halbiren, welche durch diejenigen beiden geraden Linien gebildet werden, die durch ihren Durchschnittspunct und die beiden gemeinschaftlichen Brennpuncte gehen.

213. Die bisherigen Erörterungen beziehen sich gleichmässig auf alle Flächen der zweiten Ordnung, die einen Mittelpunct haben, auch die imaginären Flächen nicht ausgeschlossen. Wir wollen nun in eine specielle Betrachtung der verschiedenen Arten dieser Flächen eingehen.

In der 4. und 5. Figur sind MN und MN′ zwei gerade Linien, die zu confocalen Curven zweiter Classe, von welchen eine beliebige gezeichnet ist, in der besprochenen Weise sich verhalten. F und G sind die beiden gemeinschaftlichen Brennpuncte. In Beziehung auf die beliebige Curve liegt der Pol von MN′ auf MN und ist also kein andrer als derjenige Punct N, in welchem auf der letztgenannten geraden Linie MN die beiden Linien PR und QS sich schneiden. PR und QS bestimmen sich aber dadurch, dass man durch M und die beiden Brennpuncte F und G zwei gerade Linien legt, welche die Curve in den vier Puncten P, Q, R und S schneiden und diese Puncte durch zwei neue gerade Linien verbindet. Diess Letztere kann noch auf andere Weise geschehen: PQ und RS schneiden sich in N′, dem Pole von MN. Es ist hiernach bewiesen, dass zwei gerade Linien, welche durch den als beliebig angenommen zu betrachtenden Punct M und die beiden in obiger Weise bestimmten Puncte N und N′ gehen, die von den Linien MF und MG gebildeten Scheitel-Winkel halbiren. Auf diesen Satz haben wir uns im Texte bezogen. Liegt der Punct M insbesondere auf der Curve selbst, so ergibt sich der allbekannte Spiegelungs-Satz.

Wir wollen hier noch verwandte Beziehungen mit wenigen Worten andeuten.

Wenn wir, von einem gegebenen Puncte M aus, an alle Curven zweiter Classe, die überhaupt vier gegebene gerade Linien berühren, hier insbesondere dieselben beiden Brennpuncte, F und G, haben, Tangenten-Paare legen, so bilden diese eine Involution (Entw. II., 623). Nach unserer Definition (siehe die Note zu der angeführten Stelle) besteht überhaupt eine Involution von geraden Linien aus solchen Linien-Paaren, die mit zwei gegebenen geraden Linien Systeme von vier Harmonicalen bilden. In jeder der beiden gegebenen geraden Linien fallen die beiden Linien eines Paares der Involution zusammen. Stehen diese beiden geraden Linien auf einander senkrecht, so halbiren sie die von den Linien jedes Paares gebildeten Scheitel-Winkel, und also bilden dann auch die Linien irgend zweier Paare mit einander gleiche Winkel. In dem Falle, den wir hier betrachten, gehen durch den gegebenen Punct M, die beiden auf einander senkrechten Tangenten MN und MN′ zweier in demselben Puncte sich schneidenden Curven: in jede derselben fallen die beiden Tangenten eines Paares der Involution zusammen. Insbesondere gehört auch das System derjenigen beiden geraden Linien, welche den gegebenen Punct M mit den beiden Brennpuncten verbinden, in die Reihe der fraglichen Tangenten-Paare. Es ist also bewiesen, dass die von einem beliebigen Tangenten-Paare und insbesondere von den durch die beiden Brennpuncte gehenden geraden Linien gebildeten Scheitel-Winkel durch die beiden Tangenten der in M sich schneidenden beiden Curven zweiter Classe halbirt werden. Unmittelbar hieran knüpft sich der bekannte Satz, dass zwei Tangenten, die man von einem gegebenen Puncte aus, an einen gegebenen Kegelschnitt legt, mit denjenigen beiden geraden Linien, die durch denselben Punct nach den beiden Brennpuncten gezogen werden, gleiche Winkel bilden.

Wir können den gegebenen Kegelschnitt der 4. und 5. Figur auch als einer solchen Reihe von Curven zweiter Classe angehörig betrachten, die alle dem Vierecke ABCD eingeschrieben sind und dieses Viereck so bestimmen, dass die Berührungspuncte auf den gegenüberliegenden Seiten, P und S, Q und R, bezüglich mit den beiden Brennpuncten F und G in gerader Linie liegen oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass durch zwei gegenüberliegende Winkelpuncte, D und B, die beiden Directricen des gegebenen Kegelschnittes gehen. Dann gehören zu den Tangenten-Paaren der bezüglichen Involution insbesondere auch diejenigen drei Linien-Paare, welche die drei Puncten-Paare A und C, H und L, D und B mit dem beliebig anzunehmenden Puncte verbinden. Ist dieser wiederum der Punct M, so fallen die Linien der beiden ersten Paare in den beiden auf einander senkrechten geraden Linien MN und MN′ zusammen. Wir gelangen hiernach namentlich auch zu den folgenden Sätzen.

Wenn ein Kegelschnitt und ein Punct M gegeben sind, so bilden diejenigen geraden Linien, MD und MB, die diesen Punct mit denjenigen beiden Puncten D und B verbinden, in welchen die Polare

A. Wenn die Fläche ein Ellipsoid und ihre Gleichung die folgende ist:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1, \tag{17}$$

so ist aus den Gleichungen:

$$\lambda=1-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}, \qquad \mu=1-\frac{\gamma^2}{\beta^2},$$

ersichtlich, dass λ und μ beide positiv und kleiner als die Einheit sind, dass ferner $\mu<\lambda$. Setzen wir demnach

$$\mu\equiv\delta^2, \qquad \frac{\mu}{\lambda}=\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\gamma^2}\cdot\frac{\alpha^2}{\beta^2}\equiv\sin^2\omega, \tag{18}$$

so geht die Gleichung (4) in die folgende über

$$(x-x')^2+(y-y')^2+z^2=\delta^2\left\{(y-y'')^2+\frac{1}{\sin^2\omega}(x-x'')^2\right\}, \tag{19}$$

wobei ω derjenige Winkel ist, den die Ebenen der Kreisschnitte des Ellipsoids mit der kleinsten Axe desselben und also auch mit der ihr parallelen Directrix bilden. Da $\lambda<1$, ergibt sich $\delta^2<\sin^2\omega$.

B. Wenn die Fläche ein einschaliges Hyperboloid und ihre Gleichung die folgende ist:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma'^2}=1, \tag{20}$$

so kommt:

$$\lambda=1+\frac{\gamma'^2}{\alpha^2}, \qquad \mu=1+\frac{\gamma'^2}{\beta^2},$$

wonach λ und μ beide positiv und beide grösser als die Einheit sind; überdiess ist $\mu>\lambda$ und wenn wir, hiermit in Uebereinstimmung,

$$\lambda\equiv\delta^2, \qquad \frac{\lambda}{\mu}=\frac{\alpha^2+\gamma'^2}{\beta^2+\gamma'^2}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha^2}\equiv\sin^2\omega, \tag{21}$$

setzen, so geht die Gleichung der Fläche in die folgende über:

$$(x-x')^2+(y-y')^2+z^2=\delta^2\left\{(x-x'')^2+\frac{1}{\sin^2\omega}(y-y'')^2\right\}, \tag{22}$$

wobei $\delta^2>1$ und ω derjenige Winkel ist, welchen die Ebenen der Kreisschnitte mit der Directrix, die auf der Ebene der beiden reellen Axen senkrecht steht, bilden.

C. Wenn die Fläche ein zweischaliges Hyperboloid und ihre Gleichung die folgende ist:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta'^2}-\frac{z^2}{\gamma'^2}=1, \tag{23}$$

---

desselben die beiden Directricen schneidet, mit den beiden durch denselben Punct gehenden Tangenten, MT und MU, so wie mit den beiden durch die beiden Brennpuncte gezogenen geraden Linien, MF und MG, gleiche Winkel.

Wenn man um einen gegebenen Kegelschnitt eine vollständige vierseitige Figur beschreibt, deren zwei gegenüberliegende Winkelpuncte, D und B, auf den beiden Directricen desselben liegen, so stehen diejenigen beiden Diagonalen, AC und MN', welche die beiden andern Paare gegenüberliegender Winkelpuncte verbinden, auf einander senkrecht.

wobei wir, in Uebereinstimmung mit den Bedingungen (8), β'^2 kleiner als γ'^2 nehmen, so kommt:

$$\lambda = 1 + \frac{\gamma'^2}{\alpha^2}, \qquad \mu = 1 - \frac{\gamma'^2}{\beta'^2},$$

wonach λ positiv und μ negativ ist. Setzen wir demnach

$$\left.\begin{aligned} \lambda - \mu &= \gamma'^2 \left\{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta'^2}\right\} \equiv \rho^2, \\ -\frac{\mu}{\lambda} &= \frac{\gamma'^2 - \beta'^2}{\alpha^2 + \gamma'^2} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta'^2} \equiv \operatorname{tang}^2\omega, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

so können wir die Gleichung (4) auf die nachstehende Form bringen:

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2 = \rho^2 . \frac{(x-x'')^2 - (y-y'')^2 \operatorname{tang}^2\omega}{1 + \operatorname{tang}^2\omega}, \tag{25}$$

wobei ω derjenige Winkel ist, den die Ebenen der Kreisschnitte mit der kleinern Neben-Axe bilden. Die folgenden beiden Gleichungen

$$(x-x'') = (y-y'') \operatorname{tang}\omega, \qquad x-x'' = -(y-y'') \operatorname{tang}\omega,$$

stellen mithin zwei solche Ebenen dar, welche durch die Directrix gehen und den Kreisschnitt-Ebenen der Fläche parallel sind. Da wir den Werth von ρ^2 auch unter der Form

$$\lambda\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) = \frac{\lambda}{\cos^2\omega}$$

schreiben können, und $\lambda > 1$, so ergibt sich $\rho^2 > \dfrac{1}{\cos^2\omega}$.*)

D. Wenn die Fläche eine imaginäre und ihre Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = -1 \tag{26}$$

ist, so zeigt sich diess darin, dass λ und μ in der Gleichung (4) beide negativ werden.

214. Nehmen wir zweitens die Gleichungen (5) und (7) als identische, so ergeben sich die folgenden sechs Bedingungs-Gleichungen:

$$1-\lambda = \frac{\beta^2}{\alpha^2}, \qquad 1-\nu = \frac{\beta^2}{\gamma^2},$$

$$x'-\lambda x'' = 0, \qquad y' = 0, \qquad z'-\nu z'' = 0,$$

$$(\lambda x''^2 - x'^2) + (\nu z''^2 - z'^2) = \beta^2,$$

und hieraus

$$\lambda = 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}, \qquad \nu = 1 - \frac{\beta^2}{\gamma^2}, \tag{27}$$

$$\frac{x'^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{z'^2}{\gamma^2 - \beta^2} = 1, \tag{28}$$

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^4} . x''^2 + \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^4} . z''^2 = 1 \tag{29}$$

*) In der Gleichungs-Form (25) stellt sich die Directrix als die Durchschnitts-Linie zweier reellen Kreisschnitt-Ebenen, in den Gleichungsformen (19) und (22) aber als die Durchschnitts-Linie zweier imaginären Kreisschnitt-Ebenen dar. Demselben Unterschiede werden wir auch in den folgenden Entwicklungen begegnen. Wir wollen daher Directricen erster Art und Directricen zweiter Art unterscheiden; durch jene gehen zwei reelle Kreisschnitt-Ebenen, durch diese nicht.

Wir erhalten hier, und zwar bei allen Flächen zweiter Ordnung mit einem Mittelpuncte, für den Ort der Focalpuncte die Focal-Hyperbel der Fläche (191) und für den Ort der Directricen einen geraden hyperbolischen Cylinder, dessen Basis mit der Focal-Hyperbel in demselben Hauptschnitte liegt. Die Resultate der 211. und 212. Nummer gelten auch hier, mit Modificationen, die sich von selbst ergeben.

A. Wenn die Fläche das durch die Gleichung (17) dargestellte Ellipsoid ist, so wird in Folge der Gleichungen

$$\lambda = 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}, \qquad \nu = 1 - \frac{\beta^2}{\gamma^2}, \tag{30}$$

λ positiv und ν negativ. Setzen wir demnach

$$\lambda - \nu = \beta^2\left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) \equiv \rho^2, \qquad -\frac{\nu}{\lambda} = \frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^2-\beta^2}\cdot\frac{\alpha^2}{\gamma^2} \equiv \tang^2\omega, \tag{31}$$

so können wir die Gleichung (5) folgendergestalt schreiben:

$$(x-x')^2+y^2+(z-z')^2 = \rho^2\,\frac{(x-x'')^2-(z-z'')^2\tang^2\omega}{1+\tang^2\omega}.$$

Hier bedeutet ω wiederum denjenigen Winkel, welchen die Ebenen der Kreisschnitte des Ellipsoids mit der kleinsten Axe desselben bilden, und da $\lambda < 1$, ergibt sich:

$$\rho^2 = \frac{\lambda}{\cos^2\omega} < \frac{1}{\cos^2\omega}.$$

B. Wenn die Fläche das durch die Gleichung (20) dargestellte einschalige Hyperboloid ist, so kommt:

$$\lambda = 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}, \qquad \nu = 1 + \frac{\beta^2}{\gamma'^2}.$$

Dann sind λ und ν beide positiv und es ist $\nu > \lambda$, so dass wir

$$\lambda \equiv \delta^2, \qquad \frac{\lambda}{\nu} = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2+\gamma'^2}\cdot\frac{\gamma'^2}{\alpha^2} \equiv \sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right), \tag{32}$$

setzen können, wonach die Gleichung (5) in die folgende übergeht:

$$(x-x')^2+y^2+(z-z')^2 = \delta^2\left\{(x-x'')^2+\frac{1}{\sin^2(\frac{1}{2}\pi-\omega)}(z-z'')^2\right\}. \tag{33}$$

Es ist hierbei $\lambda = \delta^2 < 1$ und zugleich $> \sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)$ und $\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)$ bedeutet den Winkel, den die Kreisschnitt-Ebenen der Fläche mit der Axe Y und also auch mit der Directrix bilden.

C. Wenn die Fläche das durch die Gleichung (23) dargestellte zweischalige Hyperboloid ist, so kommt

$$\lambda = 1 + \frac{\beta'^2}{\alpha^2}, \qquad \nu = 1 - \frac{\beta'^2}{\gamma'^2}.$$

Setzen wir hier, wo λ und ν beide positiv sind und $\lambda > \nu$:

$$\nu \equiv \delta^2, \qquad \frac{\nu}{\lambda} = \frac{\gamma'^2-\beta'^2}{\alpha^2+\beta'^2}\cdot\frac{\alpha^2}{\gamma'^2} \equiv \sin^2\omega, \tag{34}$$

so ergibt sich für die Gleichung der Fläche:

$$(x-x')^2+y^2+(z-z')^2 = \delta^2\{(z-z'')^2+\frac{1}{\sin^2\omega}(x-x'')^2\}, \qquad (35)$$

wobei $\delta^2 < 1$ und zugleich $\delta^2 > \sin^2\omega$. Es bedeutet ω wiederum denjenigen Winkel, welchen die Kreisschnitt-Ebenen mit der Axe Y und also auch mit der Directrix bilden.

D. Für den Fall der imaginären Fläche (26) werden λ und ν beide negativ.

215. Nehmen wir drittens die Gleichungen (6) und (7) als identische, so ergeben sich, am einfachsten durch eine blosse Buchstaben-Vertauschung, aus (12)—(14) oder (27)—(29) die folgenden Gleichungen:

$$\mu = 1-\frac{\alpha^2}{\beta^2}, \qquad \nu = 1-\frac{\alpha^2}{\gamma^2},$$

$$\frac{y''^2}{\beta^2-\alpha^2}+\frac{z''^2}{\gamma^2-\alpha^2} = 1,$$

$$\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^4}\cdot y''^2+\frac{\gamma^2-\alpha^2}{\gamma^4}\cdot z''^2 = 1.$$

Die letzten beiden Gleichungen stellen imaginäre Oerter dar. Es gibt keine entsprechenden reellen Focalpuncte und auch die Directricen sind imaginär. Die Gleichungs-Form (6) ist also bei reeller Constanten-Bestimmung nicht möglich.

216. Wenn die Fläche zweiter Ordnung insbesondere in ein Paraboloid übergeht — und diess kann nothwendig der Fall sein, wenn überhaupt einem solchen ein Rotations-Kegel sich umschreiben lässt (210) — können wir an die Stelle der Gleichung (7) die folgende setzen:

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q} = 2x. \qquad (36)$$

Dann sind p und q die halben Parameter der beiden Hauptschnitte des Paraboloids, die in den Ebenen XY und XZ liegen. Wenn p und q beide gleiches Zeichen haben, und dann können wir beide positiv und

$$p > q \qquad (37)$$

nehmen, so ist das Paraboloid ein elliptisches. In dem Falle entgegengesetzter Zeichen, wollen wir, in Uebereinstimmung mit der vorstehenden Bedingung, p positiv und q negativ nehmen; dann ist das Paraboloid ein hyperbolisches.

Setzen wir hiernach erstens die Gleichungen (4) und (36) identisch, so kommt:

$$\lambda = 1, \qquad 1-\mu = \frac{q}{p},$$

$$x'-\lambda x'' = q, \qquad y'-\mu y'' = 0, \qquad z' = 0,$$

$$(x'^2-\lambda x''^2)+(y'^2-\mu y''^2) = 0,$$

und hieraus:

$$\lambda = 1, \qquad \mu = \frac{p-q}{p}, \qquad (38)$$

$$y'^2-2(p-q)(x'-\tfrac{1}{2}q) = 0, \qquad (39)$$

$$y''^2-\frac{2p^2}{p-q}(x''+\tfrac{1}{2}q) = 0. \qquad (40)$$

Da z' verschwindet, so liegt der Focalpunct in der Ebene XY und kann in dieser Ebene beliebig auf der durch die Gleichung (39), in der Voraussetzung, dass wir y' und x' als veränderlich betrachten, dargestellten Parabel angenommen werden. Diese Parabel ist die erste Focal-Parabel des

Paraboloids (206). Die entsprechende Directrix steht auf derselben Coordinaten-Ebene senkrecht und ist eine Seite des durch (40) dargestellten parabolischen Cylinders. Die Basis des Cylinders und die Focal-Parabel sind zugeordnete Polar-Curven in Beziehung auf die Durchschnitts-Parabel der Fläche in eben dieser Coordinaten-Ebene. Wir erhalten ferner

$$y'y'' - p\,(x' + x'') = 0,$$
$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{y''}{p},$$
$$x' - x'' = q.$$

Aus den ersten dieser drei Gleichungen ist ersichtlich, dass der Fusspunct $(x'', y'', 0)$ der Directrix, in Beziehung auf die Durchschnitts-Curve in dem Hauptschnitte XY, auf der Polaren des Focalpunctes und dieser auf der Polaren jenes Fusspunctes liegt; die zweite Gleichung zeigt, dass eine Ebene, welche durch die Directrix und den Focalpunct geht, die Focal-Parabel in letztgenanntem Puncte rechtwinklich schneidet, die dritte Gleichung endlich, dass die Projection der kürzesten Entfernung des Focalpunctes von der Directrix auf die Axe des Paraboloids constant und gleich q ist.

Setzen wir zweitens die Gleichungen (5) und (36) identisch, so erhalten wir, einer einfachen Vertauschung von z und y, q und p, ν und μ entsprechend,

$$\lambda = 1, \qquad \nu = \frac{q - p}{q}, \tag{41}$$

$$z'^2 + 2\,(p - q)\,(x' - \tfrac{1}{2}p) = 0, \tag{42}$$

$$z''^2 + \frac{2q^2}{p - q}\,(x + \tfrac{1}{2}p) = 0, \tag{43}$$

$$x' - x'' = p.$$

Die Gleichung (42) stellt die zweite Focal-Parabel dar (206).

Was drittens die Gleichungs-Form (6) betrifft, so ist es unmöglich, dieselbe mit (36) identisch zu machen.

A. Nehmen wir für den Fall des elliptischen Paraboloids den Focalpunct auf der ersten ganz innerhalb der Fläche liegenden Focal-Parabel (39), so können wir, indem wir

$$\mu = \frac{p - q}{p} = \cos^2\omega, \qquad \frac{q}{p} = \sin^2\omega, \qquad \frac{q}{q - p} = -\tang^2\omega, \tag{44}$$

setzen, die Gleichung (4) auf folgende Weise schreiben:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2 = \sin^2(\tfrac{1}{2}\pi - \omega)\left\{(y - y'')^2 + \frac{1}{\sin^2(\tfrac{1}{2}\pi - \omega)}\,(x - x')^2\right\} \tag{45}$$

Es bedeutet hier ω denjenigen Winkel, welchen die Kreisschnitt-Ebenen mit der Axe X, der Axe des Paraboloids, bilden. Diese Ebenen stehen auf dem Hauptschnitte XZ, der die Durchschnitts-Parabel mit dem kleinern Parameter 2q enthält, senkrecht und bilden also mit der Axe Z, die hier der Directrix parallel ist, den Winkel $(\frac{1}{2}\pi - \omega)$.

Nehmen wir den Focalpunct auf der zweiten, die Fläche schneidenden, Focal-Parabel (42) an, so wird, während λ der Einheit gleich bleibt, ν negativ und nach dem Vorstehenden gleich $-\tang(\frac{1}{2}\pi - \omega)$. Alsdann geht die Gleichung (5) in die folgende über:

$$(x - x')^2 + y^2 + (z - z')^2 = \frac{1}{\cos^2(\frac{1}{2}\pi - \omega)} \cdot \frac{(x - x'')^2 - (z - z'')^2 \tang^2(\frac{1}{2}\pi - \omega)}{1 + \tang^2(\frac{1}{2}\pi - \omega)}. \tag{46}$$

Die beiden Gleichungen

$$z - z'' = \pm (x - x'') \tang\omega$$

stellen hier diejenigen beiden Kreisschnitte der Fläche dar, welche durch die Directrix, die der Axe Y parallel ist, gehen.

B. Für den Fall des hyperbolischen Paraboloids ist

$$\tang^2\omega = -\frac{p}{q}, \tag{47}$$

indem wir denjenigen Winkel ω nennen, welche solche Ebenen, die die Fläche nur in einer einzigen geraden Linie schneiden, mit dem Hauptschnitte XY bilden. Demnach ist ferner

$$\cos^2\omega = \frac{q}{q-p}, \qquad \sin^2\omega = \frac{p}{p-q}.$$

Nehmen wir hiernach den Focalpunct auf der ersten Focal-Parabel (39), so kommt

$$\lambda = 1, \qquad \mu = \frac{1}{\sin^2\omega},$$

wonach die Gleichung (4) in die folgende übergeht:

$$(x-x')^2+(y-y')^2+z^2 = (x-x'')^2 + \frac{1}{\sin^2\omega}(y-y'')^2, \tag{48}$$

und ω derjenige Winkel ist, den die oben bezeichneten Schnitt-Ebenen, welche die Kreisschnitt-Ebenen vertreten, mit der Axe Z, der die Directrix parallel ist, bilden.

Nehmen wir den Focalpunct auf der zweiten Focal-Parabel (42), so kommt:

$$\lambda = 1, \qquad \nu = \frac{1}{\cos^2\omega} = \frac{1}{\sin^2(\frac{1}{2}\pi - \omega)},$$

wonach die Gleichung (5) folgende Form annimmt:

$$(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2 = (x-x'')^2 + \frac{1}{\sin^2(\frac{1}{2}\pi-\omega)}(z-z'')^2, \tag{49}$$

und $(\frac{1}{2}\pi - \omega)$ der Winkel ist, den die Directrix mit den fraglichen Schnitt-Ebenen bildet.

217. Um der Anschauung zur Hülfe zu kommen, füge ich für die verschiedenen Hauptfälle eine bildliche Darstellung hinzu. Da sichs hierbei zunächst um Constructionen in den drei Hauptschnitten der Fläche handelt und diese für jeden der acht Theile, in welche diese Fläche durch die in ihrem Mittelpuncte sich schneidenden Coordinaten-Ebenen getheilt wird, symmetrisch sind, so denken wir uns in den Figuren 6, 7 und 8 die Ebene des Hauptschnittes ZX um die Axe X und die Ebene des Hauptschnittes ZY um die Axe Y so lange gedreht, bis beide mit der Ebene des Hauptschnittes XY zusammenfallen und führen die Constructionen nur für denjenigen Theil der Fläche aus, welcher in der von den positiven Axen-Richtungen gebildeten Ecke liegt.

Fig.6-10. In der 6. Figur sind OA, OB, OC die grosse, mittlere und kleine Halb-Axe des Ellipsoids (17); AB, AC und BC die Durchschnitts-Ellipsen in den Hauptschnitten der grossen und mittlern, der grossen und kleinen und der mittlern und kleinen Axe. Die Kreisschnitt-Ebenen stehen auf der Ebene des Hauptschnittes der grossen und kleinen Axe senkrecht und schneiden diese Ebene in zwei Systemen von geraden Linien, die bezüglich mit OK und mit der Tangente der Durchschnitts-Curve im Kreispuncte Q parallel sind. Es ist ω der Winkel, den die Kreisschnitt-Ebenen, deren zwei durch die mittlere Axe OB gehen, mit der kleinen Axe OC, und folglich $(\frac{1}{2}\pi - \omega)$ der Winkel,

den sie mit der grossen Axe OA bilden. Die Focal-Ellipse, welche in dem Hauptschnitte der grossen und mittlern Axe liegt, ist F′MF″; sie geht durch die Puncte F′ und F″, welche Brennpuncte der beiden Ellipsen AC und BC sind. Der geometrische Ort für die zugehörigen Directricen zweiter Art ist ein elliptischer Cylinder, der auf der Ebene dieses Hauptschnittes senkrecht steht und dieselbe in der Ellipse D′ND″ schneidet; er enthält die beiden geraden Linien D′G′ und D″G″, welche zugleich Directricen der beiden Ellipsen AC und BC sind, die F′ und F″ zu Brennpuncten haben. M ist irgend ein Focalpunct, N der Fusspunct der zugehörigen Directrix, und (19) die entsprechende Gleichungs-Form. Die Focal-Hyperbel, welche in der Ebene der grossen und kleinen Axe liegt, ist M′FQ; sie geht durch den Brennpunct F der Ellipse AB und durch den Kreispunct Q, der auf der Ellipse AC liegt. Der geometrische Ort für die zugehörigen Directricen erster Art ist ein hyperbolischer Cylinder, der auf der Ebene der grossen und kleinen Axe senkrecht steht und dieselbe in der Hyperbel DN′ schneidet; DG ist eine Scheitellinie desselben und zugleich eine Directrix der Durchschnitts-Ellipse AB. M′ ist irgend ein Focalpunct, N′ der Fusspunct der zugehörigen Directrix erster Art, N′S und N′T sind diejenigen beiden geraden Linien, in welche die durch dieselbe parallel mit den Kreisschnitten gelegten Ebenen die Ebene der grossen und kleinen Axe schneiden: (31) ist die entsprechende Gleichungs-Form.

In der 7. Figur sind OA und OB die beiden Halb-Axen und OC′ ist die halbe Neben-Axe des durch die Gleichung (20) dargestellten einschaligen Hyperboloids. Die Durchschnitts-Curven in den drei Hauptschnitten, sind die Ellipse AB und die beiden Hyperbeln AV und BW. Durch die grössere Axe OA gehen zwei Kreisschnitte und bilden mit der Neben-Axe OC′ den Winkel ω und also mit der kleinern Axe OB den Winkel $(\frac{1}{2}\pi - \omega)$. OK ist die gerade Linie, in welcher einer dieser beiden Kreisschnitte die Ebene der kleinern Axe und der Neben-Axe, auf der sie senkrecht stehen, schneidet. Die Focal-Ellipse, die in der Ebene der beiden reellen Axen liegt ist F′MF″ und geht durch F″ einen Brennpunct der Hyperbel BW. Der geometrische Ort für die zugehörigen Directricen ist ein elliptischer Cylinder, der die Fläche nicht schneidet und die Neben-Axe derselben zu seiner Axe hat; er steht auf der Ebene der beiden reellen Axen senkrecht und schneidet sie in der Ellipse D′ND″; D′G′ und D″G″ sind zwei Scheitellinien desselben und zugleich zwei Directricen der beiden eben genannten Hyperbeln AV und BW. Die Focal Hyperbel, die in der Ebene der grössern Axe OA und der Neben-Axe OC′ liegt, ist FM′ und geht durch F, einen Brennpunct der Durchschnitts-Ellipse AB in der Ebene der beiden reellen Axen. Der geometrische Ort für die zugehörigen Directricen ist ein die Fläche nicht schneidender hyperbolischer Cylinder, der auf der Ebene der Focal-Hyperbel senkrecht steht und dieselbe in der Hyperbel DN′ schneidet. DG ist eine Scheitellinie dieses Cylinders und zugleich eine Directrix der Durchschnitts-Ellipse AB. Je nachdem wir den Focalpunct auf der Focal-Ellipse etwa in M oder auf der Focal-Hyperbel etwa in M′ annehmen, können wir die Fläche durch die Gleichungen (22) oder (33) darstellen. Es sind N und N′ die Fusspuncte der zugehörigen Directricen, die in dem Falle des einschaligen Hyperboloids beidesmal von der zweiten Art sind.

In der 8. Figur ist OA die reelle Halb-Axe, OB′ die halbe kleinere und OC′ die halbe grössere Neben-Axe des durch die Gleichung (25) dargestellten zweischaligen Hyperboloids. Die Durchschnitts-Curve in der Ebene der reellen Axe und der kleinern Neben-Axe ist die Hyperbel AQU, die Durchschnitts-Curve in der Ebene der reellen Axe und der grössern Neben-Axe die Hyperbel AV. Die Kreisschnitt-Ebenen stehen auf der erstern dieser beiden Ebenen senkrecht, und eine derselben schneidet diese Ebene in der geraden Linie OK. Die Focal-Ellipse F′QF″ schneidet die Hyperbel AQU in derselben Ebene in dem Kreispuncte Q und hat den Brennpunct F′ der andern Hyperbel

AV zu einem Scheitel ihrer grossen Axe. (Der Scheitel ihrer kleinen Axe ist der reelle Brennpunct F″ der imaginären Durchschnitts-Curve in der Ebene der beiden Neben-Axen.) Die zugehörigen Directricen sind von der ersten Art, und der Ort für dieselben ist ein elliptischer Cylinder, der auf der Ebene der Focal-Ellipse senkrecht steht und dieselbe in der Ellipse D′ND„ schneidet. D′G′ und D„G„ sind zwei Scheitel-Linien dieses Cylinders, die erste zugleich Directrix der Durchschnitts-Hyperbel AV, die zweite, deren zugehörigem Focalpuncte F„ ein negatives y entspricht, zugleich eine Directrix der imaginären Durchschnitts-Curve in der Ebene der beiden Neben-Axen. N ist der Fusspunct einer Directrix, die beiden durch dieselbe gelegten Kreisschnitt-Ebenen schneiden die Ebene der Focal-Ellipse in den geraden Linien NS und NT. Die von diesen Ebenen gebildeten Scheitel-Winkel, innerhalb welcher die Fläche liegt, ist $(\pi - 2\omega)$, wie in dem Falle des Ellipsoids. Die Focal-Hyperbel FM′, die in der Ebene der reellen Axe und der grössern Neben-Axe liegt, geht durch F, einen Brennpunct der Durchschnitts-Hyperbel AU; der Ort für die entsprechenden Directricen zweiter Art ist ein gerader hyperbolischer, die Fläche umschliessender Cylinder, dessen Basis DN′, und der DG, eine Directrix der eben genannten Durchschnitts-Hyperbel AU, zu einer seiner Scheitel-Linien hat. M′ ist ein Focalpunct, N′ der Fusspunct der zugehörigen Directrix und (35) die entsprechende Gleichungs-Form.

In den Fällen der 6 — 8. Figur sind die Ellipse F′F″ und die Hyperbel FJ zwei zusammengehörige Focal-Curven, die beiden Brennpuncte der erstern sind die Scheitel der Quer-Axe der letztern, die beiden Brennpuncte der letztern die Scheitel der grossen Axe der erstern.

In den Fällen der beiden Paraboloide (36), wo ein Hauptschnitt unendlich weit liegt, nehmen wir von den beiden übrigen den ersten XY in der Ebene der Figur an, und denken uns den zweiten XZ durch eine Drehung um die Axe X in dieselbe Ebene zurückgeführt.

In der 9. Figur sind OU und OV die beiden Durchschnitts-Parabeln eines elliptischen Paraboloids in den beiden Hauptschnitten, jene mit dem grössern, diese mit dem kleinern Parameter. Die erste Focal-Parabel ist F′M und ihr Scheitel F′ der Brennpunct der Durchschnitts-Parabel OV; der Ort der zugehörigen Directricen zweiter Art der gerade parabolische Cylinder, der D′N zur Basis hat; die Directrix der Durchschnitts-Parabel OV ist seine Scheitel-Linie. M ist ein Focalpunct, N der Fusspunct der zugehörigen Directrix und (45) die entsprechende Gleichungs-Form. Die zweite Focal-Parabel ist FQ, sie geht durch den Kreispunct Q und durch den Brennpunct F der Parabel OU; der Ort der zugehörigen Directricen erster Art der gerade parabolische Cylinder, dessen Basis DN′, und dessen Scheitel-Linie DG die Directrix der Parabel OU ist. Der Gleichungs-Form (46) entspricht die Annahme irgend eines Focalpunctes M′, wo dann N′ der Fusspunct der zugehörigen Directrix ist, durch welche zwei Kreisschnitt-Ebenen gehen, die die Ebene der zweiten Focal-Parabel in den beiden geraden Linien N′S und N′T schneiden und einen Winkel, innerhalb desselben die Fläche liegt, bilden, der gleich 2ω ist.

In der 10. Figur sind OU und OV die beiden in entgegengesetztem Sinne sich öffnenden Parabeln in den beiden Hauptschnitten eines hyperbolischen Paraboloids. Die erste Focal-Parabel ist F′M, die zweite FM′. Die Scheitel dieser beiden Focal-Parabeln sind bezüglich die beiden Brennpuncte F′ und F der beiden Parabeln OV und OU. Die zugehörigen Directricen sind beidesmal von der zweiten Art, der Ort für dieselben die beiden geraden parabolischen Cylinder, deren Basen bezüglich D′N und DN′ und deren Scheitel-Linien, D′G′ und DG, die Directricen der beiden Parabeln OV und OU sind. Je nachdem wir den Focalpunct auf der ersten oder zweiten Focal-Parabel annehmen, etwa in M oder M′, ergeben sich die Gleichungen (48) oder (49). Der Fusspunct der entsprechenden Directrix ist N oder N′.

In den Fällen der 9. und 10. Figur sind FJ und F′J′ zwei zusammengehörige Focal-Parabeln, die jedesmal gleichen Parameter haben.

218. Die in dem Vorstehenden betrachteten Flächen, das Ellipsoid, die beiden Hyperboloide und die beiden Paraboloide lassen sich und zwar auf zwiefache Weise durch eine Gleichung von der Form der Gleichung (3) ausdrücken. Diese Gleichung selbst nimmt, je nachdem die beiden linearen Functionen s und t reell oder imaginär sind, die Form der ersten oder zweiten der nachstehenden Gleichungen an:

$$(x-x')^2 + z^2 = \rho^2 \cdot \frac{(x-x'')^2 + (y-y'')^2 \tan g^2\omega}{1 + \tan g^2\omega}, \qquad \text{I.}$$

$$= \rho^2 \{(x-x'')^2 \cos^2\omega - (y-y'')^2 \sin^2\omega\};$$

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2 = \delta^2 \{(x-x'')^2 + \frac{1}{\sin^2\omega}(y-y'')^2\}. \qquad \text{II.}$$

Indem wir der Kürze halber

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2 \equiv R^2,$$

$$(x-x'')\cos\omega + (y-y'')\sin\omega \equiv S, \qquad (x-x'')\cos\omega - (y-y'')\sin\omega \equiv T,$$

setzen, können wir die Gleichungs-Form I. auch folgendergestalt schreiben:

$$R^2 = \rho^2 ST. \qquad (50)$$

Auf irgend einen gegebenen Punct der Fläche bezogen, erhält R die Bedeutung des Abstandes dieses Punctes von dem Puncte (x′, y′, 0) und S und T erhalten die Bedeutung kürzester Abstände desselben Punctes von den beiden Ebenen

$$S = 0, \qquad T = 0.$$

Wenn irgend ein Punct und zwei Ebenen gegeben sind, so ist der geometrische Ort solcher Puncte, deren Abstand von dem gegebenen Puncte zu der mittlern Proportionalen aus den kürzesten Abständen von den beiden gegebenen Ebenen in einem gegebenen Verhältnisse steht, eine Fläche der zweiten Ordnung.

Diese Fläche ist immer eine nicht geradlinige und zwar, was ein Blick auf die Gleichungen (31), (46) und (25) unmittelbar zeigt, ein Ellipsoid, ein elliptisches Paraboloid oder ein elliptisches Hyperboloid je nachdem

$$\rho^2 < \frac{1}{\cos^2\omega}, \qquad \rho^2 = \frac{1}{\cos^2\omega}, \qquad \rho^2 > \frac{1}{\cos^2\omega}.$$

Es bedeutet ω die Hälfte des Winkels, den die beiden gegebenen Ebenen mit einander bilden, wobei zu berücksichtigen ist, dass wir diesen Winkel so wählen müssen, dass, für Puncte innerhalb desselben, S und T entgegengesetzte Zeichen haben. Der gegebene Punct ist ein Focalpunct der Fläche und liegt auf derjenigen Focal-Curve, die diese Fläche in den Kreispuncten schneidet, und also für den Fall des Ellipsoids auf der Focal-Hyperbel (in der Ebene der kleinsten und grössten Axe), für den Fall des elliptischen Hyperboloids auf der Focal-Ellipse (in der Ebene der reellen Axe und der kleinern Nebenaxe) und für den Fall des elliptischen Paraboloids auf der Focal-Parabel in dem Hauptschnitte des kleinern Parameters. Die Durchschnitts-Linie der beiden gegebenen Ebenen ist die zugehörige Directrix; diese Ebenen selbst sind Kreisschnitt-Ebenen der Fläche, die Durchschnitts-Kreise in ihnen aber imaginär, was aus der Gleichung (50) unmittelbar ersichtlich ist. Nur in dem Falle, dass der gegebene Punct in den Kreispunct fällt, berührt eine der beiden Ebenen die Fläche, sonst können beide keinen Punct gemein haben. Durch Umkehrung ergibt sich der nachstehende Satz.

Wenn man von irgend einem Puncte einer gegebenen nicht geradlinigen Fläche zweiter Ordnung nach einem auf derjenigen Focal-Curve, welche durch die Kreispuncte der Fläche geht, beliebig angenommenen Focalpuncte eine gerade Linie zieht und auf diejenigen beiden Kreisschnitt-Ebenen der Fläche, welche in der zugehörigen Directrix sich schneiden, Perpendikel fällt, so steht jene gerade Linie zu der mittlern Proportionalen aus diesen beiden Perpendikel in einem constanten Verhältnisse.

219. Bei einer andern Annahme von Focalpunct und Directrix bleibt diess constante Verhältniss immer unverändert dasselbe. Um es für eine gegebene Fläche zu bestimmen, wollen wir die Gleichung (50) mit der folgenden zusammenstellen

$$S = T,$$

wonach für die Puncte der Durchschnitts-Curve in der durch die letzte Gleichung dargestellten Ebene

$$R = \rho S$$

sich ergibt. Statt des Abstandes S können wir die kürzesten Abstände solcher Puncte von der Durchschnitts-Linie der beiden Ebenen S und T einführen und durch L bezeichnen. Es ergibt sich nemlich, wenn wir berücksichtigen, dass derjenige von diesen Ebenen gebildete Winkel, innerhalb dessen die fraglichen Puncte liegen, $(\pi - 2\omega)$ ist:

$$S = L\cos\omega$$

und hiernach, indem wir

$$\rho\cos\omega \equiv \mu$$

setzen:

$$R = \mu L. \qquad (51)$$

Je nachdem

$$\mu < 1, \qquad \mu = 1, \qquad \mu > 1,$$

ist die Fläche ein Ellipsoid, ein elliptisches Paraboloid oder ein elliptisches Hyperboloid.

Die vorstehenden Entwickelungen gelten für alle Fälle, wo auch der Focalpunct auf der bezüglichen Focal-Curve liegen mag, nehmen wir ihn insbesondere im Scheitel dieser Curve an, so liegt die fragliche Durchschnitts-Curve in demjenigen Hauptschnitte, welcher im Falle des Ellipsoids die grösste und mittlere Axe, im Falle des Hyperboloids die reelle Axe und die grössere Neben-Axe, im Falle des Paraboloids den grössern Parameter enthält. Es ist somit bewiesen, dass für alle Puncte einer gegebenen Ellipse, Parabel und Hyperbel das Verhältniss der Abstände von einem Brennpuncte (jener Scheitel der Focal-Curve der Fläche) und von der zugehörigen Directrix (zugleich Directrix der Curve im engern Sinne) constant ist und dass die Art der Curve davon abhängt, ob dieses Verhältniss kleiner als die Einheit, gleich der Einheit oder grösser als dieselbe ist. Aus diesem Verhältnisse (μ) ergibt sich unmittelbar der constante Coefficient ρ.

Wenn der Focalpunct auf der fraglichen Focal-Curve fortrückt, bleibt die schneidende Ebene mit sich selbst und dem eben bestimmten Hauptschnitte parallel, sie enthält noch die Directrix, aber nicht mehr den Focalpunct. Wir sehen also, dass der eben angezogene Satz noch eine Verallgemeinerung zulässt und dass er für eine gegebene Curve auch dann fortbesteht, wenn der Focalpunct (ursprünglich der eigentliche Brennpunct) aus ihrer Ebene herausrückt, während sich die Directrix in ihrer Ebene parallel verschiebt. Auf die desfallsigen nähern Bestimmungen werden wir bald zurückkommen (222).

Wenn wir durch die Directrix, welche Lage dieselbe auch haben mag, irgend eine Schnitt-Ebene, deren Gleichung, bei Annahme irgend eines positiven Werthes für x die folgende ist:

$$S = \varkappa T,$$

legen, so erhalten wir für die Durchschnitts-Curve in derselben wiederum die Gleichung (51), nur dass μ einen andern Werth bekommt. Wenn wir insbesondere also die Schnitt-Ebene durch den zugehörigen Focalpunct legen, wobei diese Ebene auf der Focal-Curve senkrecht steht, so ist dieser Focalpunct ein Brennpunct der Durchschnitts-Curve.

220. Wenn wir bloss solche Puncte der Fläche betrachten, welche in demjenigen Hauptschnitte derselben liegen, der auch die Kreispuncte enthält und zugleich berücksichtigen, dass dieselbe Durchschnitts-Curve in diesem Hauptschnitte unendlich vielen Flächen zweiter Ordnung, deren jede eine besondere Focal-Curve bestimmt, angehört, so ergibt sich der folgende Satz.

Wenn ein Kegelschnitt gegeben ist, so können wir in der Ebene desselben einen Punct willkührlich annehmen und dann in derselben Ebene zwei gerade Linien immer so bestimmen, dass das Verhältniss des Abstandes eines Punctes des Kegelschnittes von dem angenommenen Puncte zu der mittlern Proportionalen aus den kürzesten Abständen von den beiden geraden Linien constant ist.

221. Betrachten wir diejenigen Puncte der durch die Gleichung

$$R^2 = \rho^2 ST$$

dargestellten Fläche, welche unendlich weit liegen, so können wir um die Richtung zu bestimmen, nach welcher sie unendlich weit liegen, annehmen, dass die Ebenen S und T durch den Focalpunct gehen, und erhalten also die Asymptoten der Fläche, wenn wir diesen Punct in den Mittelpunct derselben verlegen. Setzen wir hiernach

$$\frac{S}{R} \equiv \sin\eta, \quad \frac{T}{R} \equiv \sin\eta',$$

so ergibt sich

$$\sin\eta \sin\eta' = \frac{1}{\rho^2}, \tag{52}$$

wobei η und η' diejenigen Winkel bedeuten, welche die jedesmalige Asymptote mit den Kreisschnitt-Ebenen der Fläche bildet. Diese Gleichung, die nur für den Fall des elliptischen Hyperboloids, wo $\frac{1}{\rho^2} < \cos^2\omega$, bestehen kann, ist als die Gleichung des Asymptoten-Kegels dieser Fläche anzusehen. Berücksichtigen wir zugleich, dass die Kreisschnitte der Fläche zugleich auch die Kreisschnitte des Asymptoten-Kegels sind, so ergibt sich unmittelbar der folgende Satz.

Jede Seite eines gegebenen Kegels zweiter Ordnung bildet mit den beiden Kreisschnitt-Ebenen desselben Winkel, deren Sinus ein constantes Product geben.

222. Wir wollen ferner, der Kürze halber,

$$(x - x'')^2 + \frac{1}{\sin^2\omega}(y - y'')^2 \equiv D^2$$

setzen. Dann stellt diese Gleichung, als eine nicht identische betrachtet, einen geraden Cylinder mit elliptischer Basis dar, und D bedeutet die grössere Halb-Axe dieser Basis oder, was dasselbe heisst, den Abstand irgend eines Punctes dieses Cylinders von der Axe desselben, parallel mit derjenigen Ebene genommen, die den Cylinder in Kreisen schneiden; denn der Radius dieser Kreise ist jener grössern Halb-Axe gleich. Die Kreisschnitte, die durch die grössere Axe der Basis gehen, bilden mit der Axe des Cylinders einen Winkel ω. Wir können hiernach, indem wir zugleich die Quadrat-Wurzel ausziehen, der Gleichung II. die folgende Form geben:

$$R = \delta.D. \qquad (54)$$

Wenn irgend ein Punct, eine gerade Linie und, der Richtung nach, eine Ebene gegeben sind, so ist der geometrische Ort solcher Puncte, deren Abstand von dem gegebenen Puncte zu dem Abstande von der gegebenen geraden Linie, dieser letztere Abstand parallel mit der, der Richtung nach, gegebenen Ebene genommen, in einem gegebenen Verhältnisse steht, eine Fläche der zweiten Ordnung.

Werfen wir einen Blick auf die Gleichungen (19), (22), (33), (35), (45), (48) und (49), so sehen wir, dass ein System von Kreisschnitt-Ebenen der Fläche die gegebene Ebenen-Richtung hat, und wir erhalten sogleich das andere System, wenn wir Ebenen so legen, dass sie gegen die gegebene gerade Linie gleich geneigt sind und ihre Durchschnitts-Linien mit den Ebenen des ersten Systems auf der gegebenen geraden Linie senkrecht stehen.

Wenn erstens

$$\delta < \sin\omega$$

so ist die Fläche ein Ellipsoid (19), wenn zweitens

$$\delta = \sin\omega$$

ein elliptisches Paraboloid (45), wenn drittens

$$\delta > \sin\omega < 1$$

so ist die Fläche entweder ein ein- oder ein zweischaliges Hyperboloid (33), (35); wenn viertens

$$\delta = 1$$

so ist die Fläche ein hyperbolisches Paraboloid (48), (49) und fünftens endlich, wenn

$$\delta > 1$$

ein hyperbolisches Hyperboloid (22).

Wenn wir umkehren, so ergeben sich die folgenden beiden Sätze:

Wenn man von einem Puncte einer gegebenen nicht geradlinigen Fläche zweiter Ordnung nach einem auf der, die Fläche nicht schneidenden Focal-Curve liegendem Focalpuncte eine gerade Linie zieht und von demselben Puncte, parallel, mit einer Kreisschnitt-Ebene, was auf doppelte Weise geschehen kann, eine zweite gerade Linie nach der bezüglichen Directrix, so ist das Verhältniss dieser beiden geraden Linien für alle Puncte der Fläche constant.

Und zwar ist

$$\delta < \sin\omega, \qquad \delta = \sin\omega, \qquad \delta > \sin\omega < 1,$$

je nachdem die Fläche ein Ellipsoid, ein elliptisches Paraboloid oder ein elliptisches Hyperboloid ist.

Wenn man von einem Puncte einer gegebenen geradlinigen Fläche zweiter Ordnung nach einem auf einer der beiden Focal-Curven angenommenen Focalpuncte, so wie auch, parallel mit einer der beiden Kreisschnitt-Ebenen, nach der zugehörigen Directrix eine gerade Linie zieht, so ist das Verhältniss dieser beiden geraden Linien für alle Puncte der Fläche ein constantes.

Es ist hierbei immer $\delta > \sin\omega$. Die Fläche ist ein hyperbolisches Paraboloid, wenn $\delta = 1$, sonst ein hyperbolisches Hyperboloid und zwar ist in diesem Falle $\delta > 1$, oder $\delta < 1$, je nach-

dem der Focalpunct auf der Focal-Ellipse oder auf der Focal-Hyperbel angenommen wird. Für den Fall des Paraboloids sind, statt der Kreisschnitt-Ebenen, diejenigen Ebenen zu nehmen, welche die Fläche nur in einer einzigen geraden Linie schneiden.

223. Die Directrix ist immer einer Axe der Fläche parallel; sie ist eine Directrix erster Art, wenn diese Axe diejenige ist, durch welche zwei Kreisschnitte sich legen lassen, sonst eine Directrix zweiter Art. Im ersten Falle ist durch die beiden Kreisschnitte unmittelbar die Richtung sämmtlicher drei Axen und hiernach durch den Focalpunct ein Hauptschnitt bestimmt. Im letztern Falle sind, wenn eine beliebige Kreisschnitt-Ebene und eine Directrix zweiter Art gegeben sind, die auf der Richtung dieser Directrix senkrechten Axen-Richtungen der Fläche ebenfalls bestimmt. Diejenige gerade Linie, welche in der beliebigen Kreisschnitt-Ebene liegt, und zugleich auf der Directrix senkrecht steht, hat die eine dieser Axen-Richtungen, wonach die andere sich unmittelbar ergibt. Legen wir durch die eben bestimmte gerade Linie eine zweite gegen die Directrix gleich geneigte Ebene, so ist diese den Kreisschnitt-Ebenen des zweiten Systems parallel.

224. Es liegt uns zunächst noch ob, für eine gegebene Fläche der zweiten Ordnung, den durch δ bezeichneten Coefficienten zu bestimmen, der unverändert derselbe bleibt, wie wir auch den Focalpunct auf der jedesmaligen Focal-Curve annehmen mögen und desshalb für die Fläche characteristisch ist.

Nehmen wir zuvörderst den Fall des durch die Gleichung (19) dargestellten Ellipsoids, als Fig. 6.
Focalpunct F'', als Directrix $D''G''$ und betrachten nur solche Puncte, die in der Ebene YZ, also auf der Ellipse der mittlern und kleinen Axe liegen, so ist

$$x' = 0, \quad x'' = 0, \quad x = 0,$$

und es kommt:

$$(y - y')^2 + z^2 = \delta^2 (y - y'')^2,$$

mithin, wenn L'' irgend ein Punct der fraglichen Ellipse BC und $L''H''$ sein kürzester Abstand von der Directrix ist:

$$\delta = \frac{L''F''}{L''H''} < \sin\omega.$$

Aehnlich können wir auch in dem Falle des einschaligen Hyperboloids verfahren, sowohl wenn Fig. 7.
wir dasselbe durch die Gleichung (22), als auch wenn wir dasselbe durch die Gleichung (33) darstellen. Nehmen wir, der ersten Gleichung entsprechend, F' zum Focalpuncte und $D'G'$ zur Directrix und betrachten wir nur die Puncte der Durchschnitts-Hyperbel AV in der Ebene XZ, so kommt indem wir

$$y' = 0, \quad y'' = 0, \quad y = 0,$$

setzen, für irgend einen solchen Punct L':

$$\delta = \frac{L'F'}{L'H'} > 1.$$

Nehmen wir, der Gleichung (33) entsprechend, F zum Focalpuncte und DG zur Directrix und Fig. 8.
betrachten wir nur die Puncte der Durchschnitts-Ellipse in der Ebene XY, so kommt, indem wir

$$z' = 0, \quad z'' = 0, \quad z = 0$$

setzen, für irgend einen solchen Punct L:

$$\delta = \frac{LF}{LH} > \sin\omega < 1.$$

$L'H'$ und LH sind kürzeste Abstände der jedesmaligen Puncte von der bezüglichen Directrix.

Da wir überhaupt jede gegebene Ellipse als diejenige betrachten können, die in dem Hauptschnitte der mittlern und kleinen Axe eines Ellipsoids oder in dem Hauptschnitte der beiden reellen Axen eines einschaligen Hyperboloids und jede gegebene Hyperbel als diejenige, welche in der Ebene der grossen Axe und der Neben-Axe des letztern liegt: so ist zunächst wiederum bewiesen, dass für eine gegebene Ellipse und Hyperbel das Verhältniss der Abstände jedes Punctes von dem Brennpuncte und der zugehörigen Directrix constant und, wie bekannt, der Excentricität dieser Curven gleich ist. Und dann ist ferner ersichtlich, dass die Excentricität der eben bezeichneten Curven die characteristische Constante δ für das Ellipsoid (Gl. 19), wenn der Focalpunct auf der Focal-Ellipse, und für das einschalige Hyperboloid ist, wenn der Brennpunct einmal auf der Focal-Hyperbel (Gl. 33), das andere Mal auf der Focal-Ellipse (Gl. 22) angenommen wird.

Für das hyperbolische Paraboloid ist die characteristische Constante δ der Einheit gleich, so wie auch für die Durchschnitts-Parabeln in den beiden Hauptschnitten, das Verhältniss der Abstände jedes Punctes von Brennpunct und Directrix der Einheit gleich ist.

Wenn endlich die Fläche das durch die Gleichung (35) dargestellte zweischalige Hyperboloid ist, und wir F als Focalpunct und DG als Directrix nehmen, so kommt für die Puncte der Durchschnitts-Hyperbel AU in der Ebene der reellen Axe und der kleinen Neben-Axe, indem wir

$$z' = 0, \quad z'' = 0, \qquad z = 0$$

setzen:

$$(x - x')^2 + y'^2 = \frac{\delta^2}{\sin^2 \omega} (x - x'')^2,$$

mithin:

$$\delta = \frac{LF}{LH} \cdot \sin\omega = \frac{LF}{LR} > \sin\omega, \qquad \frac{LF}{LH} > 1,$$

wobei L irgend ein Punct der fraglichen Durchschnitts-Curve, LH sein kürzester Abstand von der Directrix und LN parallel mit OK nach der Directrix gezogen worden ist. Um also hier die characteristische Constante δ zu erhalten, müssen wir das Verhältniss der Abstände von einem Brennpuncte und der zugehörigen Directrix, welches für alle Puncte der Durchschnitts-Hyperbel in der Ebene der reellen Axe und der kleinen Neben-Axe constant ist, noch mit dem Sinus desjenigen Winkels multipliciren, den die Kreisschnitt-Ebenen mit der eben genannten Neben-Axe bilden, oder, was dasselbe heisst, die kürzesten Abstände von der Directrix mit solchen vertauschen, die denjenigen geraden Linien parallel sind, in welchen die Ebene der Hyperbel von den Kreisschnitt-Ebenen der Fläche geschnitten wird.

Auf ganz gleiche Weise können wir δ auch in dem Falle des Ellipsoids (19) durch die Ellipse AC der grossen und kleinen Axe, in dem Falle des einschaligen Hyperboloids (22) durch die Hyperbel BK mit der kleinern Axe und endlich in dem Falle des elliptischen Paraboloids (45) durch die Parabel in dem Hauptschnitte des kleinern Parameters bestimmen.

225. Legen wir durch irgend eine Directrix eine die Fläche schneidende Ebene, so sind für alle Puncte der Durchschnitts-Curve die Abstände von dieser Directrix offenbar in der schneidenden Ebene selbst zu nehmen, und zwar parallel mit einer derjenigen beiden geraden Linien, in welchen diese Ebene von den beiden Kreisschnitt-Ebenen der Fläche geschnitten wird. Diese Richtung ist eine doppelte, gleich gegen die Directrix geneigte. Wenn insbesondere die schneidende Ebene auch

durch den zugehörigen Focalpunct geht, so folgt hieraus, dass dieser ein Brennpunct der Durchschnitts-Curve und jene Directrix der Fläche auch die zu demselben gehörige Directrix der Curve ist. Bringen wir dieses Resultat mit dem am Ende der 219. Nummer gewonnenen in Verbindung, so erhalten wir den folgenden allgemein gültigen Satz.

Eine gegebene Fläche zweiter Ordnung wird von einer Ebene, die auf einer ihrer beiden Focal-Curven in einem beliebigen Puncte derselben senkrecht steht, so geschnitten, dass dieser Punct ein Brennpunct der Durchschnitts-Curve ist.

226. Wir können den Satz der vorigen Nummer in nachstehender Weise verallgemeinern:

Wenn wir durch eine Directrix einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung eine beliebige Schnitt-Ebene legen, so ist der zu dieser Directrix gehörige Focalpunct der Fläche zugleich auch ein Focalpunct der Durchschnitts-Curve.

Ist die Durchschnitts-Curve eine Ellipse, so liegt er auf ihrer Focal-Hyperbel, ist sie eine Hyperbel, so liegt er auf ihrer Focal-Ellipse, ist sie endlich eine Parabel, auf ihrer Focal-Parabel (2).

Die durch die Directrix gelegte Ebene geht gleichzeitig auch noch durch eine zweite Directrix derselben Art. Sind die beiden Directricen von der zweiten Art, so ist die Summe oder die Differenz der parallel mit einer Kreisschnitt-Ebene genommenen Abstände von denselben für alle Puncte der fraglichen Durchschnitts-Curve constant, und zwar dem nach derselben Richtung genommenen Abstande der beiden Directricen von einander gleich. Sind die beiden Directricen von der ersten Art, so ist für alle Puncte der Durchschnitts-Curve die Summe oder die Differenz der mittlern Proportionalen aus den Abständen von den beiden durch jede Directrix gelegten Kreisschnitt-Ebenen constant *). In beiden Fällen ist die Summe oder die Differenz zu nehmen, je nachdem die Durchschnitts-Curve innerhalb oder ausserhalb der beiden Directricen liegt. Nach den Sätzen der 222. und der 218. Nummer ist also für alle Puncte der Durchschnitts-Curve die Summe oder die Differenz der Abstände von den beiden zugehörigen Focalpuncten constant. Aus dem an die Spitze dieser Nummer gestellten Satze ist also der Satz der 201 Nummer eine unmittelbare Folgerung, und umgekehrt ist, wenn wir diesen als bekannt annehmen, jener hierdurch bewiesen.

227. An den Satz der vorigen Nummer schliesst sich unmittelbar der folgende an.

Jede durch eine beliebige Directrix gelegte Ebene schneidet die Fläche so, dass der zugehörige Focalpunct der Mittelpunct eines Rotations-Kegels ist, der durch die Durchschnitts-Curve geht, und die Fläche noch in einer zweiten Curve schneidet, die in einer zweiten ebenfalls durch die Directrix gehenden Ebene liegt. Die Axe des Kegels ist die Tangente der Focal-Curve in dem Focalpuncte. Diese Tangente und die Directrix sind zugeordnete Polaren, deren Richtungen auf einander senkrecht stehen.

Und umgekehrt ergibt sich der folgende Satz.

Jeder Rotations-Kegel, welcher einen Focalpunct der Fläche zu seinem Mittelpuncte und die Tangente der Focal-Curve in diesem Puncte zu seiner Axe hat,

---

*) Wenn wir von irgend einem Puncte der Diagonalen AC eines Parallelogramms ABCD oder deren Verlängerung auf die vier Seiten desselben AB, AD, CB, CD Perpendikel fällen, so ist die Summe oder die Differenz der mittlern Proportionalen aus den beiden ersten und aus den beiden letzten Perpendikel constant. Hieran knüpft sich sogleich die Behauptung des Textes.

schneidet die Fläche in zwei ebenen Curven, deren Ebenen auf der zugehörigen Directrix sich schneiden.

Wenn die Fläche insbesondere ein verlängertes Sphäroid oder ein zweischaliges Rotations-Hyperboloid ist und demnach die Focal-Curve in das System der beiden Brennpuncte und der Ort für die Directricen in das System ihrer beiden Polar-Ebenen übergehen, so schneiden sich die Focal-Curven aller möglichen Durchschnitts-Curven der Fläche in ihren beiden Brennpuncten und jede beliebige gerade Linie, die durch einen der beiden Brennpuncte geht, ist die Axe von unendlich vielen Rotations-Kegeln, welche die Fläche in ebenen Curven schneiden (201).

228. Jede Ebene, die wir nach beliebiger Richtung durch eine Directrix zweiter Art legen, schneidet die Fläche in einer reellen oder imaginären Curve; der zugehörige Focalpunct der Fläche ist zugleich auch ein Focalpunct der Durchschnitts-Curve und wird insbesondere ein Brennpunct der letztern, wenn die Schnitt-Ebene durch denselben geht (225, 226). In diesem letztern Falle fällt die Directrix der Fläche mit der Directrix der Curve zusammen: im allgemeinen Falle ist die erstere, die in der Ebene der Curve liegt, der letztern parallel. Für alle Puncte der Durchschnitts-Curve ist das Verhältniss der Abstände von ihrem Focalpuncte und der ihrer Directrix parallelen geraden Linie constant (225). Dieselbe Curve gehört aber unendlich vielen Flächen zweiter Ordnung in gleicher Weise an, wobei der jedesmalige Focalpunct eine andere Lage auf ihrer Focal-Curve erhält und die fragliche der Directrix parallele gerade Linie, ohne ihre Richtung zu ändern, in der Ebene der Curve fortrückt. Das constante Verhältniss bleibt hierbei unverändert dasselbe, und demjenigen der Abstände von dem Brennpuncte und der zugehörigen Directrix der Curve, also der Excentricität dieser letztern gleich. Wir überzeugen uns hiervon sogleich, wenn wir uns durch die verschiedenen Directricen zweiter Art einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung parallele Ebenen gelegt denken. Da nemlich die charakteristische Constante der Fläche für alle diese Directricen dieselbe bleibt, so ist auch für die Puncte aller Durchschnitts-Curven das Verhältniss der Abstände von dem jedesmaligen Focalpuncte und der zugehörigen Directrix der Fläche constant und weil es unter den parallelen Schnitt-Ebenen insbesondere auch solche gibt, die durch den zugehörigen Focalpunct der Fläche gehen, ist dieses constante Verhältniss der Excentricität der Durchschnitts-Curven gleich.

Das Verhältniss der Abstände jedes Punctes einer gegebenen Curve zweiter Ordnung von einem ihrer Focalpuncte und von der zu diesem Focalpuncte gehörigen Directrix ist constant und der Excentricität der Curve gleich.

Wir nehmen hierbei, mit blosser Rücksicht auf die Curve, ganz abgesehen von der Fläche, der sie angehört, das Wort Directrix in einem ausgedehntern Sinne als gebräuchlich. Es handelt sich nur noch darum, für einen auf der Focal-Curve beliebig angenommenen Focalpunct der Curve die zugehörige Directrix zu bestimmen. Ist die gegebene Curve eine Ellipse, und demnach die Focal-Curve eine Hyperbel, so sind die Scheitel dieser Hyperbel die beiden Brennpuncte der Ellipse und die zugehörigen Directricen die gewöhnlichen. Entfernt sich der Focalpunct auf einem Zweige der Hyperbel vom Brennpuncte, so entfernt er sich auch von dem näher liegenden Scheitel der grossen Axe der Ellipse: in gleichem Verhältnisse entfernt sich von diesem Scheitel also auch die zugehörige Directrix. Jeder Directrix entsprechen zwei Focalpuncte, die von der Ebene der Ellipse zu beiden Seiten derselben gleich weit abstehen. Wenn diese mit dem Brennpuncte zusammenfallen, liegt die Directrix dem Mittelpuncte am nächsten, von dieser Lage aus entfernt sie sich immer weiter bis ins Unendliche von demselben, während gleichzeitig die zugehörigen Focalpuncte auf dem Hyperbel-Zweige unendlich weit rücken. Den Puncten auf den beiden verschiedenen Hyperbel-Zweigen entsprechen Directricen, die auf den beiden entgegengesetzten Seiten vom Mittelpuncte liegen.

Wenn die gegebene Curve eine Hyperbel, ihre Focal-Curve also eine Ellipse ist, so nähert sich die Directrix, wenn der Focalpunct aus der Ebene der Hyperbel herausrückt, von der Lage der gewöhnlichen Directrix ausgehend, immer mehr dem Mittelpuncte und sie geht durch diesen Punct, wenn der Focalpunct, mit den Scheiteln der kleinen Axe der Focal-Ellipse zusammenfallend, seine grösste Entfernung von der Ebene der gegebenen Hyperbel erreicht. Ist die gegebene Curve eine Parabel, so entfernt sich die Directrix immer mehr von derselben, wenn der zugehörige Focalpunct auf der Focal-Parabel fortrückt, in der Art, dass ihr Abstand vom Scheitel immer dem Abstande des Focalpunctes von demselben gleich bleibt.

229. Für die Puncte desselben Kreisschnittes der Fläche sind nach dem Satze der 222. Nummer alle Abstände von einer Directrix in der Ebene des Schnittes von demjenigen Puncte zu nehmen, in welchem diese Ebene von der Directrix getroffen wird. Hiernach erhalten wir den bekannten Satz, dass der geometrische Ort für alle Puncte einer gegebenen Ebene, deren Abstände von zwei gegebenen Puncten in gegebenem Verhältnisse stehen, ein Kreis ist, und wir wissen, dass die beiden gegebenen Puncte zwei zugeordnete Pole in Beziehung auf diesen Kreis sind, wonach wir, wenn der Kreis und einer der beiden Puncte gegeben ist, den andern sogleich bestimmen können.

230. Wenn wir auf einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung einen festen Punct beliebig annehmen und nach einander alle möglichen in demselben Hauptschnitte liegenden Focalpuncte und die entsprechenden Directricen nehmen, so bilden die Abstände des festen Punctes von jenen einen Kegel, dessen Spitze dieser Punct und dessen Basis die Focal-Curve ist, und die Abstände von diesen einen Kegelschnitt, denjenigen nemlich, in welchen der Cylinder der Directricen von der durch den festen Punct gehenden Kreisschnitt-Ebene geschnitten wird. Die Seiten des Kegels stehen zu der von dem festen Puncte aus nach den entsprechenden Puncten des Kegelschnittes gezogenen geraden Linien in constantem Verhältnisse, und dieses Verhältniss können wir der Einheit gleich machen, wenn wir die Basis des Kegels parallel mit sich selbst weiter von der Spitze entfernen oder derselben annähern.

231. Es bleibt uns jetzt nur noch übrig die particulären Fälle zu discutiren.

Wenn

$$\omega = 0 \quad \text{oder} \quad \omega = \tfrac{1}{2}\pi,$$

so ist die Fläche eine Rotations-Fläche. Die Gleichungs-Formen I. und II. der 218. Nummer gehen alsdann in die folgenden über:

$$(x - x')^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 (x - x'')^2 \qquad \text{(I,a)}$$

$$(x - x')^2 + (y - y'^2 + z^2 = \delta^2 \{(x - x'')^2 + (y - y'')^2\}. \qquad \text{(II,a)}$$

Die erste Gleichungs-Form gibt den folgenden Satz.

Der geometrische Ort für solche Puncte, deren Abstände von einem gegebenen Puncte und einer gegebenen Ebene in constantem Verhältnisse stehen, ist eine Umdrehungs-Fläche zweiter Ordnung.

Diese Fläche ist nothwendig eine nicht geradlinige und zwar, je nachdem

$$\rho^2 < 1, \qquad \rho^2 = 1, \qquad \rho^2 > 1$$

ein verlängertes Sphäroid, ein Paraboloid oder ein zweischaliges Hyperboloid. Es fallen hier die beiden Ebenen des ersten Satzes der 218. Nummer in die gegebene zusammen. Der gegebene Punct ist ein Brennpunct des die Fläche durch Umdrehung um seine Axe erzeugenden Kegelschnittes, und

die gegebene Ebene diejenige, welche durch die Directrix desselben bei der Umdrehung beschrieben wird.

Bei der Particularisirung des allgemeinen Satzes der 218. Nummer in den obigen Satz der gegenwärtigen, haben wir den Uebergangs-Fall, dass die beiden gegebenen geraden Linien, bevor sie zusammenfallen, parallel werden, übersprungen. Wir sehen indess sogleich, dass der geometrische Ort für solche Puncte, deren Abstand von einem gegebenen Puncte zu der mittlern Proportionalen aus den Abständen von zwei gegebenen parallelen Ebenen in gegebenem Verhältnisse steht, nothwendig eine Rotations-Fläche ist, deren Umdrehungs-Axe durch den gegebenen Punct geht und die beiden gegebenen Ebenen unter rechten Winkeln schneidet. Der Ort für die Focalpuncte (als Curve zweiter Ordnung betrachtet) ist die Axe der Fläche, in welche die Focal-Hyperbel ausgeartet ist. Um diese Behauptungen analytisch zu rechtfertigen, bemerken wir bloss, dass wir der Gleichung I,a. auch folgende Form mit einer überzähligen Constanten geben können:

$$(x-x_{,})^2 + y^2 + z^2 = \rho^2\,(x'-x_{,,})\,(x-x_{,,,}),$$

wobei, wenn wir, wie früher, den Mittelpunct zum Anfangspuncte nehmen:

$$2(x'-\rho^2 x'') = 2x_{,} - \rho^2\,(x_{,,} + x_{,,,}) = 0,$$

$$x'^2 - \rho^2 x''^2 = x_{,}^2 - \rho^2 x_{,,} x_{,,,}.$$

Die zweite Gleichungs-Form gibt den folgenden Satz.

Der geometrische Ort für solche Puncte, deren Abstände von einem gegebenen Puncte und einer gegebenen geraden Linie in constantem Verhältnisse stehen, ist ein abgeplattetes Sphäroid, ein parabolischer Cylinder oder ein einschaliges Rotations-Hyperboloid, je nachdem

$$\delta^2 < 1, \qquad \delta^2 = 1, \qquad \delta^2 > 1.$$

Der den Uebergang bildende parabolische Cylinder nimmt hier in so fern eine Stelle unter den Rotations-Flächen ein, als man ihn dadurch entstanden denken kann, dass eine Parabel sich um ihre unendlich weit liegende Axe gedreht hat. Der geometrische Ort für die Focalpuncte ist derjenige Kreis, welcher bei der Erzeugung der Fläche durch Umdrehung eines Kegelschnittes um diejenige Axe, auf welcher die Brennpuncte nicht liegen, von diesen beschrieben wird.

232. Wenn der Focalpunct auf der Directrix selbst liegt, so gehen die Gleichungs-Formen I. und II. der 218. Nummer in die folgenden über:

$$(1-\rho^2\cos^2\omega)\,x^2 + (1+\rho^2\sin^2\omega)\,y^2 + z^2 = 0, \qquad \text{(I,b.)}$$

$$(1-\delta^2)\,x^2 + \left(1 - \frac{\delta^2}{\sin^2\omega}\right) y^2 + z^2 = 0, \qquad \text{(II,b.)}$$

und stellen entweder einen ellipsoidischen Punct, eine gerade Linie oder eine Kegelfläche dar. Die Focal-Ellipse geht in diesem Falle in einen Punct über, der mit dem ellipsoidischen Puncte oder dem Mittelpuncte der Kegelfläche zusammenfällt. Die Focal-Hyperbel geht in ein System von zwei, immer reellen, geraden Linien über, die wir die Focal-Linien des ellipsoidischen Punctes oder des Kegels nennen. Ueber die Bestimmung dieser Focal-Linien wollen wir, namentlich für den Fall der Kegelfläche, in einige nähere Erörterungen eingehen.

Die folgende Gleichung:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = \lambda \qquad (1)$$

stellt, wenn wir für λ nach einander alle möglichen Werthe nehmen, solche Flächen zweiter Ordnung dar, welche denselben Asymptoten-Kegel haben, der seinerseits durch diese Gleichung dargestellt wird, wenn wir λ insbesondere gleich Null setzen. Der Asymptoten-Kegel kann reell und auch ein ellipsoidischer Punct sein. Im ersten Falle entspricht einer Zeichen-Aenderung von λ der Uebergang zwischen ein- und zweischaligen Hyperboloiden, im zweiten Falle der Uebergang zwischen reellen und imaginären Ellipsoiden. Nehmen wir, nach wie vor, $\alpha^2 > \beta^2 > \gamma^2$, so wird in allen Fällen die Focal-Hyperbel durch die folgenden beiden Gleichungen:

$$y = 0, \qquad \frac{x^2}{\alpha^2-\beta^2} - \frac{z^2}{\beta^2-\gamma^2} = \lambda, \tag{2}$$

und der Ort für die Directricen durch die folgende Gleichung

$$\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^4}\cdot x^2 - \frac{\beta^2-\gamma^2}{\gamma^4}\cdot z^2 = \lambda \tag{3}$$

dargestellt (214). Wenn λ verschwindet, so geht die Focal-Hyperbel in die beiden Focal-Linien, der geometrische Ort für die Directricen in die beiden Directrix-Ebenen des Asymptoten-Kegels über. Die beiden Focal-Linien sind die gemeinsamen Asymptoten aller Focal-Hyperbeln (2), die bei einer Zeichen-Aenderung von λ, in die nebenliegenden Asymptoten-Winkel hinübertreten. Die beiden Directrix-Ebenen sind die gemeinsamen Asymptoten-Ebenen aller hyperbolischen Cylinder (3). Wenn der Asymptoten-Kegel ein reeller und demnach γ^2 negativ ist, so stellt die Gleichung (1), je nachdem $\lambda > 0$ oder $\lambda < 0$ ein ein- oder zweischaliges Hyperboloid dar; im letztern Falle liegt die Focal-Hyperbel innerhalb des Asymptoten-Kegels zwischen den beiden Focal-Linien, im erstern Falle schneidet sie den Asymptoten-Kegel in vier Puncten und ihre Scheitel liegen ausserhalb desselben.

Durch den Satz der 225. Nummer sind die Focal-Linien einer Kegelfläche dadurch geometrisch characterisirt, dass der Brennpunct einer Schnitt-Curve, deren Ebene auf einer Focal-Linie senkrecht steht, im Durchschnitte mit der Focal-Linie liegt.

Schneiden wir aus der unbegränzten Kegelfläche, deren Gleichung, indem wir γ^2 mit $(-\gamma'^2)$ vertauschen:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma'^2} = 0$$

einen geraden Kegel mit elliptischer Basis, dessen Höhe gleich γ' ist, so sind α und β die beiden Halb-Axen seiner Basis. Die beiden Focal-Linien liegen in derjenigen Ebene, die durch die Axe dieses Kegels und durch die grosse Axe seiner Basis geht, und bilden mit der erstgenannten Axe einen Winkel ς, der in Folge der zweiten Gleichung (2) durch folgende Gleichung gegeben ist

$$\operatorname{tang}^2 \varsigma = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2+\gamma'^2}.$$

233. Da die Asymptoten der Focal-Hyperbel einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung die Axen der beiden, dieser Fläche umschriebenen Kreis-Cylinder sind, so ergeben sich die folgenden beiden Sätze unmittelbar.

Die beiden Focal-Linien des Asymptoten-Kegels einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung, sind die Axen der beiden Kreis-Cylinder, welche der Fläche sich umschreiben lassen.

Die Directrix-Ebenen des Asymptoten-Kegels sind diejenigen Ebenen, in welchen die Fläche von den beiden umschriebenen Kreis-Cylindern berührt wird.

Wenn überhaupt einer Fläche zweiter Ordnung ein Cylinder umschrieben ist, so sind irgend zwei zugeordnete Durchmesser-Ebenen dieses Cylinders, die in der Axe desselben sich schneiden, zugleich auch zwei zugeordnete Durchmesser-Ebenen der Fläche und schneiden die Ebene der Berührungs-Curve in zwei geraden Linien, welche zugeordnete Durchmesser dieser Curve sind. Diese beiden geraden Linien und die Axe des umschriebenen Cylinders bilden alsdann ein System dreier zugeordneter Durchmesser des Cylinders, der Fläche und ihres Asymptoten-Kegels. Ist der umschriebene Cylinder insbesondere ein Kreis-Cylinder, so sind je zwei durch die Axe desselben gehende und auf einander senkrechte Ebenen zwei zugeordnete Durchmesser-Ebenen. Hiernach gelangen wir zu den folgenden Sätzen.

Je zwei Ebenen, die durch eine beliebige der beiden Focal-Linien des Asymptoten-Kegels einer beliebigen Fläche zweiter Ordnung gehen und auf einander senkrecht stehen, sind zwei zugeordnete Durchmesser-Ebenen der Fläche und ihres Asymptoten-Kegels. Je zwei solcher Ebenen schneiden die Directrix-Ebene des Asymptoten-Kegels in zwei geraden Linien, welche mit der Focal-Linie ein System von drei zugeordneten Durchmessern der Fläche und ihres Asymptoten-Kegels bilden.

Wenn man irgend einen in einer Directrix-Ebene eines Kegels liegenden Durchmesser desselben auf seine zugeordnete Diametral-Ebene (Polar-Ebene) projicirt, so ist die Projection eine der beiden Focal-Linien.

234. In dem Vorstehenden zeigt sich eine grosse Analogie zwischen den Eigenschaften des Kegels in Beziehung auf Focal-Linie und Directrix-Ebene und den Eigenschaften des Kegelschnittes in Beziehung auf Brennpunct und Directrix und wir sehen sogleich, dass das vermittelnde Uebertragungs-Princip sich daran knüpft, dass (231) ein Schnitt des Kegels in einer Ebene, die auf einer Focal-Linie senkrecht steht, den Durchschnittspunct mit dieser Focal-Linie zu seinem Brennpuncte und die Durchschnitts-Linie mit der Directrix-Ebene zu seiner Directrix hat. Winkel, welche durch gegebene Ebenen gebildet werden, die in der Focal-Linie sich schneiden, haben hiernach diejenigen Winkel zum Maasse, welche am Brennpuncte des Kegelschnittes von denjenigen Linien gebildet werden, in welchen die Ebene desselben von den gegebenen Ebenen geschnitten wird. Verbinden wir drei zugeordnete Pole des Kegelschnittes mit dem Mittelpuncte der Kegelfläche durch drei gerade Linien, so sind diese drei zugeordnete Durchmesser der letztern. Es entspricht hiernach dem letzten Satze der vorigen Nummer, derjenige über Kegelschnitte, nach welchem die Projection eines beliebigen Punctes der Directrix auf seine Polare ein Brennpunct des Kegelschnittes ist. Und ebenso können wir alle Sätze, die sich auf Winkel am Brennpuncte eines Kegelschnittes beziehen, unmittelbar auf Kegel übertragen. Beispiele bieten die bekannten Sätze, erstens, dass dasjenige Segment, welches auf einer beweglichen Tangente eines Kegelschnittes von zwei festen Tangenten desselben interceptirt wird, von einem Brennpuncte aus gesehen, unter constantem Winkel erscheint; zweitens, dass insbesondere, wenn man den Brennpunct mit den Berührungspuncten auf den beiden festen Tangenten und mit dem Durchschnitte derselben durch drei gerade Linien verbindet, die letzte dieser Linien den von den beiden ersten am Brennpuncte gebildeten Winkel halbirt.

Wenn man durch die beiden Durchschnitts-Linien zweier festen Tangential-Ebenen eines Kegels mit einer dritten beweglichen und eine Focal-Linie des Kegels zwei Ebenen legt, so ist der von diesen Ebenen gebildete Winkel constant. Wenn

man durch eine Focal-Linie drei Ebenen legt, von welchen zwei durch die beiden Berührungs-Seiten auf den beiden festen Tangential-Ebenen und die dritte durch die Durchschnitts-Linie derselben geht, so wird der von jenen beiden Ebenen an der Focal-Linie gebildete Winkel von dieser halbirt.

§. 12.

Polar-Gleichung der Kegel-Flächen. Focal-Linien. Confocal-Linien. Elliptische, hyperbolische, parabolische Kegel-Flächen.

235. Wenn wir den Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct einer Kegelfläche verlegen, so wird ihre Gleichung eine homogene des zweiten Grades zwischen drei Veränderlichen, denen wir die Bedeutung von Parallel-Coordinaten geben können, und reducirt sich unmittelbar auf die allgemeine Gleichung dieses Grades zwischen bloss zwei Veränderlichen, wenn wir für diese die beiden Quotienten nehmen, die sich ergeben, wenn wir irgend zwei der drei ursprünglichen Veränderlichen durch die dritte dividiren. Wir können also auch, was die analytische Behandlungsweise betrifft, die Discussion der Kegelflächen ganz auf dieselbe Weise an die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen zwei Veränderlichen anknüpfen, wie dieses in der Planimetrie bei der Discussion der Kegelschnitte geschieht.

Diesen allgemeinen Gesichtspunct wollen wir hier indess nicht weiter verfolgen, sondern, die Entwicklungen des gegenwärtigen Paragraphen an die letzten des vorigen unmittelbar anschliessend, zunächst eine einfache Gleichung der Kegelfläche in allgemeinen Zügen discutiren, die der Polar-Gleichung der Kegelschnitte entspricht und aus dieser sich leicht ableiten lässt.

236. Wenn eine Kegelfläche gegeben ist und senkrecht gegen eine ihrer beiden Focal-Linien in beliebiger Entfernung von ihrem Mittelpuncte eine Schnitt-Ebene geführt wird, so ist die Durchschnitts-Curve in dieser Ebene ein solcher Kegelschnitt, dessen ein Brennpunct, F, auf jener Focal-Linie OF liegt (232). Die bekannte Polar-Gleichung dieses Kegelschnittes ist:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\omega},$$

oder

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}.\cos\omega. \qquad (1)$$

Es bedeutet hierbei p den halben Parameter und e die Excentricität des Kegelschnittes. Die beiden Scheitel-Linien des Kegels schneiden den Kegelschnitt in den beiden Scheiteln seiner grossen Axe, die der Focal-Linie näher liegende Scheitel-Linie OA schneide dieselbe in A, die entfernter liegende OB in B. Auf irgend einen beliebigen Punct M des Kegelschnittes bezogen, ist

$$r = FM, \qquad \omega = MFA.$$

Die durch denselben Punct M gehende Kegelseite OM ist durch zwei Winkel ψ und ω bestimmt, von welchen der erstere derjenige Winkel MOF ist, welchen die fragliche Kegelseite mit der Focal-Linie bildet und der letztere die obige Bedeutung von ω behält oder auch als derjenige Winkel zu betrachten ist, welcher an der Focal-Linie durch solche zwei Ebenen gebildet wird, von welchen

eine ausserdem noch durch die zu bestimmende Kegelseite und die andere durch die Scheitel-Linie OA geht und demnach mit einem Hauptschnitte der Kegelfläche zusammenfällt. Setzen wir $OF \equiv s$, so ist

$$\frac{s}{r} = \operatorname{cotg}\psi,$$

wonach die Gleichung (1), nachdem wir dieselbe mit s multiplicirt haben, unmittelbar in die nachstehende übergeht:

$$\operatorname{cotg}\psi = \frac{s}{p} + \frac{se}{p}.\cos\omega, \tag{2}$$

die wir, indem wir der Kürze wegen

$$\frac{s}{p} \equiv P, \quad \frac{se}{p} \equiv Q$$

setzen, wonach

$$Q = Pe,$$

auch folgendergestalt schreiben können:

$$\operatorname{cotg}\psi = P + Q\cos\omega, \tag{3}$$

oder

$$\operatorname{cotg}\psi = P(1 + e\cos\omega). \tag{4}$$

Den beiden Scheitel-Linien des Kegels entspricht $\omega = 0$ und $\omega = \pi$; bezeichnen wir die entsprechenden Werthe von ψ durch ψ_1 und ψ_2, so erhalten wir aus der vorstehenden Gleichung:

$$\frac{\operatorname{cotg}\psi_1 + \operatorname{cotg}\psi_2}{2} = P,$$

$$\frac{\operatorname{cotg}\psi_1 - \operatorname{cotg}\psi_2}{2} = Q,$$

und hieraus

$$\operatorname{cotg}\psi_1 = P + Q, \qquad \operatorname{cotg}\psi_2 = P - Q.$$

Der Winkel ω kann überhaupt von 0 bis 2π, der Winkel ψ von 0 bis π wachsen. Wir können beide Winkel am Mittelpuncte der Kegelfläche construiren, und wollen ω den Azimuthal-Winkel und ψ den Zenith-Winkel der jedesmaligen Kegelseite nennen.

Wir nennen ferner P den halben Parameter der Kegelfläche, und e ihre Excentricität. P, Q und e sind positive Grössen, und nach dem Vorstehenden durch diejenigen beiden Winkel ψ_1 und ψ_2, welche die beiden Scheitel-Linien der Kegelfläche mit der Focal-Linie bilden, bestimmt. Derjenige Winkel, welchen die Axe der Fläche mit der Focal-Linie bildet, ist $\frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1)$ und derjenige Winkel, den diese Axe mit jeder der beiden Scheitel-Linien bildet, $\frac{1}{2}(\psi_2 + \psi_1)$. Für diejenige gerade Linie endlich, welche durch die Spitze des Kegels und den Mittelpunct seiner Basis geht, ist

$$\omega = \pi, \quad \operatorname{tang}\psi = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tang}\psi_2 - \operatorname{tang}\psi_1) = \frac{Q}{P^2 - Q^2}.$$

237. Es knüpft sich an die Gleichungs-Form

$$\operatorname{cotg}\psi = P + Q\cos\omega \tag{3}$$

eine Unterscheidung der Kegelflächen, die der Eintheilung der Kegelschnitte in Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln analog ist: wir nennen die Kegelfläche eine elliptische, parabolische oder hyperbolische, je nachdem

$$Q < P, \qquad Q = P, \qquad Q > P$$

oder was hiermit übereinstimmt, je nachdem

$$e < 1, \qquad e = 1, \qquad e > 1,$$

oder auch

$$\psi_2 < \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \psi_2 = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \psi_2 > \tfrac{1}{2}\pi.$$

In Gemässheit der letzten Bedingungen bildet also in den fraglichen drei Fällen die Focal-Linie mit der entferntern Scheitel-Linie einen Winkel, der kleiner als ein rechter, der gleich einem rechten oder grösser als ein solcher ist. Zugleich sehen wir, dass die Art der Kegelfläche von der Art derjenigen Kegelschnitte abhängt, deren Ebene senkrecht auf der Focal-Linie steht und deren Excentricität nach dem Vorstehenden ebenfalls e ist. Diese Kegelschnitte wollen wir, der Kürze halber, die characteristischen Kegelschnitte der Fläche nennen.*(

238. Wenn wir durch den Mittelpunct der Kegelfläche eine Ebene legen, die auf einer Focal-Linie senkrecht steht, so schneidet dieselbe die Fläche in den beiden auf dieser Focal-Linie senkrecht stehenden Kegelseiten. Zur analytischen Bestimmung dieser beiden Kegelseiten, erhalten wir, indem wir die folgende Gleichung

$$\operatorname{cotg}\psi = P(1 + e\cos\omega)$$

zu Grunde legen:

$$\psi = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad \cos\omega = -\frac{1}{e}.$$

Der Winkel ω ist nur für den Fall der hyperbolischen Kegelfläche, wo e grösser als die Einheit ist, reell. Dann erhalten wir für denselben zwei Werthe, von welchen der kleinere ein stumpfer ist und der grössere diesen zu 2π ergänzt.

Die Kegelfläche wird in den beiden eben bestimmten Seiten von zwei Ebenen berührt: wir nennen diese beiden Ebenen die Asymptoten-Ebenen der hyperbolischen Kegelfläche. Die Asymptoten-Ebenen schneiden jeden characteristischen Kegelschnitt der Fläche in seinen beiden Asymptoten.**)

---

*) Für den Winkel, den eine Kegelseite mit der Focal-Linie bildet, und der durch seine Tangenten bestimmt wird, bieten sich immer zwei Winkel dar, die sich zu π ergänzen, und sich, nachdem die positive Erstreckung der Focal-Linie, vom Mittelpuncte aus, von Vorne herein angenommen worden ist, auf die zwiefache Erstreckung jeder Kegelseite vom Mittelpuncte aus, also auf die beiden in diesem Puncte zusammenstossenden Doppel-Kegel beziehen. Für den Fall der elliptischen Kegelfläche gibt die Gleichung (4) nur positive und endliche Werthe für $\cot\psi$, denen eben solche Werthe für r entsprechen. Wenn wir daher ψ nicht über π hinaus wachsen lassen, so stellt die angezogene Gleichung nur einen der beiden Doppel-Kegel dar. In dem Falle der hyperbolischen Kegelfläche gibt es positive und negative Werthe von $\operatorname{cotg}\psi$ und dem entsprechenden r. Die positiven Werthe von r beziehen sich auf den einen, die negativen auf den andern Zweig der characteristischen Hyperbel, die positiven Werthe von $\operatorname{cotg}\psi$ auf den einen, die negativen auf den andern der beiden Doppel-Kegel. Um hier wie in dem erstern Falle beide Erstreckungen aller Kegelseiten zu erhalten, müssen wir neben der Gleichung des Textes (4) auch noch die folgende nehmen:

$$\operatorname{cotg}\psi = -(P + Q\cos\omega).$$

Bei der Bestimmung der Focal-Linien, wie wir sie im Texte gemacht haben, begegnen beide in ihrer positiven Erstreckung immer den elliptischen Schnitten der Kegelfläche.

**) Ueberhaupt sind die Asymptoten irgend eines Schnittes der Kegelfläche denjenigen beiden Seiten parallel, in welchen eine durch den Mittelpunct derselben gehende und der Ebene des Schnittes parallele Ebene dieser Kegel-Fläche begegnet, und liegen überdiess in denjenigen beiden Ebenen, welche die Fläche in den beiden eben bestimmten Seiten berühren.

Die Durchschnitts-Linie der beiden Asymptoten-Ebenen, oder derjenige Durchmesser der Kegelfläche, welcher der auf der Focal-Linie senkrecht stehenden Schnitt-Ebene zugeordnet ist, geht, was hieraus unmittelbar folgt, durch den Mittelpunct jedes characteristischen Kegelschnittes.

Für den Fall der parabolischen Kegelflächen fallen diejenigen beiden Seiten derselben, die auf einer Focal-Linie senkrecht stehen, zusammen und zwar in die der Focal-Linie entferntere Scheitel-Linie. Diese Scheitel-Linie ist den Durchmessern der characteristischen Curven, welche hier Parabeln sind, parallel. Die beiden entsprechenden Asymptoten-Ebenen fallen in diejenige Ebene zusammen, welche die Kegelfläche in der fraglichen Scheitel-Linie berührt.

Für den Fall der elliptischen Kegelfläche sind die beiden fraglichen Asymptoten-Ebenen imaginär; ihre Durchschnitts-Linie bleibt reell und geht, nach wie vor, durch die Mittelpuncte der characteristischen Kegelschnitte, welche hier Ellipsen sind.

Da jede Kegelfläche zwei reelle Focal-Linien hat, so hat sie zwei jeder dieser Linien entsprechende, im Ganzen also vier Asymptoten-Ebenen, die, je nachdem die Kegelfläche eine hyperbolische oder elliptische oder parabolische ist, reell oder imaginär sind oder zusammenfallen.

239. Wir wollen dieselbe Kegelfläche, die wir in dem Vorstehenden durch die Gleichung (3) dargestellt haben, nun durch die nachstehende Gleichung:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=0, \tag{5}$$

darstellen, indem wir die drei Axen der Fläche zu Coordinaten-Axen nehmen. Schneiden wir alsdann aus der Kegelfläche einen geraden elliptischen Kegel, dessen Höhe gleich γ ist, so sind α und β die beiden Halb-Axen der Basis, wobei wir $\alpha > \beta$ nehmen. Es ergibt sich hiernach unmittelbar

$$\frac{\alpha}{\gamma}=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\psi_2+\psi_1), \qquad \frac{\alpha^2}{\gamma^2}=\frac{1-\cos(\psi_2+\psi_1)}{1+\cos(\psi_2+\psi_1)}. \tag{6}$$

Ferner erhalten wir nach der 232. Nummer zur Bestimmung des Winkels $\frac{1}{2}(\psi_2-\psi_1)$, welchen die Axe des Kegels mit einer Focal-Linie desselben bildet:

$$\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(\psi_2-\psi_1)=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2+\gamma^2},$$

und, wenn wir zwischen dieser Gleichung und der ersten der vorhergehenden α^2 eliminiren,

$$\beta^2(1+\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(\psi_2-\psi^1))=\gamma^2(\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}(\psi_2+\psi_1)-\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}((\psi_2-\psi_1)):$$

eine Gleichung, die wir auch folgendergestalt schreiben können:

$$\frac{\beta^2}{\cos^2\frac{1}{2}(\psi_2-\psi^1)}=\gamma^2\left(\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}(\psi_2+\psi_1)}-\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}(\psi_2-\psi_1)}\right).$$

Es ist also:

$$\frac{\beta^2}{\gamma^2}=\left(\frac{\cos\frac{1}{2}(\psi_2-\psi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\psi_2+\psi_1)}\right)^2-1=\frac{\cos(\psi_2-\psi_1)-\cos(\psi_2+\psi_1)}{1+\cos(\psi_2+\psi_1)}=\frac{2\sin\psi_1\sin\psi_2}{1+\cos(\psi_2+\psi_1)}. \tag{7}$$

Die Gleichungen (6) und (7) geben die beiden Constanten $\frac{\alpha^2}{\gamma^2}$ und $\frac{\beta^2}{\gamma^2}$, welche in der Gleichung (5) vorkommen, durch die beiden Winkel ψ_2 und und ψ_1, vermittelst deren wir in der 236. Nummer die beiden Constanten der Gleichung (3), welche dieselbe Kegelfläche darstellt, bestimmt haben.

Wir können auch die Unterscheidung der Kegelflächen in elliptische, parabolische und hyperbolische auf die Gleichungs-Form (5) übertragen. Soll die Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \qquad (5)$$

insbesondere eine parabolische Kegelfläche darstellen, so gehen die Gleichungen (6) und (7) indem wir $\psi_2 = \frac{1}{2}\pi$ setzen, in die folgenden über:

$$\frac{\alpha^2}{\gamma^2}=\frac{1+\sin\psi_1}{1-\sin\psi_1}, \qquad \frac{\beta^2}{\gamma^2}=\frac{2\sin\psi_1}{1-\sin\psi_1}.$$

Eliminiren wir ψ_1 zwischen diesen beiden Gleichungen, so finden wir die Bedingungs-Gleichung:

$$\alpha^2-\beta^2=\gamma^2. \qquad (8)$$

Wenn wir aus einer parabolischen Kegelfläche einen geraden elliptischen Kegel schneiden, so ist die Höhe desselben der linearen Excentricität seiner Basis und diejenige Kegelseite, welche die Spitze desselben mit einem Scheitel der kleinern Axe der Basis verbindet, der halben grossen Axe dieser Basis gleich.

In Folge der vorstehenden Bedingungs-Gleichung ist offenbar

$$\alpha^2-\beta^2<\gamma^2, \qquad \alpha^2-\beta^2>\gamma^2,$$

je nachdem die Kegelfläche eine elliptische oder hyperbolische ist. Eine Rotations-Kegelfläche ist immer eine elliptische. Ihr entspricht

$$B=0, \qquad e=0, \qquad \psi_2=\psi_1.$$

240. Es gibt noch eine zweite Bestimmung der Zenith- und Azimuthal-Winkel, bei welcher die Polar-Gleichung der Kegelfläche unter einfacher Form sich darstellt und ganz der Polar-Gleichung eines Kreises entspricht und aus dieser unmittelbar hervorgeht. Schneiden wir nemlich aus einer gegebenen Kegelfläche einen Kegel, der einen Kreis zur Basis hat, und fällen auf diese Basis von der Spitze aus ein Perpendikel, so können wir den Fusspunct dieses Perpendikels zum Pol nehmen, und erhalten alsdann für die Polar-Gleichung des Kreises in seiner Ebene, wie bekannt die folgende:

$$r^2-(r_2\mp r_1)\,r\cos\omega=\pm r_2 r_1. \qquad (9)$$

Je nachdem der Pol innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt, müssen wir die obern oder untern Zeichen nehmen. Der Winkel ω wird von derjenigen Richtung an gerechnet, die vom Pole nach dem Mittelpuncte geht, und r_2 und r_1 bedeuten den grössten und kleinsten Abstand des Poles vom Umfange des Kreises. Um zur Polar-Gleichung der Kegelfläche überzugehen, brauchen wir die vorstehende Gleichung bloss durch das Quadrat der Höhe des Kegels zu dividiren, und finden dann unmittelbar

$$\operatorname{tang}^2\psi-(\operatorname{tang}\eta_2-\operatorname{tang}\eta_1)\operatorname{tang}\psi\cos\omega=\operatorname{tang}\eta_1\operatorname{tang}\eta_2, \qquad (10)$$

oder auch

$$\operatorname{cotg}^2\psi-(\operatorname{cotg}\eta_2-\operatorname{cotg}\eta_1)\operatorname{cotg}\psi\cos\omega=\operatorname{cotg}\eta_1\operatorname{cotg}\eta_2, \qquad (11)$$

wobei, wie früher, ψ den Zenith-Winkel, ω den Azimuthal-Winkel bedeutet, und der kleinste und grösste Werth des Zenith-Winkels durch η_1 und η_2 bezeichnet worden sind.

In Uebereinstimmung mit der Note zur 237. Nummer ergeben sich für $\operatorname{cotg}\psi$ immer nur positive Werthe, und die Gleichungen (10) und (11) stellen, wenn wir ψ nicht über π hinaus wachsen lassen, nur den einen der beiden Doppel-Kegel dar; nur müssen wir für η_2 und η_1 die beiden spitzen Winkel nehmen, oder für η_2 den spitzen und für η_1 den stumpfen Winkel, je nachdem die Kreisschnitte der Kegelfläche von dem auf die Ebene derselben von dem Mittelpuncte aus gefällten Perpendikel getroffen werden oder nicht.

Wir können eine gegebene Kegelfläche immer auf doppelte Weise durch eine der vorstehenden Gleichungen (10) und (11) darstellen, weil es immer zwei Richtungen gibt, nach welchen dieselbe durch eine Ebene in Kreisen geschnitten wird. Die beiden vom Mittelpuncte der Kegelfläche auf die beiden Systeme von Kreisschnitten gefällten Perpendikel, welche Confocal-Linien der Kegelfläche genannt worden sind, liegen in demjenigen Hauptschnitte der Fläche, welcher zugleich auch die beiden Neben-Scheitel-Linien, das heisst, diejenigen beiden Kegelseiten enthält, welche, wenn wir aus der Fläche einen geraden Kegel mit elliptischer Basis schneiden, durch die beiden Scheitel der kleinen Axe dieser Basis gehen. Von allen Kegelseiten bildet die eine Neben-Scheitel-Linie mit der Confocal-Linie den kleinsten, die andere den grössten Winkel. Diese beiden Winkel sind es also, die wir durch η_1 und η_2 bezeichnet haben.

Es ergibt sich hier wiederum eine zwiefache allgemeine Unterscheidung der Kegelflächen; es können die Confocal-Linien innerhalb der Kegelfläche und ausserhalb derselben liegen. Dem Uebergangs-Falle entspricht, dass die beiden Confocal-Linien mit den beiden Neben-Scheitel-Linien der Fläche zusammenfallen. In diesem besondern Falle ist

$$\eta_1 = 0,$$

und die Gleichung der Kegelfläche vereinfacht sich in die folgende:

$$\text{tang}\psi + \text{tang}\eta_2 \cos\omega = 0. \qquad (12)$$

241. Stellen wir dieselbe Kegelfläche wiederum durch die folgende Gleichung dar:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0,$$

so erhalten wir für die beiden Kreisschnitt-Ebenen die folgende Gleichung:

$$\beta^2(\alpha^2+\gamma^2)\,z^2 = \gamma^2(\alpha^2-\beta^2)\,y^2,$$

und hiernach für die beiden Confocalen das System der Gleichungen:

$$x = 0 \qquad \gamma^2(\alpha^2-\beta^2)z^2 = \beta^2(\alpha^2+\gamma^2)y^2.$$

Bezeichnen wir diejenigen Winkel, welche die Confocal-Linien mit der Axe des Kegels bilden, durch ρ und diejenigen Winkel, welche die Neben-Scheitel-Linien mit derselben Axe bilden durch σ, so erhalten wir

$$\text{tang}^2\rho = \frac{\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)}{\beta^2(\alpha^2+\gamma^2)}, \qquad \text{tang}^2\sigma = \frac{\beta^2}{\gamma^2},$$

mithin

$$\text{tang}^2\rho\,\text{tang}^2\sigma = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\gamma^2},$$

und hieraus nach einfachen trigonometrischen Substitutionen:

$$\frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{\sin^2\sigma}{\cos(\rho+\sigma)\cos(\rho-\sigma)}.$$

Es ist aber

$$\rho = \tfrac{1}{2}(\eta_2-\eta_1), \qquad \sigma = \tfrac{1}{2}(\eta_2+\eta_1).$$

Hiernach kommt:

$$\frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}(\eta_2+\eta_1)}{\cos\eta_2\cos\eta_1} = \frac{1-\cos(\eta_2+\eta_1)}{\cos\eta_2\cos\eta_1},$$

$$\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \text{tang}^2\tfrac{1}{2}(\eta_2+\eta_1) = \frac{1-\cos(\eta_2+\eta_1)}{1+\cos(\eta_2+\eta_1)}.$$

Für den besondern Fall, dass die Confocal-Linie mit einer Neben-Scheitel-Linie zusammenfällt, und demnach η_2 verschwindet, ergibt sich:

$$\frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{1 - \cos\eta_2}{\cos\eta_2}, \quad \frac{\beta^2}{\gamma^2} = \tang^2\tfrac{1}{2}\eta_2 = \frac{1 - \cos\eta_2}{1 + \cos\eta_2}.$$

Eliminiren wir zwischen den beiden letzten Gleichungen $\cos\eta_2$, oder setzen wir, was auf dasselbe hinauskommt, die obigen Werthe für $\tang^2\rho$ und $\tang^2\sigma$ einander gleich, so finden wir

$$\alpha^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2 - \beta^2\gamma^2 = 0,$$

oder auch

$$\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\gamma^2};$$

als Bedingungs-Gleichung für den Fall, dass die Kegelfläche von der in Rede stehenden besondern Art ist. Wenn die Focal-Linie innerhalb der Kegelfläche liegt, ist $\rho < \sigma$ und demnach

$$\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} < \frac{1}{\gamma^2},$$

liegt sie ausserhalb, ist $\rho > \sigma$ und demnach

$$\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2} > \frac{1}{\gamma^2}.$$

242. Wir wollen uns wieder zu der in der 236. Nummer hergeleiteten Polar-Gleichung

$$\tang\psi = P + Q\cos\omega \tag{1}$$

zurückwenden, und in derselben Polar-Coordinaten-Bestimmung die Gleichung einer Ebene, die die durch die Gleichung dargestellte Kegelfläche berührt, entwickeln. Ueberhaupt wird eine Ebene, die durch den Mittelpunct der Kegelfläche geht, durch folgende Gleichung

$$\cotg\psi = m\sin\omega + n\cos\omega \tag{2}$$

dargestellt, wobei wir durch m und n zwei Constante bezeichnen. Diese sind die Werthe von $\cotg\psi$, welche sich auf diejenigen beiden geraden Linien beziehen, denen die Azimuthal-Winkel $\frac{1}{2}\pi$ und 0 entsprechen. Wenn wir

$$\frac{\cotg\psi}{\cos\omega} \equiv \cotg\chi$$

setzen, so erhält χ die Bedeutung des Zenith-Winkels der Projection der bezüglichen geraden Linie auf eine Vertical-Ebene, deren Azimuthal-Winkel ω gleich Null ist. Wie früher durch ψ und ω, so können wir auch durch χ und ω die gerade Linie bestimmen und erhalten demnach für die Gleichungen der Kegelfläche und der durch ihren Mittelpunct gehenden Ebene die folgenden:

$$\cotg\chi = \frac{P}{\cos\omega} + Q, \tag{3}$$

$$\cotg\chi = m\,\tang\omega + n.^*) \tag{4}$$

*) Wir könnten die Gleichungen (2) und (4) auf gleiche Weise, wie in der 236. Nummer die Polar-Gleichung der Kegelfläche, ableiten oder auch, mit Berücksichtigung der Bedeutung von m und n, trigonometrisch begründen; doch rechtfertigt sich ihre Form unmittelbar dadurch, dass (wir wollen uns auf die Gleichung (4) beziehen) $\cotg\chi$ und $\tang\omega$ sich auf lineare Weise gegenseitig durch einander bestimmen.

Wenn hiernach irgend einer beliebigen Seite der Kegelfläche (3) die Winkel-Werthe χ' und ω' entsprechen, so ist

$$\operatorname{cotg}\chi' = \frac{P}{\cos\omega'} + Q, \tag{5}$$

und wenn die Ebene (4) durch dieselbe Kegelseite gehen soll

$$\operatorname{cotg}\chi' = m\,\operatorname{tang}\omega' + n,$$

wonach wir für ihre Gleichung auch die folgende nehmen können:

$$\operatorname{cotg}\chi - \operatorname{cotg}\chi' = m(\operatorname{tang}\omega - \operatorname{tang}\omega'). \tag{6}$$

Soll diese Ebene insbesondere die Kegelfläche (3) berühren, so müssen, nach der Differentiation, die beiden Gleichungen (3) und (4) noch befriedigt werden, wenn wir die Winkel-Werthe χ' und ω' einsetzen. Differentiiren wir, so kommt

$$\mathrm{d}.\operatorname{cotg}\chi = \frac{P\sin\omega\,\mathrm{d}\omega}{\cos^2\omega},$$

$$\mathrm{d}.\operatorname{cotg}\chi = \frac{m\mathrm{d}\omega}{\cos^2\omega},$$

und folglich ist:

$$m = P\sin\omega'. \tag{7}$$

Wenn wir diesen Werth von m in die Gleichung (6) einsetzen, so geht dieselbe, wenn wir zugleich die Bedingungs-Gleichung (5) berücksichtigen, in die folgende über:

$$\operatorname{cotg}\chi = P(\cos\omega' + \sin\omega'\operatorname{tang}\omega) + Q, \tag{8}$$

oder, wenn wir zu der ursprünglichen Coordinaten-Bestimmung zurückgehen:

$$\operatorname{cotg}\psi = P\cos(\omega - \omega') + Q\cos\omega. \tag{9}$$

Diese Gleichung ist die gesuchte, welche eine Ebene darstellt, welche die Kegelfläche (1) auf der durch den Azimuthal-Winkel ω' bestimmten Kegelseite berührt.

243. Wenn wir durch diejenige Seite, in welcher die Kegelfläche (1) von der Ebene (9) berührt wird und durch die Focal-Linie eine Ebene legen, so schneidet diese die Kegelfläche noch in einer zweiten Seite, für welche

$$\omega = \omega' + \pi.$$

Die entsprechende Tangential-Ebene ist

$$\operatorname{cotg}\psi = -P\cos(\omega - \omega') + Q\cos\omega. \tag{10}$$

Addiren wir die beiden letzten Gleichungen, so kommt nach Hinweglassung des gemeinschaftlichen Factors 2:

$$\operatorname{cotg}\psi = Q\cos\omega. \tag{11}$$

Diese Gleichung ist unabhängig von ω' und stellt also die Polar-Ebene der Focal-Linie: die zugehörige Directrix-Ebene der Kegelfläche dar.

Die drei Gleichungen (9), (10) und (11) bestehen gleichzeitig, wenn

$$\omega - \omega' = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Diese letzte Gleichung stellt eine Ebene dar, welche ebenfalls durch die Focal-Linie geht und auf der eben bezeichneten Schnitt-Ebene senkrecht steht. Der hiermit bewiesene Satz ist folgender:

Wenn wir irgend einen Durchmesser einer gegebenen Kegelfläche, welcher in der Directrix-Ebene derselben liegt, auf seine Polar-Ebene projiciren, so fällt die Projection in die Focal-Linie. (233).

241. Wenn wir die Gleichungen (4) und (8) der 242. Nummer identisch setzen, ergibt sich

$$m = P\sin\omega', \qquad n = P\cos\omega' + Q,$$

und wenn wir ω' eliminiren:

$$(n - Q)^2 + m^2 = P^2. \tag{12}$$

Diese Bedingung muss also zwischen den beiden Constanten n und m der Gleichung der Ebene:

$$\operatorname{cotg}\psi = m\sin\omega + n\cos\omega \tag{2}$$

Statt finden, wenn diese Ebene die Kegelfläche

$$\cos\psi = P + Q\cos\omega \tag{1}$$

berühren soll.

Die Gleichung der Tangential-Ebene können wir hiernach auch die folgende Form geben:

$$\operatorname{cotg}\psi = \pm\sqrt{P^2 - (Q - n)^2}.\sin\omega + n\cos\omega. \tag{13}$$

245. Eine Ebene, welche durch die Focal-Linie geht, und auf der durch die letzte Gleichung der vorigen Nummer dargestellten Tangential-Ebene senkrecht steht, hat folgende Gleichung:

$$\pm\sqrt{P^2 - (Q - n)^2}.\cos\omega = n\sin\omega.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen erhalten wir zunächst

$$\operatorname{cotg}\psi = \frac{n}{\cos\omega},$$

und dann nach Elimination von n zwischen dieser Gleichung und der vorhergehenden:

$$\operatorname{cotg}^2\psi + 2Q\operatorname{cotg}\psi\cos\omega = P^2 - Q^2. \tag{14}$$

Diese Gleichung stellt also den geometrischen Ort für die Durchschnitts Linie zweier auf einander senkrechten Ebenen dar, von welchen die eine die Kegelfläche berührt und die andere durch eine Focal-Linie derselben geht. Wir können dieser Gleichung, indem wir bemerken, dass (236):

$$2Q = \operatorname{cotg}\psi_1 - \operatorname{cotg}\psi_2 \qquad 2P = \operatorname{cotg}\psi_2 + \operatorname{cotg}\psi_1,$$

und folglich:

$$P^2 - Q^2 = \operatorname{cotg}\psi_1\operatorname{cotg}\psi_2,$$

auch auf die nachstehende Form bringen:

$$\operatorname{cotg}\psi^2 - (\operatorname{cotg}\psi_1 - \operatorname{cotg}\psi_2)\operatorname{cotg}\psi\cos\omega = \operatorname{cotg}\psi_1\operatorname{cotg}\psi_2. \tag{15}$$

Die vorstehende Gleichung bleibt unverändert dieselbe, wenn wir die eine Focal-Linie mit der andern vertauschen und zugleich ω um π wachsen lassen: es bleibt also auch der durch diese Gleichung dargestellte geometrische Ort derselbe, gleichviel durch welche der beiden Focal-Linien der gegebenen Kegelfläche wir Ebenen legen, die auf den Tangential-Ebenen derselben senkrecht stehen. Dieser Ort ist eine Kegelfläche, welche die Focal-Linien der gegebenen zu ihren Confocal-Linien und folglich die Ebenen der characteristischen Schnitte derselben zu ihren Kreisschnitt-Ebenen, endlich

Scheitel-Linien der gegebenen Kegelfläche zu ihren Nebenscheitel-Linien hat. Die beiden Kegelflächen haben dieselbe Axe und einen doppelten Contact. Je nachdem die gegebene eine elliptische oder hyperbolische ist, wird sie von der andern umschlossen oder nicht.

Die Projectionen der beiden Focal-Linien einer gegebenen Kegelfläche auf irgend eine beliebige Tangential-Ebene derselben liegen auf einer zweiten Kegelfläche, welche die Focal-Linien der gegebenen zu ihren Confocal-Linien hat. Wenn die Durchschnitts-Linie zweier auf einander senkrechten Ebenen eine gegebene Kegelfläche beschreibt, während eine dieser beiden Ebenen fortwährend durch eine der beiden Confocal-Linien derselben geht, umhüllt die andere Ebene eine zweite Kegelfläche, welche die Confocal-Linien der gegebenen zu ihren Focal-Linien hat.

Die vorstehenden Resultate modificiren sich für den Fall, dass die Kegelfläche eine parabolische ist; alsdann löset sich die Gleichung (14), indem wir

$$P = Q = \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}\psi_1$$

setzen, in die folgenden beiden auf:

$$\operatorname{cotg}\psi = 0, \qquad \operatorname{cotg}\psi + \operatorname{cotg}\psi_1 \cos\omega = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen stellt die auf der Focal-Linie senkrechte Tangential-Ebene der parabolischen Kegelfläche dar, was dadurch geometrisch bedingt wird, dass jede durch die Focal-Linie gehende Ebene auf dieser Tangential-Ebene senkrecht steht. Die zweite Gleichung stellt (242) die Tangential-Ebene in der, der Focal-Linie nähern Scheitel-Linie dar.

Die Projectionen einer Focal-Linie einer parabolischen Kegelfläche auf beliebige Tangential-Ebenen derselben liegen in derjenigen Ebene, welche die Kegelfläche in der nähern Scheitel-Linie berührt. Wenn die Durchschnitts-Linie zweier auf einander senkrechten Ebenen, um einen ihrer Puncte sich drehend, eine gegebene Ebene beschreibt, umhüllt, wenn eine der beiden auf einander senkrechten Ebenen um eine durch jenen Punct gehende gegebene gerade Linie sich dreht, die andern eine parabolische Kegelfläche, die von der gegebenen Ebene berührt wird und die gegebene gerade Linie zu einer ihrer Focal-Linien hat.

246. Perpendikel, die von irgend einem Puncte einer Focal-Linie des gegebenen Kegels (1) auf die Tangential-Ebenen desselben gefällt werden, können wir auch als solche Perpendikel betrachten, die auf die entsprechenden Seiten des Kegels (15), von demselben Puncte, der also auch dadurch bestimmt ist, dass er auf der Confocal-Linie dieses Kegels liegt, gefällt werden. Wenn man aber, von irgend einem gegebenen Puncte aus, auf die Seiten eines Kegels Perpendikel fällt, so liegen die Fusspuncte dieser Perpendikel auf einer Kugel-Oberfläche, die über den Abstand des gegebenen Punctes von dem Mittelpuncte der Kegelfläche, als Durchmesser, beschrieben werden kann; wenn dieser Punct insbesondere auf einer Confocal-Linie angenommen wird, so schneidet die Kugel-Oberfläche die Kegelfläche in einer ebenen Curve*) und zwar in dem Umfange eines Kreises, dessen Ebene auf der andern Confocal-Linie senkrecht steht.

Der geometrische Ort für die Fusspuncte solcher Perpendikel, die von irgend einem festen Puncte einer Confocal-Linie einer gegebenen Kegelfläche, auf die Seiten derselben gefällt werden, ist ein Kreis, dessen Ebene auf der andern Con-

*) Siehe §. 14, n. 265.

focal-Linie senkrecht steht. Der geometrische Ort für die Fusspuncte solcher Perpendikel, die von irgend einem festen Puncte einer Focal-Linie einer gegebenen Kegelfläche auf die Tangential-Ebenen derselben gefällt werden, ist ein Kreis, dessen Ebene auf der andern Focal-Linie senkrecht steht.

Die nachstehende Particularisation ergibt sich unmittelbar.

Wenn man von irgend einem festen Puncte einer Focal-Linie einer parabolischen Kegelfläche Perpendikel auf die Tangential-Ebenen derselben fällt, so ist der Ort für die Fusspuncte solcher Perpendikel eine gerade Linie, deren Richtung auf der andern Focal-Linie senkrecht steht.

247. Um die Gleichungen der Asymptoten-Ebenen der Kegelfläche zu erhalten, brauchen wir in die allgemeine Gleichung der Tangential-Ebene (13) bloss denjenigen Werth für n einzusetzen, der sich überhaupt auf eine durch die Mittelpuncte der charakteristischen Schnitte gehende Ebene bezieht. Die Gleichung einer solchen Ebene

$$\operatorname{cotg}\psi = m\sin\omega + n\cos\omega \qquad (2)$$

muss befriedigt werden, wenn wir die Coordinaten-Werthe der am Ende der 236. Nummer bestimmten geraden Linie einsetzen, wonach

$$n = -\frac{P^2-Q^2}{Q},$$

und die Gleichung (13) in die folgende übergeht:

$$Q\operatorname{cotg}\psi = \pm P\sqrt{Q^2-P^2}\,.\,\sin\omega + (Q^2-P^2)\cos\omega.$$

248. Eine beliebige durch den Mittelpunct der Kegelfläche gehende Ebene (2) schneidet die Kegelfläche

$$\operatorname{cotg}\psi = P + Q\cos\omega \qquad (1)$$

in zwei Seiten, deren Coordinaten-Werthe wir auf bekanntem Wege bestimmen können. Setzen wir zu diesem Ende, die durch die beiden Gleichungen (1) und (2) gegebenen Werthe von $\operatorname{cotg}\psi$ einander gleich, so gibt eine einfache Umformung die folgende Gleichung zur Bestimmung ihrer Azimuthal-Winkel:

$$\{(Q-n)^2+m^2\}\cos^2\omega + 2P(Q-n)\cos\omega + (P^2-m^2) = 0, \qquad (16)$$

und wenn wir in diese Gleichung für $\cos\omega$ aus der Gleichung (1) seinen Werth einsetzen, kommt:

$$\{(Q-n)^2+m^2\}\operatorname{cotg}^2\psi - 2P\{n^2+m^2-nQ\}\operatorname{cotg}\psi + \{(n^2+m^2)P^2 - m^2Q^2\} = 0, \qquad (17)$$

zur Bestimmung der entsprechenden Zenithwinkel. Wenn überhaupt zwei Winkel durch eine in Beziehung auf ihre Tangenten oder Cotangenten quadratische Gleichung gegeben sind, so lässt sich die Tangente oder Cotangente ihrer Summe auf lineare Weise bestimmen.*) Nehmen wir die Gleichung

---

*) Legen wir die nachstehende Gleichung

$$C\operatorname{cotg}^2\Psi - 2B\operatorname{cotg}\Psi + A = 0, \qquad (a)$$

die wir auch auf folgende Weise schreiben können

$$A\operatorname{tang}^2\psi - 2B\operatorname{tang}\psi + C = 0, \qquad (b)$$

zu Grunde, so ergibt sich, wenn wir die beiden Wurzeln dieser letztern Gleichung durch $\operatorname{tang}\Psi_1$ und $\operatorname{tang}\Psi_2$ bezeichnen

$$\operatorname{tang}\Psi_1 + \operatorname{tang}\Psi_2 = \frac{2B}{A} \qquad \operatorname{tang}\Psi_1\operatorname{tang}\Psi_2 = \frac{C}{A},$$

und hieraus:

$$\operatorname{tang}(\Psi_1 + \Psi_2) = \frac{2B}{A-C}. \qquad (c)$$

(17) und die Gleichung (a) der Note als identisch und also auch Ψ_1 und Ψ_2 für die der erstgenannten Gleichung entsprechende Winkel-Werthe, so ergibt sich:

$$2B = 2P\,\{n^2 + m^2 - nQ\},$$
$$A - C = (n^2 + m^2)\,P^2 - m^2Q^2 - \{(Q - n)^2 - m^2\}$$
$$= (P^2 - Q^2 - 1)\,(n^2 + m^2 - nQ) + n^2Q^2 + (P^2 - Q^2 + 1)\,nQ - Q^2.$$

Der allgemeine Werth von $\operatorname{tang}(\Psi_1 + \Psi_2)$ vereinfacht sich und wird zugleich unabhängig von m, wenn wir n durch die nachstehende quadratische Gleichung bestimmen:

$$n^2 + \frac{P^2 - Q^2 + 1}{Q}\,n - 1 = 0; \qquad (18)$$

dann kommt nemlich:

$$\operatorname{tang}(\Psi_1 + \Psi_2) = \frac{2B}{A - C} = \frac{2P}{P^2 - Q^2 - 1} = \frac{\operatorname{cotg}\psi_1 + \operatorname{cotg}\psi_2}{\operatorname{cotg}\psi_1 \operatorname{cotg}\psi^2 - 1} = \operatorname{tang}(\psi_1 + \psi_2),$$

mithin

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \psi_1 + \psi_2 = \text{const.} \qquad (19)$$

Wenn n gegeben ist und wir setzen

$$n = -\operatorname{tang}\zeta,$$

so gehen alle Schnitt-Ebenen (2) durch eine feste gerade Linie, welcher π als Azimuthal-Winkel und ζ als Zenith-Winkel entspricht. Es ist aber (245):

$$\frac{P^2 - Q^2 + 1}{Q} = 2\operatorname{cotg}(\psi_2 - \psi_1),$$

wonach aus (18):

$$\operatorname{cotg}(\psi_2 - \psi_1) = \frac{1 - n^2}{2n} = \operatorname{cotg} 2\zeta.$$

Wir finden also

$$\zeta = \tfrac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1) \quad \text{oder} \quad \zeta = \tfrac{1}{2}(\pi + \psi_2 - \psi_1).$$

Diese beiden Werthe für ζ bestimmen die Richtungen derjenigen beiden Axen der Kegelfläche, die in der Ebene der beiden Focal-Linien liegen und die von denselben gebildeten Scheitel-Winkel halbiren, und zwar diejenige Erstreckung dieser Axen vom Mittelpuncte aus, die den elliptischen Schnitten der Kegelfläche begegnen. Wenn wir also durch eine beliebige dieser beiden Axen eine Schnitt-Ebene legen, so ist für die beiden Kegelseiten in derselben die Winkel-Summe $(\psi_1 + \psi_2)$ constant. Wenn wir hierbei die eine der beiden Kegelseiten nach entgegengesetzter Erstreckung nehmen, so verwandelt sich die constante Summe in eine constante Differenz. Es ist augenscheinlich, dass, gleichviel durch welche der beiden eben bezeichneten Axen die Schnitt-Ebene geführt wird, derjenige Winkel ψ_1, den die erste Kegelseite mit der einen Focal-Linie bildet, dem Winkel ψ_2 gleich ist, den die zweite Kegelseite mit der andern Focal-Linie bildet und somit erhalten wir für den bewiesenen Satz auch folgende Aussage.

Die Summe derjenigen beiden Winkel, welche eine beliebige Kegelseite mit den beiden Focal-Linien bildet ist constant und zwar dem von den beiden Scheitel-Linien gebildeten Winkel gleich.

Die Erstreckungen der Kegelseiten nehmen wir in allen Fällen vom Mittelpuncte der Fläche aus auf demselben der beiden Doppel-Kegel und die Erstreckungen der beiden Focal-Linien vom Mittelpuncte aus im Innern dieses Kegels. Für jede der beiden Neben-Scheitel-Linien ist $\psi_1 = \psi_2$, woraus folgt, dass jede derselben mit den Focal-Linien einen Winkel bildet, welcher der Hälfte des von den Scheitel-Linien gebildeten Winkels gleich ist, wonach wir, wenn die Scheitel-Linien und Neben-Scheitel-Linien einer Kegelfläche gegeben sind, sogleich die Focal-Linien construiren können. Für diejenigen vier geraden Linien, in welchen eine Kegelfläche von den vier Asymptoten-Ebenen berührt wird, ist der grössere der beiden Winkel ψ_1 und ψ_2 ein rechter, der kleinere also dem Ueberschusse des von den beiden Scheitel-Linien gebildeten Winkels über einen rechten gleich.

249. Wenn wir in die allgemeine Gleichung der Ebene,

$$\operatorname{cotg}\psi = m\sin\omega + n\cos\omega, \tag{2}$$

für ψ und ω bestimmte Winkel-Werthe ψ' und ω' einsetzen und dann m und n als veränderlich betrachten, so stellt die Gleichung

$$\operatorname{cotg}\psi' = m\sin\omega' + n\cos\omega', \tag{20}$$

nun eine gerade Linie dar, welche durch die Winkelwerthe ψ' und w', ihre Coordinaten, bestimmt ist. Diese neue Gleichung enthält eine Relation zwischen m und n, die befriedigt werden muss, wenn die durch die Gleichung (2) dargestellte Ebene durch die fragliche gerade Linie gehen soll.

Wir haben ferner gefunden, dass die Gleichung:

$$(n-Q)^2 + m^2 = P^2, \tag{12}$$

diejenige Bedingung ausdrückt, unter welcher die Kegelfläche

$$\operatorname{cotg}\psi = P + Q\cos\omega \tag{1}$$

von der Ebene (2) berührt wird (244). Betrachten wir also in dieser Gleichung m und n wiederum als veränderlich, so stellt die Gleichung (12) dieselbe Kegelfläche dar, wobei diese als von ihren Tangential-Ebenen umhüllt betrachtet wird.

Wir könnnen dieser Gleichung (12) noch eine etwas allgemeinere Form geben, indem wir die Flächen-Gleichung (1) durch folgende ersetzen:

$$\operatorname{cotg}\psi = P + Q\cos,\ (\omega - \omega_,), \tag{21}$$

wobei wir bloss die Azimuthal-Winkel ω so nehmen, dass sie für die der Focal-Linie nähere Scheitel-Linie nicht verschwinden, sondern gleich $\omega_,$ werden. Um die Gleichung (12) abzuleiten können wir auch die beiden aus den Gleichungen (1) und (2) genommenen Werthe von $\operatorname{cotg}\psi$ gleichsetzen, und dann ausdrücken, dass die resultirende Gleichung

$$(n-Q)\cos\omega + m\sin\omega = P$$

für ω nur einen einzigen Werth gibt. Ebenso können wir auch verfahren, um die Bedingung zwischen m und n zu finden, die bestehen muss, wenn die Ebene (2) die Fläche (21) berühren soll. Der vorstehenden Gleichung entspricht alsdann die folgende:

$$(n - Q\cos\omega_,)\cos\omega + (m - Q\sin\omega_,)\sin\omega = P,$$

so dass bloss, indem wir

$$Q\cos\omega_, \equiv n', \qquad Q\sin\omega_, \equiv m',$$

setzen, an die Stelle von (n-Q) und m bezüglich (n-n') nnd (m-m') getreten sind. Wir erhalten hiernach sogleich für die gesuchte Gleichung

$$(n-n')^2 + (m-m')^2 = P^2. \tag{22}$$

Hierbei ist

$$n'^2 + m'^2 = Q^2,$$

und folglich die dargestellte Kegelfläche eine elliptische, hyperbolische, parabolische, je nachdem

$$m'^2 + n'^2 < P^2, \quad m'^2 + n'^2 > P^2, \quad m'^2 + n'^2 = P^2.$$

Die Directrix-Ebene der Kegelfläche ist durch die nachstehenden beiden Gleichungen bestimmt:

$$n = n', \qquad m = m'.$$

250. Bei den Entwickelungen der vorigen Nummer sind n und m als Coordinaten der durch den gegebenen Mittelpunct der Kegelfläche gehenden Ebene (2) zu betrachten und können, bei einer andern Bestimmungsweise derselben, durch zwei andere auf andere Weise zu construirende Constante ersetzt werden. Es bedeuten n und m die Cotangenten derjenigen beiden Winkel α und β, welche die Durchschnitts-Linien der fraglichen Ebene mit den Ebenen YZ und XZ bilden mit der Axe Z. Wenn wir den Neigungs-Winkel derselben Ebene gegen die Ebene XY durch λ und den Winkel, den die Durchschnitts-Linie dieser beiden Ebenen mit der Axe Y bildet, $\varkappa$ nennen, so ergibt sich, wenn wir nacheinandar diejenigen beiden rechtwinkligen-Ecken betrachten, welche von der zuletzt genannten Durchschnitts-Linie und den Axen X und Z, so wie den Axen Y und Z gebildet werden:

$$\begin{aligned} n &= \operatorname{cotg}\alpha = -\operatorname{tang}\lambda\cos\varkappa, \\ m &= \operatorname{cotg}\beta = -\operatorname{tang}\lambda\sin\varkappa. \end{aligned} \tag{23}$$

Setzen wir diese Werthe von n und m in die Gleichung der durch ihre Tangential-Ebenen bestimmten Fläche (12), so finden wir

$$\operatorname{tang}^2\lambda + 2Q\operatorname{tang}\lambda\cos\varkappa = P^2 - Q^2, \tag{24}$$

und wenn die Kegelfläche insbesondere eine parabolische ist:

$$\operatorname{tang}\lambda + 2Q\cos\varkappa = 0. \tag{25}$$

Die Formen dieser Gleichungen stimmen mit den Gleichungs-Formen (10) und (12) der 240. Nummer überein.

251. Wenn wir den Anfangspunct rechtwinkliger Coordinaten-Axen in dem Mittelpuncte einer beliebigen Kegelfläche zweiter Ordnung annehmen, so erhalten wir für eine beliebige Kegelseite die beiden Gleichungen

$$az + cx = 0, \qquad bz + cx = 0, \tag{26}$$

und können (235) $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ als Coordinaten derselben ansehen. Führen wir die Winkel ψ und ω, die wir in der 236. Nummer Zenith- und Azimuthal-Winkel genannt haben, ein, so kommt:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= -\operatorname{tang}\psi\cos\omega = -\frac{\cos\omega}{\operatorname{cotg}\psi}, \\ \frac{b}{c} &= -\operatorname{tang}\psi\sin\omega = -\frac{\sin\omega}{\operatorname{cotg}\psi}, \end{aligned}$$

so dass wir

$$a = \cos\omega, \quad b = \sin\omega, \quad c = \operatorname{cotg}\psi \tag{27}$$

setzen können. Jede homogene Gleichung des zweiten und überhaupt des n. Grades zwischen $\cos\omega$, $\sin\omega$ und $\operatorname{cotg}\psi$ stellt eine Kegelfläche der zweiten und überhaupt der n. Ordnung durch ihre Seiten dar.

Eine beliebige Tangential-Ebene der Kegelfläche können wir durch folgende Gleichung darstellen:

$$kz = hy + gx; \tag{28}$$

und $\frac{h}{k}$ und $\frac{g}{k}$, gleichbedeutend mit m und n der vorigen Nummer, als Coordinaten der Ebene nehmen. Die Gleichungen (23) können wir in folgender Art schreiben:

$$\frac{g}{k} = -\frac{\cos\varkappa}{\operatorname{cotg}\lambda},$$
$$\frac{h}{k} = -\frac{\sin\varkappa}{\operatorname{cotg}\lambda},$$

und also

$$g = \cos\varkappa, \quad h = \sin\varkappa, \quad k = -\operatorname{cotg}\lambda, \tag{29}$$

setzen. Jede homogene Gleichung des zweiten Grades zwischen $\cos\varkappa$, $\sin\varkappa$ und $\operatorname{cotg}\lambda$ stellt eine Kegelfläche der zweiten Ordnung durch ihre Tangential-Ebenen dar. λ ist die Neigung der jedesmaligen Ebene gegen die Ebene XY und, wenn wir diese Ebene als die Ecliptik betrachten, $\varkappa$ die Länge ihrer Knotenlinie von der Axe Y an gerechnet.

Die Winkel ψ und ω sind Polar-Coordinaten der geraden Linie (26), die Winkel λ und $\varkappa$ Polar-Coordinaten der Ebene (28).

Wenn wir

$$\psi = \lambda, \quad \omega = \varkappa, \tag{30}$$

oder was dasselbe ist

$$g = a, \quad h = b, \quad k = c \tag{31}$$

setzen, so steht die gerade Linie (26) auf der Ebene (28) senkrecht. Es stellen also auch irgend zwei Gleichungen, die einer Vertauschung der Winkel ω und $\varkappa$, ψ und λ entsprechen, zwei solche Kegelflächen dar, die in der gegenseitigen Beziehung stehen, dass die Seiten einer derselben auf den Tangential-Ebenen der andern senkrecht stehen. Nehmen wir insbesondere für die Gleichung einer von solchen zwei Kegelflächen die Gleichung (10) der 240. Nummer, in welcher wir, der Kürze wegen,

$$\operatorname{tang}\eta_2 - \operatorname{tang}\eta_1 = -2Q, \quad \operatorname{tang}\eta_1 \operatorname{tang}\eta_2 = P^2 - Q^2 \tag{32}$$

setzen, wonach

$$\operatorname{tang}^2\psi + 2Q\operatorname{tang}\psi\cos\omega = P^2 - Q^2,$$

so wird die Gleichung der andern Kegelfläche

$$\operatorname{tang}^2\lambda + 2Q\operatorname{tang}\lambda\cos\varkappa = P^2 - Q^2. \tag{24}$$

Die beiden letzten Gleichungen (24) und (32) stellen zwei Kegelflächen dar, welche die Axe Z bezüglich zur Focal-Linie und zur Confocal-Linie haben. Die zweite dieser Kegelflächen (24) können wir auch durch die folgende in diesem Paragraphen vorzugsweise discutirte Gleichung in Linien-Polar-Coordinaten:

$$\operatorname{cotg}\psi = P + Q\cos\omega, \tag{1}$$

darstellen, und folglich die erste Kegelfläche (32) durch folgende Gleichung in Plan-Polar-Coordinaten:

$$\operatorname{cotg}\lambda = P + Q\cos\varkappa. \tag{33}$$

Setzen wir, um die Bedeutung der beiden Constanten P und Q rücksichtlich dieser ersten Kegelfläche zu bestimmen, nach einander $\varkappa = 0$ und $\varkappa = \pi$, so gibt die vorstehende Gleichung für $\operatorname{cotg}\lambda$ den grössten und kleinsten Werth. Die entsprechenden Winkel, die wir durch λ_1 und λ_2 bezeichnen wollen, beziehen sich hiernach auf die Neigung der beiden Tangential-Ebenen der Fläche in ihren Nebencheitel-Linien, oder was dasselbe ist, auf die Neigung dieser Linien selbst gegen die Kreisschnitt-Ebenen. Ganz analog, wie in der 236. Nummer, ergibt sich

$$\operatorname{cotg}\lambda_1 + \operatorname{cotg}\lambda_2 = 2P,$$
$$\operatorname{cotg}\lambda_1 - \operatorname{cotg}\lambda_2 = 2Q,$$

so dass also die Winkel λ_1 und λ_2, welche die Winkel η_1 und η_2 der 240. Nummer zu einem rechten ergänzen, ganz an die Stelle der Winkel ψ_1 und ψ_2 treten. Die Summe der Winkel λ_1 und

λ_2 ist demjenigen Winkel gleich, den die Neben-Scheitel-Linien der dargestellten Fläche mit einander bilden, ihre Differenz gleich demjenigen Winkel, den die beiden Kreisschnitt-Ebenen oder auch die beiden auf ihnen senkrechten Confocal-Linien einschliessen. Da denselben Coordinaten-Werthen in den beiden Systemen einmal ein Durchmesser, das andere Mal eine Durchmesser-Ebene der jedesmaligen Kegelfläche entspricht, so gibt auch, bei der Uebereinstimmung der Gleichungen (24) und (32) oder (1) und (33), eine Gleichung von derselben Form und mit denselben Constanten einmal die zugeordnete Durchmesser-Ebene, das andere Mal den zugeordneten Durchmesser. Irgend dreien (oder auch zweien) zugeordneten Durchmessern einer der beiden Kegelflächen entsprechen also drei (oder zwei) zugeordnete Durchmesser-Ebenen der jedesmaligen andern, die auf jenen Durchmessern senkrecht stehen, und umgekehrt.

Wenn zwei Kegelflächen zweiter Ordnung in einer solchen gegenseitigen Beziehung stehen, dass die Seiten einer derselben auf den Tangential-Ebenen der andern senkrecht stehen, so sind die Focal-Linien jeder derselben die Confocal-Linien der jedesmaligen andern, und der von den Scheitel-Linien jeder derselben gebildete Winkel ist dem Neben-Winkel des von den Neben-Scheitel-Linien der jedesmaligen andern gebildeten Winkels gleich.

252. In dem Vorstehenden ist eine Verwandtschaft zweier Kegelflächen zu einander gegeben, nach welcher alle Winkel-Beziehungen sich paarweise zusammengruppiren und gegenseitig aus einander sogleich ableiten lassen.*) Ich muss mich hier auf ein einzelnes Beispiel beschränken, und wähle dazu den Satz der 245. Nummer, neben den sich unmittelbar der folgende stellt.

Die Summe derjenigen beiden Winkel, die eine beliebige Tangential-Ebene einer gegebenen Kegelfläche mit den beiden Confocal-Linien bildet, ist constant und zwar dem Neben-Winkel des von den beiden Neben-Scheitel-Linien gebildeten Winkels oder auch dem Doppelten desjenigen Winkels gleich, den die Tangential-Ebene in einer Scheitel-Linie mit jeder der beiden Confocal-Linien bildet.

Nach dem letzten Theile dieses Satzes können wir sogleich, wenn die Scheitel-Linien und Neben-Scheitel-Linien einer Kegelfläche gegeben sind, die Confocal-Linien und die auf denselben senkrechten Kreisschnitt-Ebenen construiren.

253. Um der Beziehung der beiden in der vorigen Nummer betrachteten Kegelflächen zu einander ihre richtige analytische Stelle anzuweisen, brauchen wir nur einen Blick auf die Gleichungen (30) oder die gleichbedeutenden (31) zu werfen. Diese Gleichungen drücken aus, dass die Seiten und Tangential-Ebenen der beiden Kegelflächen sich auf lineare Weise entsprechen, die Kegelflächen also in der Verwandtschaft der Reciprocität stehen (Einleit. Betr. 12.) Dieselbe Verwandtschaft können wir auch auf andere Weise ausdrücken (Einleit. Betr. 13—15). Nehmen wir zu diesem Ende für die Gleichung irgend einer durch den gemeinsamen Mittelpunct der beiden Kegelflächen gehenden Ebene, wie bisher die folgende:

$$\cot g\psi = m\sin\omega + n\cos\omega,$$

und ersetzen in derselben m und n durch ihre Werthe (23), so kommt:

---

*) Diese an Resultaten ergiebige Bemerkung hat Herr *Chasles* in einem ausführlichen Mémoire ausgebeutet, das ich indess nur aus der englischen Uebersetzung des Herrn *Graves* kenne. *Two geometrical memoirs on the general properties of cones of the second degree and on the spherical conics. Dublin, 1841.*

$$\operatorname{cotg}\psi = -\operatorname{tang}\lambda(\sin\omega\sin\varkappa + \cos\omega\cos\varkappa),$$

oder entwickelt:

$$\operatorname{cotg}\psi\operatorname{cotg}\lambda + \cos(\omega - \varkappa) = 0, \tag{34}$$

als Grund-Gleichung der Reciprocität, die wenn wir λ und $\varkappa$ als constant, ψ und ω als veränderlich betrachten die Ebene $(\lambda, \varkappa)$ und wenn wir umgekehrt ψ und ω als constant, λ und $\varkappa$ als veränderlich betrachten, die gerade Linie (ψ, ω) darstellt. Diese Gleichung ist symmetrisch in Beziehung auf ψ, ω und λ, $\varkappa$ und die Reciprocität also nach dem Ausdrucke von Herrn *Magnus* eine solche, bei der die beiden reciproken Systeme auch eine reciproke Lage haben und die Grund-Gleichung der Reciprocität auch durch eine Fläche zweiter Ordnung ersetzt werden kann, in Beziehung auf welche die Polar-Bestimmung im geometrischen Sinne auszuführen ist. Diese Fläche ist überhaupt der geometrische Ort für diejenigen Puncte, hier insbesondere also auch derjenigen, durch den Mittelpunct gehenden geraden Linien, die in ihre Polar-Ebenen fallen. Ihre Gleichung ergibt sich hiernach unmittelbar, wenn wir in der letzten Gleichung $\lambda = \psi$, $\varkappa = \omega$ setzen, wonach

$$\operatorname{cotg}^2\psi + 1 = 0,$$

oder auch

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Die Directrix-Fläche zweiter Ordnung hat sich also auf einen Kugelpunct reducirt (255). —

254. Bei den Kegelflächen erhalten wir Winkel-Beziehungen, die den bei Kegelschnitten ganz analog sind, wenn wir an die Stelle der Brennpuncte von diesen die Focal-Linien von jenen setzen. Beispielen sind wir bereits begegnet. Dem Satze, dass die Summe oder Differenz der Abstände der Puncte einer Ellipse oder Hyperbel von den beiden Brennpuncten constant ist, entspricht der direct in der 248. Nummer bewiesene Satz, dass die Summe (oder Differenz) der beiden Winkel, die eine Kegelseite mit den beiden Focal-Linien bildet, constant ist. Wie wir in der 204. Nummer aus dem erstern Satze den allgemeinen an die Spitze dieser Nummer gestellten Satz abgeleitet haben, so ergibt sich aus dem letztern Satze sogleich der folgende.

Wenn man durch vier Ebenen die beiden Focal-Linien einer gegebenen Kegelfläche mit zwei beliebigen Seiten derselben verbindet, so gibt es eine Rotations-Kegelfläche, welche diese Ebenen alle vier berührt und deren Axe die Durchschnitts-Linie derjenigen beiden Tangential-Ebenen ist, welche die gegebene Kegelfläche in den beiden beliebigen Seiten berühren.

Wir wollen den Mittelpunct der Kegelfläche O, ihre beiden Focal-Linien OF und OF′ nennen, annehmen, dass dieselbe einmal die Ellipse, das andere Mal die Hyperbel der 3. Figur zu einem ihrer charakteristischen Schnitte hat und dass einmal ON und ON′, das andere Mal OM und OM′ die beiden beliebigen Kegelseiten sind. Dann ist (248): Fig. 3

$$N'OF' + N'OF = NOF' + NOF, \qquad MOF' - MOF = M'OF' - M'OF,$$

folglich:

$$N'OF' - NOF = NOF' - N'OF, \qquad MOF' + M'OF = M'OF' + MOF.$$

Die vier Ebenen, welche die beiden Focal-Linien mit den Seiten ON und ON′ verbinden bestimmen eine Pyramide, deren zwei gegenüberliegende Seitenflächen sich schneiden und die die Ebene der characteristischen Elipse in dem Viereck FN′F′N begegnet: die Differenz der gegenüberliegenden Spitzen-Winkel ist dieselbe; in der entsprechend Pyramide, die die Ebene der characteristischen Hyperbel in dem Vierecke FM′F′M (in der Figur mit einspringendem Winkel) begegnet, ist die Summe der gegenüberliegenden Spitzen-Winkel dieselbe. In beiden Fällen folgt, was zu beweisen war, dass der Pyramide sich ein Rotations-Kegel einschreiben lässt.

Was die Discussion dieses Satzes betrifft, kann ich nur auf die analoge Discussion der 204. Nummer verweisen. Insbesondere ergibt sich der folgende von Herrn *Magnus* zuerst aufgestellte Satz, an den sich ein anderer unmittelbar anschliesst.

Wenn man durch die beiden Focal-Linie und eine beliebige Kegelseite zwei Ebenen legt, so bilden diese mit der Tangential-Ebene in dieser Kegelseite gleiche Winkel.

Eine hyperbolische und elliptische Kegelfläche, welche dieselben beiden Focal-Linien haben, schneiden sich rechtwinklig.

Nach dem Uebertragungs-Princip der 252. Nummer erhalten wir, neben den vorstehenden Sätzen die folgenden.

Die vier Durchschnitts-Linien irgend zweier Tangential-Ebenen einer Kegelfläche mit den beiden durch den Mittelpunct derselben gehenden Kreisschnitt-Ebenen sind vier Seiten eines Rotations-Kegels; die Ebene der beiden Berührungs-Seiten steht auf der Axe desselben senkrecht.

Die beiden Durchschnitts-Linien einer beliebigen Tangential-Ebene mit den beiden Kreisschnitt-Ebenen bilden mit der Berührungs-Seite gleiche Winkel.

Wenn zwei Kegelflächen dieselben Confocal-Linien haben, so stehen, wenn überhaupt gemeinschaftliche Tangential-Ebenen vorhanden sind, die beiden Berührungs-Seiten in jeder dieser Tangential-Ebenen auf einander senkrecht.

Auch die Note zur 212. Nummer gibt nach Analogie neue Winkel-Beziehungen bei Kegelflächen, auf die ich aber hier aus Mangel an Raum durchaus nicht eingehen kann. Ich schliesse mit einer letzten allgemeinen Bemerkung. Da die Erzeugenden eines einschaligen Hyperboloids den Seiten seines Asymptoten-Kegels parallel, die Kreisschnitt-Ebenen dieselben, und die Axen der jenem umschriebenen Rotations-Cylinder die Focallinien des letztern sind, so können wir viele der bewiesenen Winkel-Beziehungen von Kegelflächen auf einschalige Hyperboloide unmittelbar übertragen.

§. 13.

Die Reciprocität der Flächen zweiter Ordnung und Classe.

255. Wir haben in den frühern Paragraphen die Flächen zweiter Ordnung und Classe nach einander durch die allgemeine Gleichung des zweiten Grades, einmal in Punct-Coordinaten, das andere Mal in Plan-Coordinaten dargestellt und die Gleichungen vollständig discutirt. Das Princip der Reciprocität ist das Band, welches die beiden Darstellungsweisen verknüpft und in Folge dessen die Beziehung der in beiden erhaltenen Resultate, sowohl der analytischen als der geometrischen, als eine nothwendige erscheint. Aus diesem Princip fliesst das allgemeine Uebertragungs-Princip, der allgemeinsten linearen Punct- und Plan-Coordinaten-Bestimmung entsprechend, das in eben so viele besondere Uebertragungs-Weisen sich auflöset, als wir eine besondere Punct-Coordinaten-Bestimmung mit einer besondern Plan-Coordinaten-Bestimmung zusammenstellen können. Im Allgemeinen lassen sich zwei reciproke Systeme in eine solche gegenseitige Lage bringen, die Herr *Magnus* eine reciproke genannt hat, bei welcher die Polar-Bestimmung durch die Vermittelung einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung und Classe ausgeführt werden kann. Hierauf gründeten die Herren *Gergonne* und *Poncelet* zuerst das Princip der Reciprocität, bevor ich meinerseits, un-

abhängig hiervon und bald nachher, dasselbe aus der Variation der Constanten ableitete und die doppelte Coordinaten-Bestimmung aufstellte. Bei der reciproken Lage der beiden Systeme ist die Polar-Bestimmung dieselbe, gleichviel in welchem der beiden Systeme wir einen Punct annehmen, um seine Polar-Ebene in dem andern zu construiren. Geben wir hierbei der Grund-Gleichung der Reciprocität die am Ende der Note zur 15. Nummer der einleitenden Betrachtungen sich vorfindenden Formen, so sehen wir, dass sie vollkommen mit der Gleichung der Polar-Ebene eines Punctes in Beziehung auf eine gegebene Fläche zweiter Ordnung übereinstimmt und wie diese, bezüglich der Coordinaten des Punctes und der veränderlichen Grössen in der Gleichung der Polar-Ebene desselben, symmetrisch ist. Dieselbe Gleichung stellt, wenn wir in ihr auch die Coordinaten des Punctes als veränderlich betrachten, die Directrix-Fläche dar. Diese Fläche ist hiernach der geometrische Ort für diejenigen Puncte, welche in ihre Polar-Ebenen fallen, während sie zugleich von diesen Polar-Ebenen berührt wird. Für den Fall der Planimetrie habe ich die allgemeinere Aufgabe, auch bei einer beliebigen Lage der beiden reciproken Systeme die Polar-Bestimmungen geometrisch auszuführen, gelöset*): dieselbe Aufgabe gestattet, auch für die Constructionen im Raume, eine einfache Lösung. Aber alle allgemeinen Fragen dieser Art muss ich hier unerörtert lassen, und kann auch eben so wenig, die particulären Fälle der Verwandtschaft der Reciprocität discutiren. Hier eröffnet sich die ergiebigste Quelle neuer Resultate. Wenn wir, um nur ein Beispiel hervorzuheben, zur Directrix-Fläche eine Kugel nehmen, so steht die Polar-Ebene eines Punctes auf derjenigen geraden Linie senkrecht, die diesen Punct mit dem Mittelpuncte der Kugel verbindet, und auch die Richtungen zweier zugeordneten Polar-Linien stehen hiernach auf einander senkrecht. Als Folge hiervon stellen sich alle Winkel-Beziehungen paarweise neben einander. Zu irgend einer andern Kugel gehört als reciproke Fläche eine Umdrehungs-Fläche, die den Mittelpunct der ersten Kugel zu einem ihrer Brennpuncte hat; auf diese übertragen sich also die Eigenschaften der Kugel. Wenn die Dimensionen der zur Directrix-Fläche genommenen Kugel verschwinden, indem diese auf einen Kugelpunct sich reducirt, so erhalten wir den in der 252. und 253. Nummer discutirten Fall. Diesen Fall müssen wir auch derjenigen Reciprocität unterordnen, die Herr Magnus conische genannt hat und die der Reciprocität der Geometrie in der Ebene ganz analog ist. Bei der conischen Reciprocität entspricht allen Puncten die mit einem gegebenen festen Puncte in gerader Linie liegen, dieselbe Polar-Ebene, die ihrerseits durch einen zweiten festen Punct geht und so entsprechen sich gegenseitig gerade Linien, die durch einen und Ebenen, die durch einen andern gegebenen festen Punct gehen; es entsprechen sich zwei Kegelflächen, von welchen wir, wenn wir eine derselben uns durch eine gerade Linie beschrieben denken, die andere uns von einer Ebene umhüllt denken müssen. Bei einer reciproken Lage der Systeme artet die Directrix-Fläche in eine Kegelfläche aus, die aber sowohl reell als auch imaginär sein kann, das heisst, im letztern Falle in einen ellipsoidischen Punct übergeht. Nehmen wir andrerseits eine ebene, reelle oder imaginäre, Curve als Fläche zweiter Classe und Directrix-Fläche, so ist derselbe Punct der Pol von unendlich vielen Ebenen, die die Ebene der Curve alle in derselben geraden Linie schneiden; es entspricht also ein Punct, der immer in einer gegebenen festen Ebene bleibt, einer geraden Linie, die immer in einer zweiten gegebenen festen Ebene liegt, welche bei der vorausgesetzten reciproken Lage der beiden Systeme mit der ersten zusammenfällt, und hiernach eine ebene Curve einer andern.

256. Wenn wir durch p, q, r, s und p, q, r, s zwei Systeme befreundeter Punct- und Plan-

*) System. n. 103.

Coordinaten (Einl. Betr. n. 5) bezeichnen, so können wir dieselbe Fläche zweiter Ordnung und Classe im Allgemeinen durch jede von folgenden beiden Gleichungen:

$$Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + A'''s^2 + 2B''pq + 2B'pr + 2Bqr + 2Cps + 2C'qs + 2C''rs \equiv \Omega = 0, \quad (1)$$

$$Ap^2 + A'q^2 + A''r^2 + A'''s^2 + 2B''pq + 2B'pr + 2Bqr + 2Cps + 2C'qs + 2C''rs \equiv \Gamma = 0, \quad (2)$$

darstellen: unsere Aufgabe ist, die Coefficienten der jedesmaligen andern auszudrücken. Weil die zwiefachen Coordinaten befreundete sind, so besteht die folgende Gleichung

$$pp + qq + rr + ss = 0, \quad (3)$$

welche, wenn wir die Coordinaten irgend einer Ebene (p, q, r, s) einsetzen, diese Ebene und wenn wir die Coordinaten irgend eines Punctes (p, q, r, s) einsetzen, diesen Punct darstellt. Insbesondere also können wir dieselben vier Ebenen durch ihre vier Gleichungen

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0, \qquad s = 0$$

und durch ihre Coordinaten-Werthe

$$q = r = s = 0, \quad p = r = s = 0, \quad p = q = s = 0, \quad p = q = r = 0,$$

bestimmen. Für die Pole dieser vier Ebenen, in Beziehung auf die Fläche, erhalten wir die folgenden vier Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\Gamma}{dp} \equiv Ap + B''q + B'r + Cs = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\Gamma}{dq} \equiv B''p + A'q + Br + C's = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\Gamma}{dr} \equiv B'p + Bq + A''r + C''s = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\Gamma}{ds} \equiv Cp + C'q + C''r + A'''s = 0,$$

mithin für die Coordinaten dieser vier Pole:

$$\begin{aligned}
&\frac{q}{p} = \frac{B''}{A}, \quad \frac{r}{p} = \frac{B'}{A}, \quad \frac{s}{p} = \frac{C}{A};\\
&\frac{p}{q} = \frac{B''}{A'}, \quad \frac{r}{q} = \frac{B}{A'}, \quad \frac{s}{q} = \frac{C'}{A'};\\
&\frac{p}{r} = \frac{B'}{A''}, \quad \frac{q}{r} = \frac{B}{A''}, \quad \frac{s}{r} = \frac{C''}{A''};\\
&\frac{p}{s} = \frac{C}{A'''}, \quad \frac{q}{s} = \frac{C'}{A'''}, \quad \frac{r}{s} = \frac{C''}{A'''}.
\end{aligned} \quad (4)$$

Andrerseits erhalten wir für die Polar-Ebenen der vier Puncte

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0, \qquad s = 0$$

die folgenden vier Gleichungen:

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d\Omega}{dp} \equiv Ap + B''q + B'r + Cs = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d\Omega}{dq} \equiv B''p + A'q + Br + C's = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\Omega}{dr} \equiv B'p + Bq + A''r + C''s = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{d\Omega}{ds} \equiv Cp + C'z + C''r + A'''s = 0.$$

Es schneiden sich die drei letzten dieser vier Ebenen, die erste und die beiden letzten, die beiden ersten und die letzte, die drei ersten bezüglich in denjenigen vier Polen, deren Coordinaten wir oben schon bestimmt haben, hier erhalten wir für dieselben Coordinaten, mit Beibehaltung der Bezeichnung der 10. Nummer:

$$\begin{aligned}
&\frac{q}{p}=\frac{\Delta_{01}}{\Theta}, \quad \frac{r}{p}=\frac{\Delta_{02}}{\Theta}, \quad \frac{s}{p}=\frac{\Delta_{03}}{\Theta};\\
&\frac{p}{q}=\frac{\Delta_{01}}{\Theta_1}, \quad \frac{r}{q}=\frac{\Delta_{12}}{\Theta_1}, \quad \frac{s}{q}=\frac{\Delta_{13}}{\Theta_1};\\
&\frac{p}{r}=\frac{\Delta_{02}}{\Theta_2}, \quad \frac{q}{r}=\frac{\Delta_{12}}{\Theta_2}, \quad \frac{s}{r}=\frac{\Delta_{23}}{\Theta_2};\\
&\frac{p}{s}=\frac{\Delta_{03}}{\Theta_3}, \quad \frac{q}{s}=\frac{\Delta_{13}}{\Theta_3}, \quad \frac{r}{s}=\frac{\Delta_{23}}{\Theta_3}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Die letzten drei Coordinaten-Werthe, die sich aus der Zusammenstellung der Gleichungen der drei ersten Polar-Ebenen ergeben, sind diejenigen, die wir bereits in der 3. Nummer durch α, β und γ bezeichnet haben; aus ihnen erhalten wir die übrigen durch eine blosse Vertauschung der Marken. Damit die Coordinaten-Bestimmung (4) und (5) übereinstimme müssen wir

$$A=\delta.\Theta, \quad A'=\delta.\Theta_1, \quad A''=\delta.\Theta_2, \quad A'''=\delta.\Theta_3,$$
$$B''=\delta.\Delta_{01}, \quad B'=\delta.\Delta_{02}, \quad B=\delta.\Delta_{12}, \quad C=\delta.\Delta_{03}, \quad C'=\delta.\Delta_{13}, \quad C''=\delta.\Delta_{23},$$

wobei δ willkührlich angenommen und auch der Einheit gleich gesetzt werden kann. Die Gleichung (2) geht hiernach in die folgende über:

$$\Theta p^2+\Theta_1 q^2+\Theta_2 r^2+\Theta_3 s^2+2\Delta_{01}pq+2\Delta_{02}pr+2\Delta_{12}qr+2\Delta_{03}ps+2\Delta_{13}qs+2\Delta_{23}rs=0. \tag{6}$$

Die Beziehung der Gleichungen (1) und (6) zu einander ist eine durchaus gegenseitige; auf ganz analoge Weise, wie wir die Coefficienten der letztgenannten Gleichung durch die Coefficienten der erstgenannten, ausgedrückt haben, können wir auch diese durch jene ausdrücken. Zu den Relationen der 10. Nummer kommen hiernach noch neue hinzu, und der analytische Zusammenhang aller dieser Relationen tritt deutlicher hervor.

257. Vertauschen wir in der Gleichung (6) die Plan-Coordinaten mit den befreundeten Punct-Coordinaten oder umgekehrt in der Gleichung (1) diese mit jenen, so stellen die beiden Gleichungen

$$Ap^2+A'q^2+A''r^2+A'''s^2+2B''pq+2B'pr+2Bqr+2Cps+2C'qs+2C''rs=0, \tag{1}$$
$$\Theta p^2+\Theta_1 q^2+\Theta_2 r^2+\Theta_3 s^2+2\Delta_{01}pq+2\Delta_{02}pr+2\Delta_{12}qr+2\Delta_{03}ps+2\Delta_{13}qs+2\Delta_{23}rs=0, \tag{7}$$

und die beiden Gleichungen

$$Ap^2+A'q^2+A''r^2+A'''s^2+2B''pq+2B'pr+2Bqr+2Cps+2C'qs+2C''rs=0, \tag{8}$$
$$\Theta p^2+\Theta_1 q^2+\Theta_2 r^2+\Theta_3 s^2+2\Delta_{01}pq+2\Delta_{02}pr+2\Delta_{12}qr+2\Delta_{03}ps+2\Delta_{13}qs+2\Delta_{23}rs=0, \tag{6}$$

in der zwiefachen Coordinaten Bestimmung zwei reciproke Flächen dar, wobei beidesmal die Gleichung (3) die Grund-Gleichung der Reciprocität ist. Setzen wir insbesondere

$$p\equiv x, \quad q\equiv y, \quad r\equiv z, \quad s\equiv 1;$$
$$p\equiv t, \quad q\equiv u, \quad r\equiv v, \quad s\equiv \pm w;$$

so stellen die Gleichungen (1) und (6) dieselbe Fläche in dem gewöhnlichen Punct- und Plan-Coordinaten-Systeme dar. Die Gleichungen (1) und (7) stellen in dem ersten, die Gleichungen (8) und (6) in dem zweiten Coordinaten-Systeme zwei reciproke Fälchen dar, wobei die Grund-Gleichung der Reciprocität die folgende wird:

$$tx + uy + vz \pm w = 0,$$

und durch eine Kugel, deren Radius, wenn wir das untere Zeichen wählen, reell und der (willkührlich anzunehmenden) Einheit gleich ist, ersetzt werden kann.

258. Ich füge diesem Paragraphen nur noch einige allgemeine Schluss-Bemerkungen hinzu.

Jede geometrische Beziehung ist als die bildliche Darstellung einer analystischen Beziehung anzusehen, die, abgesehen von jeder Deutung, ihre selbstständige Geltung hat. So gehört auch das Princip der Reciprocität ganz eigentlich der Analysis an, und nur weil wir, sogar wenn wir es analytisch begründen, gewohnt sind, es in der Sprache der Geometrie auszudrücken, wird uns die Ansicht gewissermaassen aufgedrängt, dass es ein ausschliesslich geometrisches sei. Er besteht aber, auch ohne dass wir uns irgendwie um die Bedeutung der zwei oder drei Veränderlichen und Constanten kümmern, ganz unabhängig von der Betrachtung von Puncten, geraden Linien und Ebenen; wir können es aus der Sprache der Geometrie wieder rückwärts in die Ursprache der Analysis übersetzen. Wenn wir zum Beispiel den Punct ($p = p$, $q = q$, $r = r$, $s = s$) den Pol der durch die Gleichung (3), in der Voraussetzung, dass p, q, r und s veränderlich genommen werden, dargestellten Ebene betrachten, kommt in der analytischen Auffassung statt des Punctes die Constanten-Gruppe (p, q, r, s) und die Gleichung selbst, statt der dargestellten Ebene in Betracht. Rein analystisch aufgefasst, ist das Princip der Reciprocität natürlich auch nicht an die Dimensionen des Raumes gebunden und auf diese beschränkt. So wie wir, dem Uebergange von der Ebene zum Raume entsprechend, eine Veränderliche mehr einführen, können wir die analytischen Erörterungen auch auf eine grössere Anzahl von Veränderlichen ausdehnen. Bei vier Veränderlichen insbesondere erweitert die Grund-Gleichung der Reciprocität (3) sich, bei analoger Bezeichnung, in die folgende:

$$pp + qq + rr + ss + tt = 0.$$

Während wir die Auffassungsweise der Herren *Gergonne* und *Poncelet* als die geometrische Deutung des allgemeinen Princips der Reciprocität für den Fall zweier und dreier Veränderlichen ansehen, liegt die Frage nach einer geometrischen Deutung für den Fall mehrerer und namentlich für den Fall von vier Veränderlichen nahe. Die Beantwortung dieser Frage setzt die der andern nach der geometrischen Deutung, die wir einer Gleichung zwischen vier Veränderlichen geben können, voraus. Diese Veränderlichen können überhaupt in linearer Abhängigkeit von einander stehen: dann stellen die in gegenwärtiger Schrift discutirten Gleichungen zweiten Grades zwischen drei Veränderlichen nicht mehr Flächen zweiter Ordnung oder zweiter Classe, sondern Kegelschnitte oder Kegelflächen dar, für welche die allgemeinen Gleich ngs-Formen ihre Deutung behalten, und Gleichungen zwischen vier Veränderlichen würden Flächen zweiter Ordnung und Classe darstellen. Doch hier erhalten wir immer nur Particuläres; zu Allgemeinem führt die folgende Bemerkung. Eine gerade Linie hängt von vier linearen Constanten ab, für die wir zum Beispiel, indem wir eine solche Linie durch die Gleichungen-Paare:

$$x = \varkappa z + \lambda, \qquad t = \varkappa v + \lambda w,$$
$$y = \mu z + \nu, \qquad u = \mu v + \nu w;$$

darstellen, $\varkappa$, μ, λ, ν in der zwiefachen Bedeutung nehmen können. Diese vier Grössen, die wir als Veränderliche betrachten, welche für eine gegebene gerade Linie leicht zu construirende constante Werthe erhalten, sind die vier Coordinaten der geraden Linie. Eine Gleichung zwischen diesen vier Coordinaten bestimmt noch keinen geometrischen Ort für die gerade Linie, sondern nur ein Gesetz, nach welchem der unendliche Raum aus geraden Linien besteht. Ich gedenke auf diesen Gegenstand, der mir ein weites Gebiet für analytisch-geometrische Entwickelungen

zu eröffnen scheint, an einem andern Orte wieder zurückzukommen, da ich überdiess nicht im Stande sein würde, hier, bei beengtem Raume, den ganzen Gedanken zur Anschauung zu bringen.

§. 14.

Zusammenstellung zweier Flächen zweiter Ordnung und Classe. Gemeinschaftliches Pol-Tetraeder.

259. Die Bestimmmung einer Fläche der zweiten Ordnung und Classe hängt von neun, die Bestimmung eines Systemes solcher zwei Flächen also von achtzehn, von einander unabhängigen Constanten ab. Diese achtzehn Constanten finden sich in den nachstehenden beiden Gleichungen wieder:

$$\begin{aligned} \pi' p^2 + \varkappa q^2 + \rho r^2 + \sigma s^2 &= 0, \\ \pi' p^2 + \varkappa' q^2 + \rho' r^2 + \sigma' s^2 &= 0; \end{aligned} \qquad (1)$$

denn die vier linearen Functionen p, q, r und s hängen von $4.3 \equiv 12$ Constanten ab und die acht unmittelbar in Evidenz tretenden Constanten reduciren sich, weil in Folge der vorstehenden Gleichungs-Formen nur die Quotienten je zweier der vier ersten und je zweier der vier letzten in Betracht kommen, auf sechs. Weil die auf diese Weise sich ergebenden achtzehn Constanten von einander unabhängig sind, so können wir im Allgemeinen, das heisst, wenn nicht besondere Particularisationen Statt finden, zwei gegebene Flächen zweiter Ordnung durch die vorstehenden beiden Gleichungen (1) darstellen. Die vier Ebenen

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0, \qquad s = 0$$

bilden ein solches Tetraeder, dessen Eckpuncte, in Beziehung auf jede der beiden Flächen (1) die Pole der gegenüberliegenden Seitenflächen desselben sind (§ 4). Wir gelangen hiernach zu dem folgenden Satze.

Zwei gegebene Flächen zweiter Ordnung und Classe haben im Allgemeinen ein gemeinschaftliches Pol-Tetraeder.

260. Wenn wir nach einander jede der vier linearen Functionen zwischen den beiden Gleichungen (1) eliminiren, so ergeben sich die folgenden vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} (\pi'\varkappa - \pi\varkappa')q^2 + (\pi'\rho - \pi\rho')r^2 + (\pi'\sigma - \pi\sigma')s^2 &= 0, \\ (\varkappa'\pi - \varkappa\pi')p^2 + (\varkappa'\rho - \varkappa\rho')r^2 + (\varkappa'\sigma - \varkappa\sigma')s^2 &= 0, \\ (\rho'\pi - \rho\pi')p^2 + (\rho'\varkappa - \rho\varkappa')q^2 + (\rho'\sigma - \rho\sigma')s^2 &= 0, \\ (\sigma'\pi - \sigma\pi')p^2 + (\sigma'\varkappa - \sigma\varkappa')q^2 + (\sigma'\rho - \sigma\rho')r^2 &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Diese Gleichungen stellen vier Kegelflächen dar, die sämmtlich durch die Durchschnitts-Curve der beiden Flächen (1) gehen.

Durch die Durchschnitts-Curve zweier Flächen zweiter Ordnung und Classe lassen sich im Allgemeinen vier Kegelflächen legen: die Mittelpuncte dieser vier Kegelflächen sind die vier Eckpuncte des gemeinschaftlichen Pol-Tetraeders.

Die Gleichungen (2) sind die einzigen Kegel-Gleichungen zweiter Ordnung, die wir aus der Zusammenstellung der beiden Gleichungen (1) ableiten können: es lassen sich also auch nur vier Kegelflächen durch die Durchschnitts-Curve der bezüglichen beiden Flächen legen. Zwei Flächen zweiter Ordnung und Classe haben also auch nur ein einziges gemeinschaftliches Pol-Tetraeder, oder

analytisch ausgedrückt, die beiden Flächen lassen sich nur auf einzige Weise durch das System der Gleichungs-Formen (1) darstellen. Diese Form-Bestimmung, so wie die Bestimmung der vier Kegel (2), hängt nothwendigerweise von der Auflösung einer Gleichung des vierten Grades ab, weil die Winkelpuncte des Tetraeders sämmtlich in gleicher geometrischer Beziehung zu den beiden Flächen zweiter Ordnung stehen.

261. Die beiden Flächen zweiter Ordnung und Classe, die wir in den vorigen Nummern betrachtet haben, können wir auch in befreundeten Plan-Coordinaten (p, q, r, s) darstellen und erhalten dann, sei es durch eine einfache directe Betrachtung, sei es nach der 256. Nummer des vorigen Paragraphen, für eben dieselben Flächen die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{\pi}+\frac{q^2}{\varkappa}+\frac{r^2}{\rho}+\frac{s^2}{\sigma} &= 1, \\ \frac{p^2}{\pi'}+\frac{q^2}{\varkappa'}+\frac{r^2}{\rho'}+\frac{s^2}{\sigma'} &= 1, \end{aligned} \tag{3}$$

und statt der vier Kegelflächen (2) die folgenden vier Kegelschnitte:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\pi'\varkappa}-\frac{1}{\pi\varkappa'}\right)q^2+\left(\frac{1}{\pi'\rho}-\frac{1}{\pi\rho'}\right)r^2+\left(\frac{1}{\pi'\sigma}-\frac{1}{\pi\sigma'}\right)s^2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{\varkappa'\pi}-\frac{1}{\varkappa\pi'}\right)p^2+\left(\frac{1}{\varkappa'\rho}-\frac{1}{\varkappa\rho'}\right)r^2+\left(\frac{1}{\varkappa'\sigma}-\frac{1}{\varkappa\sigma'}\right)s^2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{\rho'\pi}-\frac{1}{\rho\pi'}\right)p^2+\left(\frac{1}{\rho'\varkappa}-\frac{1}{\rho\varkappa'}\right)q^2+\left(\frac{1}{\rho'\sigma}-\frac{1}{\rho\sigma'}\right)s^2 &= 0, \\ \left(\frac{1}{\sigma'\pi}-\frac{1}{\sigma\pi'}\right)p^2+\left(\frac{1}{\sigma'\varkappa}-\frac{1}{\sigma\varkappa'}\right)q^2+\left(\frac{1}{\sigma'\rho}-\frac{1}{\sigma\rho'}\right)r^2 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Auf diesem Wege, oder auch unmittelbar nach dem Principe der Reciprocität, stellt sich neben den Satz der vorigen Nummer der folgende.

Diejenige Abwickelungs-Fläche, welche zwei gegebene Flächen zweiter Ordnung und Classe umhüllt, wird, im Allgemeinen, von vier Ebenen in Curven zweiter Ordnung und Classe geschnitten; diese Ebenen sind die vier Seiten-Ebenen des gemeinschaftlichen Pol-Tetraeders.

Die Winkelpuncte des Pol-Tetraeders sind (p), (q), (r), und (s), in Folge unserer Coordinaten-Bestimmung stehen sie denjenigen Seitenflächen, die nach der frühern Bezeichnung (p), (q), (r) und (s) sind, bezüglich gegenüber. So wie die vier Kegelflächen (2) zu denjenigen Flächen zweiter Ordnung gehören, welche mit den beiden gegebenen dieselbe Durchschnitts-Curve haben und diese durch zwei der Kegelflächen bestimmt ist, so sind auch die vier Kegelschnitte zu denjenigen Flächen zweiter Classe zu zählen, welche von denselben Ebenen, als die beiden gegebenen berührt werden, und die diesen beiden umschriebene Abwickelungs-Fläche ist in der Art durch zwei der vier Kegelschnitte bestimmt, dass sie durch eine Ebene umhüllt wird, welche in allen ihren Lagen an diese Kegelschnitte sich anlehnt.

262. Wenn die beiden Flächen zweiter Ordnung und Classe einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben, so liegt eine Seitenfläche des gemeinschaftlichen Pol-Tetraeders unendlich weit. Lassen wir, dem entsprechend, s auf eine Constante sich reduciren, so gehen die Gleichungen (1) in die folgenden über:

$$\begin{aligned} \pi p^2 + \varkappa q^2 + \rho r^2 + \sigma &= 0, \\ \pi' p^2 + \varkappa' q^2 + \rho' r^2 + \sigma'^2 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Die Durchschnitts-Linien je zweier der drei Ebenen

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0$$

sind drei zugeordnete Durchmesser jeder der beiden Flächen. Wenn also irgend zwei Flächen zweiter Ordnung und Classe einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben: so haben sie auch ein gemeinschaftliches System dreier zugeordneten Durchmesser. Wenn wir für eine der beiden Flächen insbesondere eine Kugel nehmen, deren zugeordnete Durchmesser alle auf einander senkrecht stehen, so folgt unmittelbar, dass jede Fläche zweiter Ordnung und Classe mit einem Mittelpuncte, ein System von drei rechtwinkligen zugeordneten Durchmessern oder, mit andern Worten, drei Axen hat.

In dem Falle zweier concentrischer Flächen fällt der Mittelpunct einer der vier Kegelflächen der 260. Nummer mit dem Mittelpuncte dieser Flächen zusammen, während die drei übrigen Kegelflächen in Cylinder ausarten, deren Axen die drei gemeinschaftlichen zugeordneten Durchmesser der Flächen sind. Wir können, mit andern Worten, die Durchschnitts-Curve derselben auf drei, senkrecht auf diesen Durchmessern stehende, Ebenen projiciren, wobei die Projectionen von der zweiten Ordnung sind. Von den vier Kegelschnitten der 261. Nummer liegen drei in den durch je zwei der drei zugeordneten Durchmesser bestimmten Ebenen und die vierte liegt unendlich weit. Wenn insbesondere die beiden Flächen confocale sind, so haben beide dieselben Axen-Richtungen und die fraglichen drei Kegelschnitte sind die in den drei Hauptschnitten liegenden gemeinschaftlichen Focal-Curven derselben.

263. Wenn wir um zu particularisiren

$$\varsigma'\sigma = \varsigma\sigma' \quad \text{oder} \quad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\sigma'}{\sigma} = \lambda \tag{6}$$

setzen, so gehen die beiden letzten der vier Gleichungen (2), beide in die folgende über:

$$(\lambda\pi - \pi')\, p^2 + (\lambda\varkappa - \varkappa')\, q^2 = 0. \tag{7}$$

Die beiden letzten der vier frühern Kegelflächen arten also in dasselbe System von zwei Ebenen aus, welche die beiden Kegelschnitte enthalten, in die sich die Durchschnitts-Curve der beiden Flächen in diesem Falle auflöset. Es bleiben noch zwei der vier Kegelflächen (2), welche beide Kegelschnitte gleichzeitig enthalten, übrig; die gerade Linie, welche durch die Mittelpuncte dieser beiden Kegelflächen geht, ist die gerade Linie (r,s) oder zugeordnete Polare der geraden Linie (p,q), die beiden Linien sind zwei gegenüberliegende Kanten des gemeinschaftlichen Pol-Tetraeders.

In Folge der Bedingungs-Gleichung (6) gehen die beiden letzten der vier Gleichungen (4) übereinstimmend in die nachstehende über:

$$\left(\frac{1}{\lambda\pi} - \frac{1}{\pi'}\right) p^2 + \left(\frac{1}{\lambda\varkappa} - \frac{1}{\varkappa'}\right) q^2 = 0.$$

Die beiden letzten der vier Kegelschnitte der vorigen Nummer arten also beide, in dasselbe System von zwei Puncten aus. Diese Puncte sind die Mittelpuncte zweier Kegelflächen, in welche, für den vorliegenden Fall, die die beiden gegebenen Flächen umhüllende Abwickelung-Fläche zerfällt. Es bleiben hiernach nur noch zwei der vier Kegelschnitte (4) übrig. Es sind diejenigen, in welchen die beiden umschriebenen Kegelflächen sich schneiden. Die Ebenen dieser beiden Kegelschnitte schneiden sich in der geraden Linie (r, s) der zugeordneten Polaren der geraden Linie (p, q), welche die Mittelpuncte der beiden umschriebenen Kegelflächen enthält.

Bemerken wir zugleich noch, dass die Symbole (p, q) und (*r*, *s*) dieselbe Kante des gemeinschaftlichen Pol-Tetranders darstellen, ebenso (r, s) und (*p*, *q*) und dass die so bestimmten beiden Kanten gegenüberstehende sind, so können wir die gewonnenen Resultate in folgende Aussage zusammenfassen.

Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung und Classe sich in ebenen Curven schneiden, so lassen sich denselben zugleich auch zwei Kegelflächen umschreiben und, umgekehrt, wenn sie zweien Kegelflächen eingeschrieben sind, schneiden sie sich in ebenen Curven. Durch die beiden ebenen Durchschnitts-Curven lassen sich zwei neue Kegelflächen legen, die beiden umschriebenen Kegelflächen schneiden sich in zwei neuen ebenen Curven. Die Ebenen der vier Durchschnitt-Curven schneiden sich in derselben geraden Linie (*A*), die Mittelpuncte der vier Kegelflächen liegen auf derselben geraden Linie (*B*): die beiden geraden Linien *A* und B sind zugeordnete Polaren in Beziehung auf jede der beiden gegebenen Flächen. Durch die erstgenannte Linie *A* gehen überdiess auch noch die vier Ebenen, in welchen diese beiden Flächen von den beiden umschriebenen Kegelflächen berührt werden, auf der letztgenannten Linie *B* liegen die vier Mittelpuncte derjenigen Kegelflächen, welche die beiden Flächen in den beiden Durchschnitts-Curven berühren.

Wir nennen zwei solche Flächen, welche die in Rede stehende gegenseitige Beziehung zu einander haben, zwei collinear liegende Flächen. Wir erkennen sogleich dass irgend zwei Flächen zweiter Ordnung und Classe durch eine gegenseitige Lagen-Aenderung collinear liegende werden können. Wir brauchen auf beiden bloss irgend zwei identische Kegelschnitte zu bestimmen und zur Conguenz zu bringen. Bei dieser Lagen-Aenderung verliert die eine Fläche von ihren sechs Constanten der Lage nur zwei. Aehnliche Flächen haben auch dann eine collineare Lage, wenn sie insbesondere eine ähnliche Lage haben, das heisst, wenn ihre Axenrichtungen parallel sind, weil sie in diesem Falle immer in einer unendlich weit liegenden Ebene sich schneiden.

264. Zwei collineare Flächen hängen zusammen nur noch von sechszehn Constanten ab. Zwar reducirt sich auf den ersten Blick die ursprüngliche Anzahl von achtzehn Constanten, durch die Bedingungs-Gleichung (6) nur um eine Einheit. Das Ausfallen einer zweiten Constanten zeigt sich aber darin, dass zugleich die vier Ebenen oder die vier Puncte, durch welche die Coordinaten-Bestimmung vermittelt wird, nicht mehr vollkommen bestimmt sind und wir unendlich oft dieselben beiden Flächen durch zwei Gleichungen von derselben Form darstellen können. Das gemeinschaftliche Pol-Tetraeder, mit andern Worten, ist nicht mehr vollkommen bestimmt, sondern bestimmt sind nur die beiden gegenüberliegenden Kanten (*A* und *B*), und ausserdem, in der Punct-Coordinaten-Bestimmung zwei Eckpuncte auf *B*, nemlich die Mittelpuncte der beiden umschriebenen Rotations-Kegel, und in der Plan-Coordinaten-Bestimmung zwei durch *A* gehende Seitenflächen, nemlich die Ebenen der beiden Durchschnitts-Curven. In der ersten Bestimmung können wir auf A eine dritte Ecke beliebig annehmen, und dann auf ihr die vierte Ecke als den Pol der, durch die drei ersten Ecken gehenden Ebene construiren, in der zweiten Bestimmung eine beliebig durch B gelegte Ebene als dritte Seitenfläche annehmen und dann die vierte Seitenfläche als die Polar-Ebene des Durchschnittes der drei ersten construiren.

265. Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung in einer ebenen Curve sich schneiden, so schneiden sie sich ausserdem noch in einer zweiten solchen Curve. Der Voraussetzung nach, gibt es eine Ebene, welche die beiden Flächen

$$\Omega = 0, \qquad \Omega' = 0$$

in derselben Curve schneidet, und dieser Ebene entspricht, bei gehöriger Bestimmung von μ, ein linearer Factor im ersten Theile der nachstehenden Gleichung:

$$\Omega + \mu\Omega' = 0.$$

Ein solcher linearer Factor bedingt aber nothwendig einen zweiten, und diesem entspricht eine zweite ebene Durchschnitts-Curve, welche, wenn dieser zweite Factor insbesondere auf eine blosse Constante sich reducirt, unendlich weit liegt. Wenn die beiden Flächen zweiter Ordnung in einem Puncte sich berühren, so entspricht die Berührung, im Allgemeinen, nicht einer ebenen Durchschnitts-Curve, sie thut es nur dann, wenn die Flächen ausserdem in einer ebenen Curve sich schneiden und dann werden beide Flächen durch jede Ebene, die der gemeinschaftlichen Berührungs-Ebene parallel ist, in ähnlichen und ähnlich liegenden Curven geschnitten. Eine der beiden Flächen kann auch eine Kegelfläche sein und der Mittelpunct derselben insbesondere auch auf der andern Fläche liegen. Nennen wir, indem wir die bisherige Bedeutung des Wortes erweitern, stereographische Projection einer auf einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung liegenden ebenen Curve, den Durchschnitt einer durch diese Curve gehenden Kegelfläche, die einen festen Punct der gegebenen Fläche zu ihrem Mittelpuncte hat, mit irgend einer festen Ebene, die der Tangential-Ebene in dem festem Puncte parallel ist: so ergibt sich der nachstehende Satz.

Die stereographischen Projectionen aller auf einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung liegenden ebenen Curven sind ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte, und sind insbesondere Kreise, wenn die Fläche einen Kreispunct hat und wir diesen zum Mittelpuncte der Projection nehmen.

Nach diesem Satze können wir alle Constructionen projectiver Art, die sich auf Kreise beziehen auf solche Kegelschnitte die auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, übertragen.

Mit dem an die Spitze dieser Nummer gestellten Satze ist der folgende durch das Princip der Reciprocität verbunden. Wenn um zwei Flächen zweiter Classe sich eine Kegelfläche beschreiben lässt, so gibt es immer noch eine zweite umschriebene Kegelfläche.

265. Nach der vorigen Nummer sind zwei collineare Flächen durch die einzige Bedingung vollständig bestimmt, dass sie entweder in einem Kegelschnitte sich schneiden oder von einer Kegelfläche berührt werden, und so können wir dem ersten Theile des Satzes der 263. Nummer auch die folgenden beiden, durch das Princip der Reciprocität mit einander verknüpften Sätze entnehmen.

Alle Flächen zweiter Ordnung und Classe, die einer gegebenen Kegelfläche eingeschrieben sind, schneiden sich in zwei ebenen Curven; um alle solche Flächen, welche durch einen gegebenen Kegelschnitt gehen, lassen sich zwei Kegelflächen beschreiben.

Eine einfache Symbol-Verbindung gibt den Beweis dieser beiden Sätze. Bezeichnen wir, was den ersten Satz betrifft, zwei der eingeschriebenen Flächen durch Ω und Ω', die Kegelfläche durch K, die Ebene der beiden Berührungs-Curven (die, wenn der Kegel auf einen ellipsoidischen Punct sich reducirt, imaginär werden) durch s und s′, und durch μ und μ' zwei unbestimmte Coefficienten, so sind die Bedingungen des Satzes in den folgenden beiden identischen Gleichungen vollständig ausgedrückt

$$\Omega \equiv K + \mu s^2, \qquad \Omega' \equiv K + \mu' s'^2;$$

ziehen wir ab, und setzen

$$\mu' s'^2 - \mu s^2 \equiv \lambda tu,$$

so kommt:

$$\Omega' - \Omega \equiv \lambda tu;$$

ein analytischer Ausdruck für die Behauptung des Satzes. Zugleich ist aus dieser Beweisführung ersichtlich, dass wir irgend eine beliebige Fläche zweiter Ordnung und Classe an die Stelle der Kegelfläche des ersten Satzes setzen können. Ebenso können wir im zweiten Satze irgend eine umschriebene Fläche zweiter Ordnung und Classe an die Stelle des Kegelschnittes setzen. Soll eine der eingeschriebenen Flächen des ersten Satzes insbesondere eine Kugel sein, so ist die umschriebene Fläche nothwendig eine Rotations-Fläche. Die Kugel schneidet jede der andern eingeschriebenen Flächen in zwei ebenen Curven, also in (reellen oder imaginären) Kreisen; berührt sie eine derselben, so ist der Berührungspunct ein Kreispunct dieser Fläche. Lassen wir diese Fläche in eine Curve ausarten, so gehen die Kreispuncte der Fläche in die Brennpuncte dieser Curve über (192) und dann gelangen wir zu dem *Quetelet*schen Satze, dass ein, um eine Kugel beschriebener, Kegel von einer beliebigen die Kugel berührenden Ebene so geschnitten wird, dass der Berührungspunct ein Brennpunct der Durchschnitts-Curve ist, oder dass jede perspectivische Projection einer Kugel auf eine dieselbe berührende Ebene, ein Kegelschnitt ist, der den Berührungspunct zu einem seiner Brennpuncte hat (203).

266. Wir haben im 4. Paragraphen die Beziehungen einer Fläche zweiter Classe und Ordnung zu einem ihrer Pol-Tetraeder ausführlich discutirt; hieraus ergeben sich die allgemeinen Beziehungen zweier solcher Flächen, die nach der 259. Nummer ein gemeinschaftliches Pol-Tetraeder haben, unmittelbar. So folgt zum Beispiel der folgende Satz.

Wenn wir um zwei gegebene Flächen zweiter Ordnung und Classe zwei Kegel beschreiben, deren gemeinschaftlicher Mittelpunct mit dem Mittelpuncte eines der vier Durchschnitts-Kegel zusammenfällt, so liegen, wenn der erstgenannte Mittelpunct gegeben ist, die beiden Berührungs-Curven in derselben Ebene, welche die Mittelpuncte der drei übrigen Durchschnitts-Kegel enthält. Diese drei Mittelpuncte sind drei zugeordnete Pole in Beziehung auf jede der beiden fraglichen Curven und können als solche construirt werden (System n. 148.)

Wenn die beiden Flächen collinear liegende sind, so modificiren sich diese Beziehungen dadurch, dass es unendlich viele gemeinschaftliche Pol-Tetraeder gibt, die aber alle die Verbindungs-Linie der Mittelpuncte der beiden umschriebenen Kegelflächen und die Durchschnitts-Linie der Ebenen der beiden Durchschnitts-Curven zu zwei ihrer gegenüberliegenden Seiten haben. Wir wollen beispielsweise nur, ohne den Gegenstand zu erschöpfen, einige characteristische Beziehungen zweier collinear liegenden Flächen aus einer einfachen Symbol-Verbindung entnehmen.

Wenn man zwei Kegel beschreibt, von denen der eine K einer Fläche Ω umschrieben ist und der andere K, dieselbe in ebenen Curven schneidet, so gehen die Ebenen dieser beiden Durchschnitts-Curven, v und $v_,$ und die Berührungs-Ebene s durch dieselbe gerade Linie. Den gemachten Voraussetzungen entspricht

$$\Omega \equiv K + \mu s^2 \equiv K_, + \varkappa v v_,,$$

wonach

$$K_, - K \equiv \mu s^2 - \varkappa v v_,.$$

Da die Mittelpuncte der beiden Kegel K und K, dieselben sind, und die drei Ebenen v, v, und s nicht durch diesen gemeinschaftlichen Mittelpunct gehen, so kann die vorstehende identische Gleichung nur dann bestehen, wenn die letztgenannten drei Ebenen in derselben geraden Linie sich schneiden, und dann kommt:

$$K_, - K \equiv \nu p^2. \qquad (8)$$

Die beiden Kegel stehen in einer solchen Beziehung zu einander, die derjenigen zweier Flächen, die sich in einer ebenen Curve berühren, entspricht; die Berührungs-Ebene ist p und geht durch den Mittelpunct.

Wenn einer zweiten Fläche Ω' derselbe Kegel K umschrieben ist, so wird auch sie von dem Kegel K, in ebenen Curven geschnitten. Es ist nemlich, der Voraussetzung gemäss,

$$\Omega' \equiv K + \mu' s_,'^2$$

mithin kommt in Folge von (8):

$$\Omega' \equiv K_, + \mu' s'^2 - \nu p^2 \equiv K_, + \varkappa' v' v_,'.$$

Die beiden Durchschnitts-Ebenen v' und $v_,'$ schneiden sich auf s', so wie die beiden Durchschnitts-Ebenen v und $v_,$ sich auf s schneiden: beide Durchschnitts-Linien liegen in derselben durch den gemeinschaftlichen Mittelpunct der beiden Kegelflächen gehenden Ebene p.

Ziehen wir hiernach die beiden identischen Gleichungen

$$K + \mu s^2 \equiv K_, + \varkappa v v_,$$
$$K + \mu' s'^2 \equiv K_, + \varkappa v' v_,'$$

von einander ab, so kommt:

$$\varkappa' v' v_,' - \varkappa v v_, \equiv \mu' s'^2 - \mu s^2 \equiv \lambda t u,$$

und, wenn wir geometrisch deuten, erhalten wir die folgenden Resultate, neben die wir sogleich die mit ihnen durch das Princip der Reciprocität verbunden[e] stellen wollen.

Wenn zwei collinear liegende Flächen zweiter Ordnung und Classe gegeben sind und wir beschreiben einen Kegel, dessen Mittelpunct mit dem Mittelpuncte eines der beiden Umhüllungs-Kegel zusammenfällt und der die beiden Flächen in ebenen Curven schneidet, so schneiden die beiden Durchschnitts-Ebenen mit der einen Fläche die beiden Durchschnitts-Ebenen mit der andern in solchen vier geraden Linien, welche paarweise in den Durchschnitts-Ebenen der beiden gegebenen Flächen liegen. Wenn insbesondere der Kegel in eine durch den Mittelpunct des Umhüllungs-Kegels gehende gerade Linie ausartet, so schneiden die beiden Berührungs-Ebenen in den Durchschnitten dieser Linie mit der einen Fläche die Berührungs-Ebenen in den Durchschnitten mit der andern Fläche in vier geraden Linien, die paarweise in den Durchschnitts-Ebenen der beiden gegebenen Flächen liegen.

Wenn wir in der Ebene einer der beiden Durchschnitts-Curven zweier gegebenen collinear liegenden Flächen zweiter Ordnung und Classe einen Kegelschnitt beschreiben, durch welchen sich zwei Berührungs-Kegel an jede der beiden Flächen legen lassen, so können wir die beiden Mittelpuncte der, einer dieser Flächen umschriebenen, Kegel mit den beiden Mittelpuncten der, der andern Fläche umschriebenen, Kegel durch vier gerade Linien verbinden, welche sich paarweise in den beiden Mittelpuncten der beiden Umhüllungs-Kegel schneiden. Ziehen wir in der Ebene einer Durchschnitts-Curve irgend eine gerade Linie (eine den Kegelschnitt vertretende Doppel-Linie), legen durch dieselbe an jede der beiden Flächen zwei Tangential-Ebenen und verbinden die beiden Berührungspuncte auf der einen Fläche mit den beiden Berührungspuncten auf der andern Fläche durch vier gerade Linien, so schneiden sich diese geraden Linien paarweise in den beiden Mittelpuncten der Umhüllungs-Kegel. —

267. Wenn wir weiter particularisiren und zwischen den Constanten der beiden Gleichungen (1) die folgenden beiden Relationen voraussetzen

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\varkappa}{\varkappa'},$$

so gehen die drei letzten der vier Gleichungen (2) gleichzeitig in die Gleichung

$$p^2 = 0$$

über. Drei der frühern vier Durchschnitts-Kegel arten also gleichzeitig in ein System von zwei in die Ebene (p) zusammenfallenden Ebenen aus, der vierte berührt die Fläche in dieser Ebene (p). Das System der beiden in einer ebenen Curve sich berührenden Flächen hängt nur noch von dreizehn Constanten ab, weil einerseits die Anzahl derselben in Folge der obigen Bedingungen um zwei Einheiten sich reducirt und andererseits die Bestimmung des gemeinschaftlichen Pol-Tetraeders (der vier linearen Functionen p, q, r, s) drei willkührliche Constante einschliesst, Nur eine Ecke dieses Tetraeders nemlich ist bestimmt (der Mittelpunct des gemeinschaftlichen Berührungs-Kegels), während die drei übrigen Ecken drei beliebige zugeordnete Pole in Beziehung auf die Berührungs-Curve sind.

Zwei in einer Curve sich berührende Flächen zweiter Ordnung und Classe lassen sich in dem Systeme der Plan-Coordinaten durch Gleichungen von ganz derselben Form darstellen.

268. Wenn wir

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\rho}{\rho'}, \qquad \frac{\varkappa}{\varkappa'} = \frac{\pi}{\pi'},$$

setzen, so gehen die Gleichungen (2) paarweise in die folgenden über:

$$\rho r^2 + \sigma s^2 = 0,$$
$$\pi p^2 + \varkappa q^2 = 0,$$

und stellen also zwei Systeme von zwei Ebenen dar. Zwei der vier Durchschnitts-Kegel arten in das eine, die beiden andern in das andere dieser beiden Systeme aus. Die beiden Flächen schneiden sich in vier geraden Linien, in welchen sich auch die beiden Ebenen-Systeme schneiden.

Wenn ρ und σ und also auch ρ' und σ' entgegengesetzte Zeichen haben, so sind die Ebenen des ersten, wenn π und $\varkappa$ und also auch π' und $\varkappa'$, die Ebenen des zweiten Systems reell; sonst imaginär. Die beiden Flächen müssen also geradlinige sein, wenn alle vier Ebenen reell sein sollen. Wenn alle vier Ebenen imaginär sind, wobei immer noch die Durchschnitts-Linien der beiden Ebenen jedes Paares reell bleiben, so sind die beiden Flächen entweder beide geradlinig, oder beide imaginär oder eine ist geradlinig und die andere imaginär. Wenn endlich die Ebenen eines Systems reell und die des andern imaginär sind, so sind die Flächen beide nicht geradlinig. Das System der beiden Flächen hängt im vorliegenden Falle von vierzehn Constanten ab und kann auch durch die folgenden beiden Gleichungen dargestellt werden:

$$tu = \mu vw,$$
$$tu = \mu' vw. —$$

269. Wenn wie bisher Ω, Ω' und Ω'' homogene Functionen zweiten Grades zwischen den linearen Functionen p, q, r und s, die wir beliebig mit andern linearen Functionen vertauschen können, bedeuten, so stellen, bei beliebiger Annahme der unbestimmten Coefficienten μ, λ und $\varkappa$ die Gleichungen

$$\Omega + \lambda\Omega' + \mu\Omega'' = 0, \qquad (1)$$
$$\Omega + \varkappa\Omega' = 0, \qquad (2)$$

solche Flächen zweiter Ordnung dar, die bezüglich durch dieselben acht Durchschnittspuncte (von denen jeder durch die sieben übrigen bestimmt ist) gehen und eine gemeinschaftliche Durchschnitts-Curve (die durch acht ihrer Puncte bestimmt ist) haben (Einleitende Betrachtungen, (§. 3.)) Die Gleichungen:

$$\frac{d\Omega}{dp} + \lambda . \frac{d\Omega'}{dp} + \mu . \frac{d\Omega''}{dp} = 0,$$

$$\frac{d\Omega}{dp} + \varkappa . \frac{d\Omega'}{dp} = 0,$$

stellen alsdann Ebenen dar, die bezüglich in demselben Puncte und derselben geraden Linie sich schneiden. Diese Ebenen sind, in Beziehung auf die Flächen (1) und (2), die Polar-Ebenen des Punctes, für welchen q, r und s verschwinden, und der, bei der Willkührlichkeit der Coordinaten-Bestimmung, jeder beliebige sein kann. Wir erhalten hiernach, wenn wir zugleich das Princip der Reciprocität in Anwendung bringen, die folgenden Sätze.

Die Polar-Ebenen eines gegebenen Punctes in Beziehung auf alle Flächen zweiter Ordnung, die durch sieben gegebene Puncte gehen, schneiden sich in demselben Puncte; sie schneiden sich in derselben geraden Linie, wenn alle Flächen durch acht gegebene Puncte gehen.

Die Pole einer gegebenen Ebene in Beziehung auf alle Flächen zweiter Classe, die sieben gegebene Ebenen berühren, liegen in derselben Ebene: sie liegen auf derselben geraden Linie, wenn alle Flächen acht gegebene Ebenen berühren, und also derselben Abwickelungs-Fläche eingeschrieben sind.

Liegt die gegebene Ebene insbesondere unendlich weit, so particularisirt sich der letzte Satz in den folgenden.

Die Mittelpuncte aller Flächen zweiter Classe, die bezüglich sieben und acht gegebene Ebenen berühren liegen bezüglich in derselben Ebene und auf derselben geraden Linie.

270. Homofocale Flächen bilden eine solche Gruppe von Flächen, auf welche der letzte allgemeine Satz seine Anwendung findet (262) und sich dann dahin particularisirt, dass der Ort für die Pole eine gerade Linie ist, die auf der gegebenen Ebene senkrecht steht. Stellen wir nehmlich eine solche Flächen-Gruppe, bei willkührlicher Annahme von δ, indem wir w gleich Eins nehmen, durch die Gleichung

$$(\alpha^2 - \delta)\, t^2 + (\beta^2 - \delta)\, u^2 + (\gamma^2 - \delta)\, v^2 = 1 \qquad (3)$$

dar, so ist die Gleichung des Poles irgend einer gegebenen Ebene (t', u', v') in Beziehung auf eine beliebige dieser Flächen

$$(\alpha^2 - \delta)\, t't + \delta)\, u'u + (\gamma^2 - \delta)\, v'v = 1,$$

und hiernach sind die Coordinaten dieses Poles:

$$x = -(\alpha^2 - \delta)\, t', \qquad y = -(\beta^2 - \delta)\, u', \qquad z = -(\gamma^2 - \delta)\, v'.$$

Eliminiren wir δ, so finden wir für den Ort der Pole die Doppel-Gleichung:

$$\frac{x}{t'} + \alpha^2 = \frac{y}{u'} + \beta^2 = \frac{z}{v'} + \gamma^2,$$

welche eine gerade Linie darstellt, die, was zu beweisen war, auf der gegebenen Ebene (t', u', v'), deren Gleichung

$$t'x + u'y + v'z + 1 = 0,$$

senkrecht steht.

271. In einer Gruppe homofocaler Flächen ist jede einzelne Fläche durch eine ihrer Berührungs-Ebenen vollkommen bestimmt, denn die Gleichung (3) gibt, wenn wir gegebene Werthe der drei Veränderlichen t, u und v kennen, den Coefficienten δ auf lineare Weise. Durch einen gegebenen Punct aber lassen sich immer drei dieser Flächen legen und zwar immer ein Ellipsoid, ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid. Stellen wir nehmlich dieselbe Flächen-Gruppe (3) durch folgende Gleichung dar:

$$\frac{x^2}{\alpha^2-\delta} + \frac{y^2}{\beta^2-\delta} + \frac{z^2}{\gamma^2-\delta} - 1 = 0,$$

so erhalten wir, wenn wir die Coordinaten-Werthe des gegebenen Punctes einsetzen, zur Bestimmung von δ eine Gleichung des dritten Grades. Der erste Theil dieser Gleichung ändert dreimal sein Zeichen, wenn δ nach einander gleich γ^2, β^2 und α^2 wird. Die drei Wurzeln sind also sämmtlich reell, eine derselben liegt zwischen α^2 und β^2, eine zwischen β^2 und γ^2 und die dritte ausserhalb der Werthe α^2 und γ^2: wonach die obige Behauptung bewiesen ist.*)

Aus dem in der vorigen Nummer bewiesenen Satze folgt unmittelbar, dass drei homofocale Flächen, die durch denselben Punct gehen, in diesem Puncte sich rechtwinklig schneiden. Denn, nehmen wir für die gegebene Ebene die Tangential-Ebene einer der drei Flächen in dem Durchschnittspuncte, so ist dieser ihr Pol in Beziehung auf diese Fläche, während ihre Pole in Beziehung auf die beiden andern Flächen offenbar beide auf der gemeinschaftlichen Tangente ihrer Durchschnitts-Curve liegen.

Auf derselben Tangente liegen auch die Pole der gegebenen Tangential-Ebene in Beziehung auf die (als Flächen zweiter Classe zu betrachtenden) drei Focal-Curven. Wenn man also in einem gegebenen Puncte einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung und Classe die Tangential-Ebene und die Normale construirt, welche einem der drei Hauptschnitte in einer geraden Linie und einem Puncte begegnen, so ist, in Beziehung auf die bezügliche Focal-Curve, dieser Punct der Pol jener geraden Linie. Hiernach können wir, wenn die Tangential-Ebene gegeben ist, den Berührungspunct auf ihr unmittelbar bestimmen. Wir begegnen hierbei zugleich dem Satze, dass der geometrische Ort für die Berührungspuncte auf solchen Tangential-Ebenen homofocaler Flächen, die durch eine gegebene, in einem der drei Hauptschnitte liegende gerade Linie gehen, ein Kreis ist, der den kürzesten Abstand der gegebenen geraden Linie und ihres Poles zu einem Durchmesser hat. Es knüpft sich ferner hieran eine einfache Construction der beiden Tangential-Ebenen, die sich, im Allgemeinen, durch eine in einem der drei Hauptschnitte liegende gerade Linie an die Fläche legen lassen. Wenn diese gerade Linie insbesondere eine Tangente der Focal-Curve ist, so tritt uns das bemerkenswerthe Resultat entgegen, dass alsdann jede (imaginäre) Ebene, die durch eine solche gerade Linie geht, eine Tangential-Ebene der Fläche ist.**)

---

*) In der Note zur 140. Nummer haben wir, nach Herrn *Cauchy*, diejenige Gleichung, deren Wurzeln die Halb-Axen-Quadrate einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung sind, und welche die allgemeine Gleichung dritten Grades mit drei reellen Wurzeln repräsentirt (175), auf die Form der obigen Gleichung gebracht.

**) Wenn wir für die Gleichung der Fläche die folgende

$$\alpha^2t^2 + \beta^2u^2 + \gamma^2v^2 = 1$$

und für die Gleichungen einer geraden Linie in dem Hauptschnitte XY die folgenden

Es steht also jede Tangente der beiden reellen Focal-Curven rücksichtlich solcher Ebenen, die durch dieselbe gelegt werden, zur Fläche in ganz analoger Beziehung, wie die beiden Brennpuncte, rücksichtlich der durch dieselben gehenden geraden Linien, zur Curve zweiter Classe. Je zwei auf einander senkrechte Ebenen insbesondere, die durch eine Tangente der Focal-Curve gehen, bilden mit den beiden bezüglichen Tangential-Ebenen vier harmonische Ebenen, woraus sich mehrere Sätze ergeben.

272. Die Gleichung (2), welche, bei willkührlicher Annahme von z, Flächen zweiter Ordnung darstellt, die alle dieselbe Durchschnitts-Curve haben, stellt, in Verbindung mit der Gleichung

$$p = 0$$

die Durchschnitts-Curven in der bezüglichen Ebene (p) dar, und hieraus folgt, dass diese alle in denselben vier, reellen oder imaginären, Puncten sich schneiden. Wenn zwei der fraglichen Flächen gegeben sind, etwa zwei der vier gemeinschaftlichen Durchschnitts-Kegel, so können wir sogleich eine dritte Fläche bestimmen, welche durch die reelle oder imaginäre Durchschnitts-Curve der beiden gegebenen und überdiess durch einen gegebenen Punct M geht. Jede durch diesen Punct gelegte Ebene schneidet die beiden gegebenen Flächen in zwei Kegelschnitten und die zu construirende in einem solchen dritten Kegelschnitt, der dadurch bestimmt ist, dass er durch die reellen oder imaginären Durchschnittspuncte der beiden ersten und durch den gegebenen Punct M geht. (Entwicklungen I, n. 394) Wenn wir die beliebige Ebene (p) als gegeben betrachten und in ihr den Punct M verrücken, so ändert sich der dritte Kegelschnitt, und geht insbesondere, wenn wir denselben mit einem der drei gemeinschaftlichen zugeordneten Pole der beiden ersten Kegelschnitte zusammenfallen lassen, in einen Punct oder ein System von zwei geraden Linien über. Dann ist die Ebene (p) eine Tangential-Ebene der zu construirenden dritten Fläche, und auf ihr der Punct M der Berührungspunct. Es gibt also, im Allgemeinen, drei Flächen zweiter Ordnung, welche durch die reelle oder imaginäre Durchschnitts-Curve zweier gegebenen Flächen zweiter Ordnung (durch acht gegebene Puncte) gehen und überdiess eine gegebene Ebene berühren. Die drei Berührungspuncte auf dieser Ebene sind die drei gemeinschaftlichen zugeordneten Pole derjenigen beiden Kegelschnitte, in welchen dieselbe von den beiden gegebenen Flächen geschnitten wird.

Neben den eben gewonnenen Resultaten stellen sich, in Folge des Princips der Reciprocität, die folgenden. Wenn man um solche Flächen zweiter Classe, welche acht gegebene Ebenen berühren, und folglich von derselben Abwickelungs-Fläche umhüllt werden, Kegel beschreibt, die einen gegebenen Punct zum gemeinschaftlichen Mittelpuncte haben, so haben alle diese Kegel vier gemeinschaftliche Tangential-Ebenen und folglich drei gemeinschaftliche zugeordnete Diametral-Ebenen. Durch eine fünfte Tangential-Ebene ist ein solcher Kegel vollkommen bestimmt. Es gibt im Allgemeinen drei Flächen zweiter Classe, welche mit zwei gegebenen dieselben gemeinschaftlichen Tangential-Ebenen haben, (acht gegebene Ebenen berühren) und überdiess durch einen gegebenen Punct gehen. Die

---

$$z = 0, \qquad t'x + u'y + 1 = 0,$$

nehmen und die Winkel, welche die beiden durch diese gerade Linie gehenden Tangential-Ebenen mit dem Hauptschnitte XY bilden, η nennen, so ist

$$\operatorname{tang}^2\eta = -\frac{\gamma^2(t'^2 + u'^2)}{\alpha^2 t'^2 + \beta^2 u'^2 - 1},$$

und wenn insbesondere die gerade Linie die Focal-Curve

$$(\alpha^2 - \gamma^2)t^2 + (\beta^2 - \gamma^2)u^2 = 1$$

berührt, erhält $\operatorname{tang}\eta$ den Werth $\pm\sqrt{(-1)}$ und η wird unbestimmt. Vergl. Entwicklungen II. S. 64.

drei Tangential-Ebenen in dem gegebenen Puncte sind die drei gemeinschaftlichen zugeordneten Diametral-Ebenen derjenigen beiden Kegelflächen, welche diesen Punct zu ihrem Mittelpuncte haben und den beiden gegebenen Flächen umschrieben sind.

273. Wir wollen die letzten Resultate auf den besondern Fall homofocaler Flächen, in deren Reihe namentlich auch die drei gemeinschaftlichen Focal-Curven gehören, übertragen. Drei solche Flächen, die durch einen gegebenen Punct gehen, haben in diesem Puncte drei Tangential-Ebenen, die auf einander senkrecht stehen (271). Alle umschriebenen Kegelflächen, deren gemeinschaftlicher Mittelpunct dieser Punct ist, haben also diese drei Tangential-Ebenen zu ihren drei gemeinschaftlichen Hauptschnitten: die drei Normalen der drei Flächen also zu ihren drei gemeinschaftlichen Axen. Wir entnehmen hieraus die folgenden Sätze.

Die drei Axen irgend eines Kegels, der einer gegebenen Fläche zweiter Classe umschrieben ist, fallen mit den drei Axen jeder derjenigen drei Kegelflächen zusammen, die denselben Mittelpunct haben und durch die drei Focal-Curven gehen. Liegt der Mittelpunct insbesondere auf der gegebenen Fläche selbst, so ist die Normale derselben in diesem Puncte eine der drei Axen jeder dieser drei Kegelflächen, so dass diese drei gemeinschaftlichen Axen die drei Normalen der durch diesen Punct gehenden drei confocalen Flächen sind.

274. Wenn wir durch die Normale einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung und Classe — und offenbar können wir hier auch die beiden Paraboloide einschliessen — in einem gegebenen Puncte M eine beliebige Ebene legen, so schneidet diese Ebene eine beliebige Focal-Curve der Fläche in zwei Puncten F und G und diejenige Kegelfläche, die den gegebenen Punct zu ihrem Mittelpuncte hat und durch diese Curve geht, in zwei geraden Linien MF und MG, die mit der Normalen, weil diese eine Axe der Kegelfläche ist, gleiche Winkel bilden. Ein Lichtstrahl also, der von F ausgeht und die Fläche in M trifft, wird in Gemässheit des bekannten Spiegelungs-Gesetzes, entweder nach dem Puncte G oder so zurückgeworfen, als wenn er von dem Puncte G käme. Vertauschen wir den Punct M mit einem beliebigen andern Puncte der Fläche, so gibt uns dieselbe Construction, statt des Punctes G, einen andern Punct derselben Focal-Curve. Alle Lichtstrahlen also, welche von dem Puncte F auf der Focal-Curve ausgehen, schneiden, nachdem sie von der Fläche reflectirt worden sind, entweder selbst oder rückwärts verlängert, zum zweiten Male dieselbe Focal-Curve. Im ersten Falle bildet diese Focal-Curve eine Licht-Linie, im zweiten Falle findet, nach der Spiegelung, keine Vereinigung der Lichtstrahlen statt, es nehmen dieselben aber einen solchen Weg, als wenn sie von der Focal-Curve ausgegangen wären. Ein Gleiches gilt, wenn wir statt des Punctes F nach einander alle Puncte der Focal-Curve betrachten. Und somit sind wir zu dem folgenden Satze gelangt, der den Schlussstein der gegenwärtigen Untersuchungen bilden mag.

Alle Lichtstrahlen, die, von einer der beiden reellen Focal-Curven irgend einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung, eines Ellipsoids, eines elliptischen oder hyperbolischen Hyperboloids, eines elliptischen oder hyperbolischen Paraboloids, ausgehend, auf die Fläche fallen und von dieser gespiegelt werden, kehren wieder zu derselben Focal-Curve zurück, oder nehmen, nach der Spiegelung, einen solchen Weg, als wenn sie von dieser Focal-Curve ausgegangen wären.

§. 12. **Polar-Gleichung der Kegelflächen. Focal-Linien. Elliptische, hyperbolische und parabolische Kegelflächen.** . . . . . Seite 301

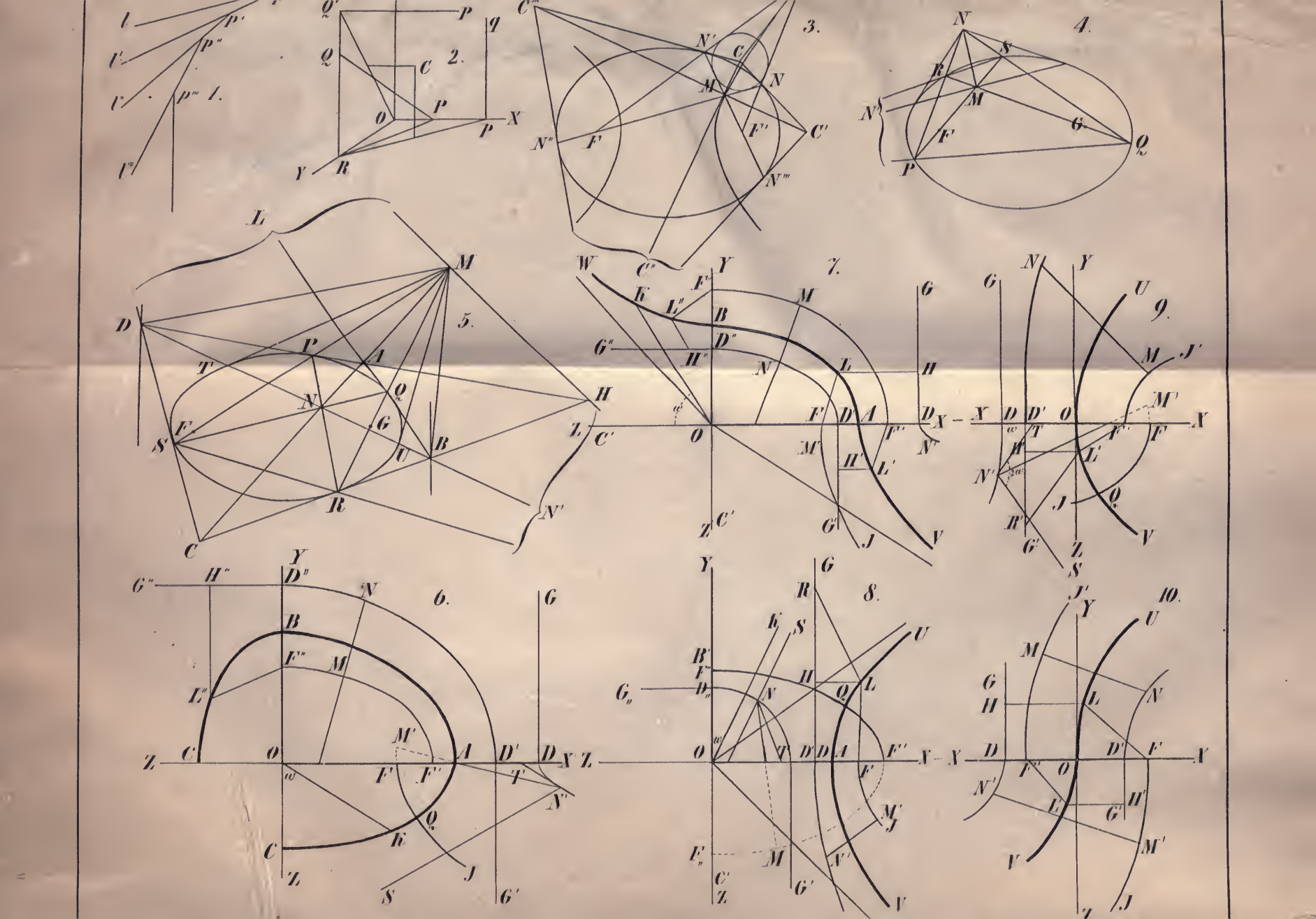
Polar-Coordinaten der Kegelseiten. 235. Gleichungsform $\cot g\psi = P + Q\cos\omega$. Parameter und Excentricität. 236. Eintheilung der Kegelflächen in hyperbolische, parabolische und elliptische. Characteristischer Schnitt. Asymptoten-Ebenen. 237, 238. Beziehung der Polar-Gleichung zur Gleichung in Parallel-Coordinaten. 239. Zweite Gleichungs-Form. Confocal-Linien und Kreisschnitte. Zweite Eintheilung der Kegelflächen. Beziehung der neuen Polar-Gleichung zur gewöhnlichen Gleichung. 240, 241. Gleichung der Tangential-Ebene für die erste Gleichungs-Form. 242. Unmittelbare Folgerungen. 243. Bedingungs-Gleichung, dass eine Ebene die Kegelfläche berühre. 244. Beispiel analytischer Beweisführung. Geometrische Folgerungen. 245, 246. Gleichung der Asymptoten-Ebenen. 247. Die Summe der Winkel, die jede Kegelseite mit den beiden Focallinien bildet, ist constant. 248. Bestimmung der Kegelfläche durch ihre Tangential-Ebenen. Polar-Coordinaten dieser Ebenen. 249, 250. Uebertragungs-Princip. 251—253. Mannigfaltige Winkel-Beziehungen. 254.

§. 13. **Die Reciprocität der Flächen zweiter Ordnung und zweiter Classe** Seite 318

Allgemeines Princip und Particularisirung desselben. 255. Darstellung derselben Fläche in befreundeten Punct- und Plan-Coordinaten und zweier reciproken Flächen. 256, 257. Allgemeine Betrachtungen. Reciprocität für den Fall von mehr als drei Veränderlichen. 258.

§. 14. **Zusammenstellung zweier Flächen zweiter Ordnung und Classe. Gemeinschaftliches Pol-Tetraeder.** . . . . . Seite 323.

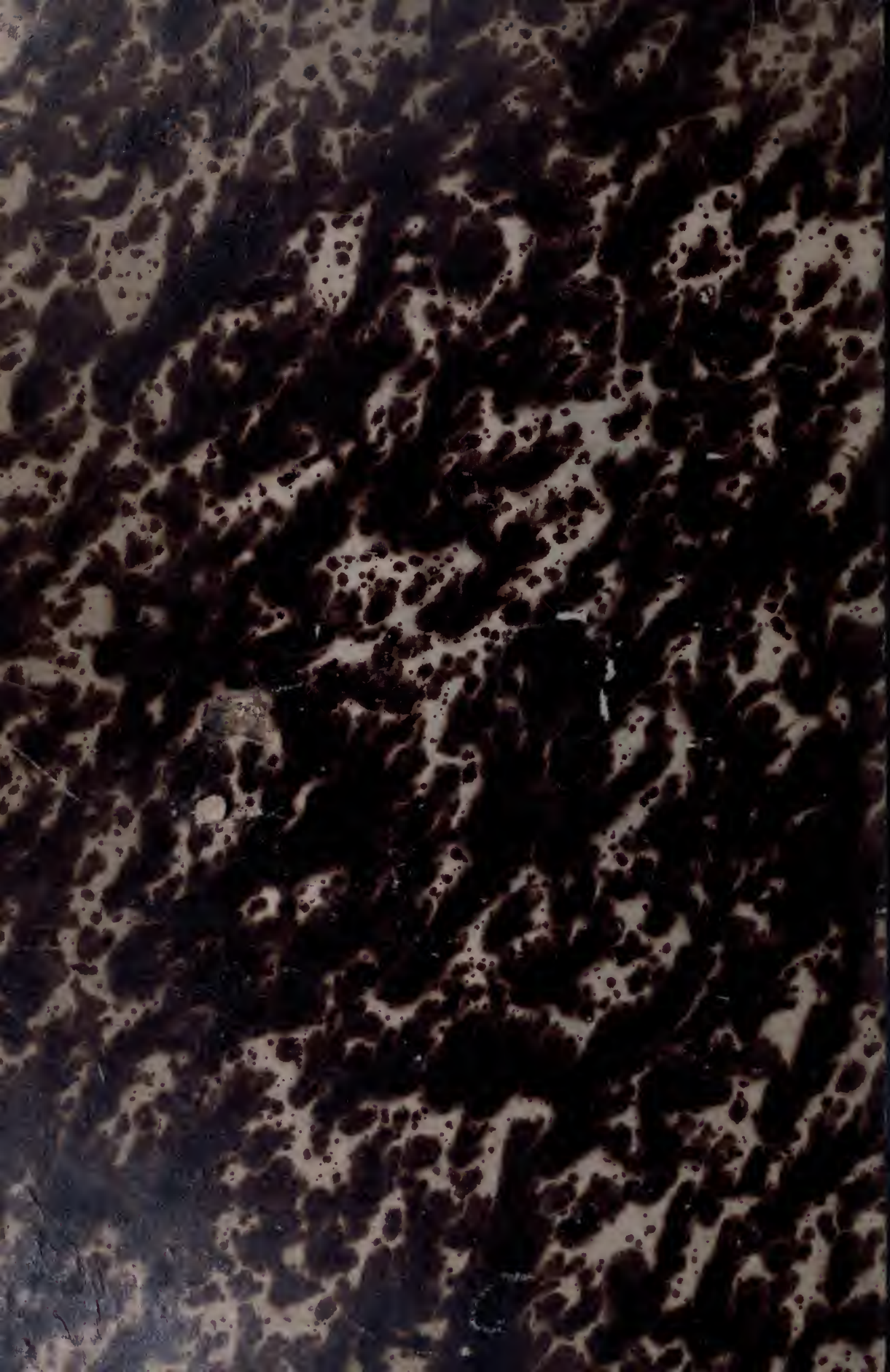
Gemeinschaftliches Pol-Tetraeder zweier Flächen. Vier Kegelflächen mit derselben Durchschnitts-Curve; vier Kegelschnitte mit derselben Abwickelungs-Fläche. 259–262. Collinear liegende Flächen. Stereographische Projection. 263–265. Eigenschaften zweier Flächen in Beziehung auf das gemeinschaftliche Pol-Tetraeder. Symbol-Beweise. 266. Flächen, die sich in einer ebenen Curve berühren und in vier geraden Linien schneiden. 267, 268. Ort der Pole einer Ebene in Beziehung auf Flächen, die durch sieben und acht Puncte gehen. Ort, der von den Polar-Ebenen eines Punctes, in Beziehung auf Flächen, die sieben und acht Ebenen berühren, umhüllt wird. Ort der Mittelpuncte. 269. Particularisation für homofocale Flächen, die, wenn überhaupt ein Durchschnitt Statt findet, sich rechtwinklig schneiden. Durch jede Tangente der Focal-Curve gehen unendlich viele imaginäre Tangential-Ebenen der Fläche. 270, 271. Es gibt drei Flächen, die durch acht Puncte gehen und eine Ebene berühren, und die acht Ebenen berühren und durch einen Punct gehen. Constructionen. 272. Particularisation für homofocale Flächen. 273. Spiegelungs-Satz bei Flächen zweiter Ordnung und Classe. 274.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.

QA
571
P58

Plücker, Julius
System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise

Physical &
Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY